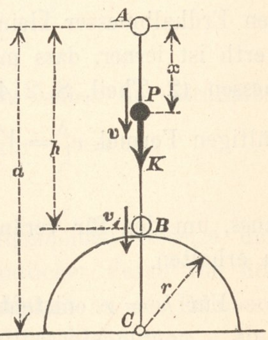
2. Fall eines Massenpunktes aus sehr grosser Höhe ohne Rücksicht auf den Luftwiderstand.

Fällt der Massenpunkt aus so grosser Höhe, dass die Fallbeschleunigung nicht mehr als konstant angesehen werden kann, so hat man für dieselbe

Fig. 71.



1) $$g_x = g\frac{r^2}{(a-x)^2}$$

zu setzen (1. Theil, S. 57), wenn g die Fallbeschleunigung $= 9{,}81$ an der Erdoberfläche, r der Erdhalbmesser, $a-x$ die augenblickliche Entfernung des Massenpunktes von dem Erdmittelpunkte C (Fig. 71). (Der Kreis im unteren Theile der Figur soll die Erde andeuten.) Die Bewegung beginne bei A in der Höhe h über der Erdoberfläche, im Abstand $a = h + r$ vom Mittelpunkte der Erde, mit der Geschwindigkeit Null. Nach t Sekunden habe der Punkt x Meter zurückgelegt, habe die Geschwindigkeit v und befinde sich bei P; dann ist nach Gl. 1

$$\frac{dv}{dt} = \frac{gr^2}{(a-x)^2};$$

dies giebt, mit $v\,dt = dx$ multiplicirt:

$$v\,dv = gr^2\frac{dx}{(a-x)^2} = -gr^2\frac{d(a-x)}{(a-x)^2};$$

mithin ist $$\frac{v^2}{2} = \frac{gr^2}{a-x} + C$$

und wegen $v = 0$ für $x = 0$:

$$0 = \frac{gr^2}{a} + C, \quad \text{also}$$

$$v^2 = 2gr^2\left(\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a}\right) = 2gr^2\frac{x}{a(a-x)} \quad \text{und}$$

2) $$v = r\sqrt{\frac{2gx}{a(a-x)}}.$$

Für $x = h$, $a = r + h$ und $a - x = r$ wird v zur Endgeschwindigkeit v_1, mit der der Punkt bei B an der Erdoberfläche anlangt, nämlich

3) $$v_1 = r\sqrt{\frac{2gh}{(r+h)r}} = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{h}{r}}}.$$

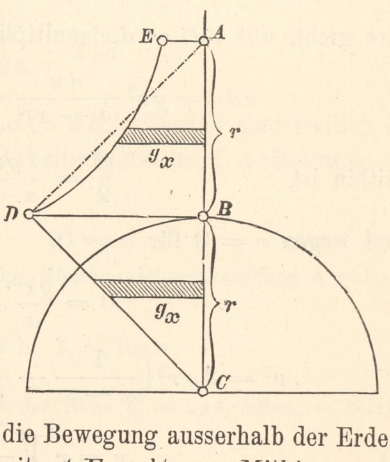
Hieraus ist zu ersehen, dass man, sobald die Fallhöhe h gegen den Erdhalbmesser klein ist, $v_1 = \sqrt{2gh}$ setzen darf. Bemerkenswerth ist ferner, dass man, ebenso wie beim barometrischen Höhenmessen (2. Theil, S. 214), in der für konstante Fallbeschleunigung gültigen Formel $v_1 = \sqrt{2gh}$ die Fallhöhe h durch $\dfrac{h}{1+\frac{h}{r}}$ ersetzen muss, um den für veränderliche Fallbeschleunigung gültigen Werth zu erhalten.

Für $h = r$ entsteht aus Gl. 3

4) $$v_1 = \sqrt{gr}.$$

Die gleiche Geschwindigkeit würde sich auch ergeben, wenn der Massenpunkt die Strecke $BC = r$ (Fig. 72) im Innern der homogen gedachten Erde zurücklegte (siehe S. 57, Gl. 11). Daraus folgt, dass auch die Arbeiten der Schwerkraft längs dieser beiden Wege AB und BC gleich sein müssen. Die auf die Masseneinheit kommende Schwerkraftarbeit ist aber offenbar $\int g_x \cdot dx$, d. h. gleich der der durchfallenen Höhe entsprechenden Fläche derjenigen Kurve, welche das veränderliche g_x darstellt. Für das Innere der Erde ist nach dem 1. Theile, S. 58 die Darstellung von g_x eine Gerade CD mit $BD = g = 9{,}81$, für die Bewegung ausserhalb der Erde eine hyperbelartige Kurve DE mit $AE = 1/4\, g$. Mithin muss

Fig. 72.



$BCD = ABDE$, also auch $ABDE = ABD = \frac{1}{2} g r$ sein. Die Nachrechnung ergiebt auch mit $g_x = \frac{g r^2}{(a - x)^2}$ und $a = 2r$

5) $$\int_{x=0}^{x=r} g_x \, dx = \frac{g r}{2}.$$

Schreibt man Gl. 3 in der Form

6) $$v_1 = \sqrt{\frac{2 g h r}{r + h}} = \sqrt{\frac{2 g r}{\frac{r}{h} + 1}},$$

so erhält man für Fallhöhen h, gegen die selbst der Erdhalbmesser r vernachlässigt werden darf, d. h. für $\frac{h}{r} = \infty$:

7) $$v_1 = \sqrt{2 g r}.$$

D. h. wenn ein Punkt nach dem allgemeinen Gesetze der Massenanziehung (1. Theil, S. 55) aus unendlicher Ferne von der Erde angezogen wird, so ist seine Geschwindigkeit an der Erdoberfläche dieselbe, als ob er mit konstanter Fallbeschleunigung g eine Höhe, gleich dem Erdhalbmesser r, durchfallen hätte. Die Gesammtfläche der bis ins Unendliche über E (Fig. 72) hinaus fortgesetzten Linie DE der Fallbeschleunigung muss daher $= g r$ sein.

Die zur Fallbewegung erforderliche Zeit ergiebt sich, wenn man in Gl. 2 $v = dx : dt$ setzt und schreibt

$$dt = \sqrt{\frac{a}{2 g r^2}} \sqrt{\frac{a - x}{x}} \, dx.$$

Bei der Integration von Ausdrücken dieser Art muss man aus dem Zähler ein etwaiges Wurzelzeichen zu beseitigen suchen; daher multiplicire man Zähler und Nenner mit $\sqrt{a - x}$, um zu erhalten

$$dt = \sqrt{\frac{a}{2 g r^2}} \frac{a - x}{\sqrt{a x - x^2}} \, dx.$$

Weil nun $d(a x - x^2) = (a - 2x) \, dx = 2\left(\frac{a}{2} - x\right) dx$,

so vertausche man im Zähler a mit $\frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ und ordne

8) $$dt = \sqrt{\frac{a}{2 g r^2}} \left\{ \frac{\frac{1}{2} a - x}{\sqrt{a x - x^2}} \, dx + \frac{a}{2} \frac{dx}{\sqrt{a x - x^2}} \right\}$$

Das Integral des ersten Summanden in der Klammer ist $\sqrt{ax - x^2}$; um den zweiten Summanden auf eine der Grundformeln zurückzuführen, setze man vorübergehend $x = b - y$ mit $dx = -dy$; dann wird

$$\sqrt{ax - x^2} = \sqrt{ab - ay - b^2 + 2by - y^2}.$$

Man bestimmt nun die bis jetzt willkürliche Grösse b so, dass unter dem Wurzelzeichen die Glieder mit der ersten Potenz von y verschwinden, also $2b = a$, d. h. $b = {}^1\!/_2\, a$ werde; dann wird

$$\frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}} = -\frac{dy}{\sqrt{ab - b^2 - y^2}} = -\frac{dy}{\sqrt{\frac{a^2}{4} - y^2}}$$

$$= -\frac{dy}{\frac{a}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{2}{a}y\right)^2}} = -\frac{d\left(\frac{2}{a}y\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{2}{a}y\right)^2}} = d\left(\arccos\frac{2}{a}y\right)$$

$$= d\left(\arccos\frac{a - 2x}{a}\right).$$

Hiernach liefert die Integration der Gl. 8:

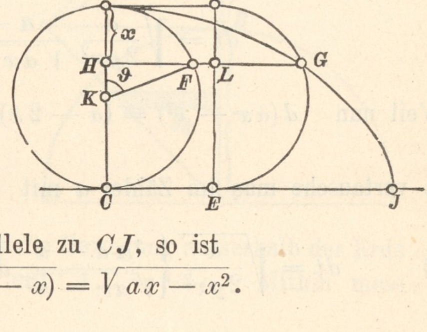
$$9) \qquad t = \sqrt{\frac{a}{2gr^2}}\left\{\sqrt{ax - x^2} + \frac{a}{2}\arccos\frac{a - 2x}{a}\right\}.$$

Eine Integrationskonstante braucht nicht mehr hinzugefügt zu werden, weil für $x = 0$ richtig

$$t = \sqrt{\frac{a}{2gr^2}}\left(0 + \frac{a}{2}\arccos 1\right) = 0 \quad \text{entsteht.}$$

Gl. 9 ist nach x nicht auflösbar, doch lässt sich der Klammerausdruck der rechten Seite leicht mittels einer Cykloide darstellen. Lässt man (Fig. 73) einen Kreis vom Durchmesser a auf der Geraden JC rollen und von einem Punkt des Umfanges die Cykloide JA erzeugen und zieht in einer Tiefe $AH = x$ unter dem Scheitelpunkte der Cykloide eine Parallele zu CJ, so ist

Fig. 73.



$$HF = \sqrt{x(a - x)} = \sqrt{ax - x^2}.$$

Ferner ist

$$\cos HKF = \cos \vartheta = \frac{{}^1/_2\, a - x}{{}^1/_2\, a} = \frac{a - 2x}{a},$$

mithin der Kreisbogen

$$AF = \frac{a}{2} \arccos \frac{a - 2x}{a}.$$

Macht man also $\overline{AD} = \widehat{AF}$ und zeichnet den Halbkreis DGE, so ist $LG = HF$, $HL = AD = \widehat{AF}$, mithin

$$HG = \sqrt{ax - x^2} + \frac{a}{2} \arccos \frac{a - 2x}{a}.$$

Für $a = 2r$ und $x = r$, d. h. für den Fall aus der Höhe r über der Erdoberfläche bis zu dieser, ist eine Zeit erforderlich

$$t = \sqrt{\frac{2r}{2gr^2}} \left\{ \sqrt{2r^2 - r^2} + r \arccos 0 \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{gr}}\, r \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \sqrt{\frac{r}{g}},$$

während der Fall von der Oberfläche bis zum Mittelpunkte der Erde nach Gl. 12, S. 57 nur die Zeit

$$\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{r}{g}}$$

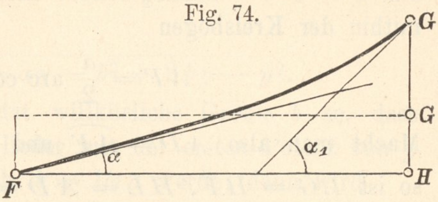
in Anspruch nehmen würde. Der Unterschied erklärt sich dadurch, dass in dem jetzt vorliegenden Falle die Beschleunigung zu Anfang nur den geringen Werth ${}^1/_4\, g$ hat, dass daher die Geschwindigkeit nur langsam zunimmt, während in dem auf S. 56/57 behandelten Falle die Bewegung mit der Maximalbeschleunigung g beginnt.

Einen noch klareren Einblick in diese Verhältnisse gewinnt man, wenn man für jede der hier in Vergleich stehenden Bewegungen die Geschwindigkeitskurve (nach 1. Theil, S. 10) aufzeichnet, d. h. zu den Zeiten als Abscissen die Geschwindigkeiten als Ordinaten aufträgt.

Für die ausserhalb der Erde von A nach B (Fig. 72) verlaufende Bewegung fehlt es allerdings an einer unmittelbaren Beziehung zwischen v und t; führt man aber die Wegeslängen x als Hülfsgrössen ein, so kann man mittels Gl. 2 das entsprechende v und nach Gl. 9 das zugehörige t ermitteln, wobei zur Erleichterung der Berechnung noch die Figur 73 benutzt werden kann.

So entspricht beispielsweise $x = 0{,}1\, r$, wenn man dies in Gl. 9 einführt und gleichzeitig $a = 2r$ setzt, $t = 0{,}887 \sqrt{\frac{r}{g}}$; Gl. 2 aber liefert mit den gleichen Werthen für a und x $v = 0{,}229\sqrt{gr}$. Diese Koordinaten t und v bestimmen einen Punkt der Geschwindigkeitskurve, und in gleicher Weise findet man eine beliebige Zahl anderer;

Fig. 74.



wählt man für $\sqrt{\frac{r}{g}}$ das Mafs 2 cm, für $\sqrt{gr}$ ebenfalls das Mafs 2 cm, so ergiebt sich die Geschwindigkeitskurve Fig. 74. Die Beschleunigung erscheint nach 1. Theil, S. 15 als das Ansteigungsverhältnis der Geschwindigkeitskurve; es ist

$$GH = \sqrt{g \cdot r} \qquad FH = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\sqrt{\frac{r}{g}} = 2{,}57\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Da nun die Fallbeschleunigung in der Höhe r über der Erdoberfläche $^1/_4\, g$, an der Erdoberfläche g beträgt, so muss $\operatorname{tg}\alpha = {}^1/_4 \operatorname{tg}\alpha_1$ sein, wenn α und α_1 die Neigungswinkel der Kurve bei F und G bedeuten.

Für die Bewegung im Inneren der Erde von B nach C (Fig. 72) gilt, wenn man von der Stelle B aus die Wege und Zeiten misst, ein Bewegungsgesetz von etwas anderer Form als Gl. 5, S. 54. Es würde nämlich jetzt in Fig. 62, S. 55 $BQ = ct$ und $BP = x = r\left(1 - \cos\frac{ct}{r}\right)$ sein, oder, weil

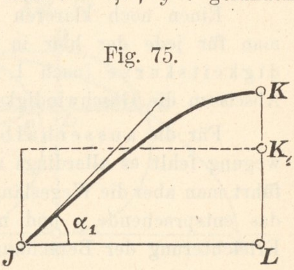
$c = \sqrt{g \cdot r}$, $\quad x = r\left(1 - \cos t\sqrt{\frac{g}{r}}\right)$; und das Geschwindigkeitsgesetz:

$$v = \sqrt{g \cdot r}\sin t\sqrt{\frac{g}{r}}.$$

Setzt man hierin beispielsweise $t = 0{,}1\sqrt{\frac{r}{g}}$, so wird $v = \sqrt{g \cdot r}\sin 0{,}1$. Der Bogengrösse 0,1 entspricht die Gradzahl 5,73 oder rund $5^0\,44'$ und der Sinus 0,0999, womit genau genug $\sin 0{,}1 = 0{,}1$ und $v = 0{,}1\sqrt{g \cdot r}$ gefunden ist. In dieser Weise ergeben sich die Koordinaten der Geschwindigkeitskurve JK (Fig. 75), welche einen Theil einer Sinuslinie bildet. Es ist $KL = \sqrt{g \cdot r}$,

$$JL = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}} = 1{,}57\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Fig. 75.



Das Ansteigungsverhältnis der Kurve JK an der Stelle J ist $\operatorname{tg}\alpha_1$, d. h. von derselben Grösse wie $\operatorname{tg}\alpha_1$ in Fig. 74. Da nach 1. Theil, S. 11 der Inhalt der Geschwindigkeitskurve die Wegeslänge bezeichnet, und diese in beiden Fällen $= r$ ist, so müssen die Flächen FGH und JKL einander gleich sein. Die Figur FGH lässt sich in ein Rechteck von der Breite $2{,}57\sqrt{\frac{r}{g}}$ und der Höhe $0{,}39\sqrt{g\cdot r}$ verwandeln, was der Fläche $=r$ entspricht; die Figur JKL ebenso in ein Rechteck von der Breite $1{,}57\sqrt{\frac{r}{g}}$ und der Höhe $0{,}64\sqrt{g\cdot r}$.

3. Bewegung unter alleiniger Einwirkung eines Flüssigkeits-Widerstandes.

Wird ein schwimmender Körper mit einer Geschwindigkeit c in Bewegung gesetzt und sodann der alleinigen Einwirkung des Wasser- und Luftwiderstandes überlassen, so wird er, weil der Auftrieb der Schwerkraft das Gleichgewicht hält, eine verzögerte Bewegung in wagerechter gerader Linie ausführen. Man kann den Flüssigkeitswiderstand W mit dem Quadrate der veränderlichen Geschwindigkeit v verhältnisgleich annehmen, also setzen

1) $$W = A v^2.$$

Es empfiehlt sich nun, zur Abkürzung der Ergebnisse eine Geschwindigkeit k einzuführen, bei welcher der Körper oder Massenpunkt m einen Widerstand, gleich seinem Gewichte mg, erfährt. Dann wird aus Gl. 1:

$$mg = A k^2,$$

woraus durch Verbindung mit Gl. 1

2) $$\boldsymbol{W = mg\frac{v^2}{k^2}}$$

entsteht. Hiernach wird die Beschleunigung

3) $$\frac{dv}{dt} = -\frac{W}{m} = -g\frac{v^2}{k^2} \quad \text{oder}$$

$$dt = -\frac{k^2}{g}\frac{dv}{v^2} = \frac{k^2}{g}\, d\left(\frac{1}{v}\right), \quad \text{mithin}$$

$$t = \frac{k^2}{g}\frac{1}{v} + C;$$