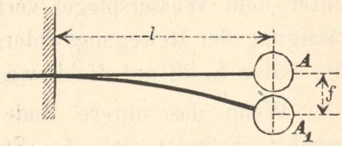
Querschwingungen. Annähernd gelten die Gl. 15—17 auch, wenn ein leichter elastischer Stab durch die daran befestigte Masse m nach Fig. 67 in Biegungsspannungen versetzt wird, weil innerhalb der Elasticitätsgrenze die Durchbiegung verhältnisgleich mit der biegenden Kraft wächst. Die Lage A entspricht dem spannungslosen Zustande des Stabes. Die Gleichgewichtslage A_1 befindet sich um das Mafs der einer Last mg zugehörigen Durchbiegung

Fig. 67.



$$22) \qquad f = \frac{mg \cdot l^3}{3\,EJ} = e$$

(2. Theil, S. 43, Gl. 7) tiefer als A, wenn l die Länge des Stabes, J das Trägheitsmoment seines Querschnitts. Die Schwingungsdauer entspricht einer Pendellänge f.

Kommt die Masse etwa durch einen nach unten gerichteten Schlag aus der Gleichgewichtslage, so ist die halbe Schwingungsweite a nach Gl. 17 von der dem Massenpunkte durch den Schlag ertheilten Geschwindigkeit c abhängig. Wird nun der Schlag nach einer oder nach mehreren Doppelschwingungen, d. h. in Zwischenzeiten $2\,t_1$, $4\,t_1$ oder allgemein $2\,n t_1$ wiederholt (worin n eine Ganzzahl bedeutet), so entsteht dadurch jedes Mal eine Vergrösserung der Geschwindigkeit c und in Folge dessen auch der stärksten Durchbiegung und Spannung. Solche Wiederholung von Schlägen oder Stössen kann also einen in elastischen Schwingungen befindlichen Stab zum Bruche führen. Aus diesem Grunde können Brückenträger, für welche die Dauer einer einfachen Schwingung t_1 beträgt, gefährdet werden, wenn Menschen in gebundenem Schritt über die Brücke marschiren und die Dauer eines Schrittes ein ganzes Vielfaches von $2\,t_1$ beträgt. Auch die Stösse eines Eisenbahnzuges erfolgen in einem gewissen Takte; daher spricht man von einer „kritischen“ Geschwindigkeit eines Zuges in Bezug auf eine Brücke. Wiederholen sich aber die Stösse in der Zwischenzeit t_1, der Dauer einer einfachen Schwingung, so hebt jeder zweite Stoss die Wirkung des ersten wieder auf, so dass gefährliche Schwingungen weniger leicht zu erwarten sind.

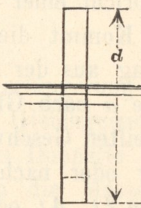
b) Lothrechte Schwingung schwimmender Körper.

Ein prismatischer Stab von dem Querschnitt F und der Länge d (Fig. 67) sei am unteren Ende derartig beschwert, dass er, um die

Länge h in Wasser eingetaucht, in lothrechter Schwimmlage im Gleichgewicht ist. Dann heben sich an dem Stabe das Gewicht mg und der Auftrieb $A = \gamma F h$ (vergl. 2. Theil, S. 184) auf, wenn γ das Gewicht der Kubikeinheit des Wassers. Beträgt die eingetauchte Länge des Stabes x, so hat der Auftrieb die Grösse $K = \gamma \cdot F \cdot x$, ist also eine mit der Tiefe x des unteren Stabendes unter dem Wasserspiegel verhältnisgleiche Kraft. Unter Vernachlässigung der Bewegungswiderstände des Stabes im Wasser kann man die Sätze S. 58 auf die Bewegung des Stabschwerpunktes anwenden.

Wenn das untere Ende des Stabes den Wasserspiegel eben berührt, befindet sich der Stabschwerpunkt in der Lage, die dem Werthe Null der Kraft K entspricht. Ruhig schwimmend, liegt der Stab um h tiefer als in der eben genannten Lage für $K = 0$; es ist daher die S. 58 eingeführte Grösse e hier

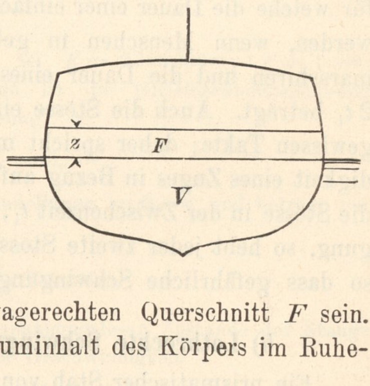
Fig. 68.



23) $$e = h.$$

Wird der Stab durch einen leichten Stoss aus der Ruhelage gebracht, so schwingt er um die Gleichgewichtslage als Mitte, und die Dauer einer einfachen Schwingung entspricht einer Pendellänge, gleich der Eintauchungstiefe h im Ruhezustande. Es darf nur die Bewegung nicht so bedeutend sein, dass der Stab ganz unter Wasser oder ganz aus dem Wasser komme, denn in beiden Fällen verschwindet die Veränderlichkeit des Auftriebes K.

Fig, 69.



Obige Betrachtungen bleiben auch gültig, wenn der eingetauchte Körper nicht prismatisch ist; es muss nur derjenige Theil des schwimmenden Körpers, der bei der Schwingung durch die Wasserspiegelebene hindurch geht, ein lothrechtes Prisma von dem wagerechten Querschnitt F sein. Nennt man V den eingetauchten Rauminhalt des Körpers im Ruhezustande, so dass

24) $$\gamma V = mg,$$

so vergrössert sich in Folge einer Vermehrung der Eintauchung um z der Auftrieb um $\gamma F z$. Dies ist also die Kraft, welche den Körper in die Gleichgewichtslage zurückzuführen strebt und ihm eine Beschleunigung

$$p = -\frac{\gamma F z}{m} = -k^2 z$$

(Gl. 14) ertheilt. Dann ist

$$k^2 = \frac{\gamma F}{m} = \frac{\gamma F g}{m g} = \frac{\gamma F g}{\gamma V}$$

(nach Gl. 24), mithin $k^2 = \frac{F}{V} g$ und

25) $$t_1 = \frac{\pi}{k} = \pi \sqrt{\frac{V}{F g}}.$$

Die Schwingungslänge wird also nach Gl. 16 hier allgemein

26) $$e = \frac{V}{F},$$

anstatt des besonderen Werthes h bei prismatischen Körpern.

c) Eintauchen eines ins Wasser fallenden lothrechten Stabes.

Lässt man einen prismatischen Stab vom Querschnitt F, der Länge d, dem Gewichte mg, dessen unteres Ende zu Anfang um h_1 über Wasser liegt, hinabfallen (Fig. 70), so kann die Tiefe y, bis zu welcher er überhaupt einsinkt, am einfachsten mittels des Satzes vom Arbeitsvermögen (1. Theil, S. 266) berechnet werden. Längs des Weges h_1 erfolgt eine gleichförmig beschleunigte Fallbewegung, längs des weiteren Weges y eine Bewegung unter Einwirkung eines veränderlichen Auftriebs, d. h. nach den auf S. 53 u. ff. gegebenen Regeln, und schliesslich ist die Aufwärtsbewegung der Abwärtsbewegung symmetrisch. Bei der Berechnung der Arbeit braucht man aber auf die Einzelheiten der Bewegung nicht einzugehen. Einer Eintauchung y entspricht ein

Fig. 70.