Zweite Abtheilung.

Mechanik des Massenpunktes.

A. Geradlinige Bewegung des Massenpunktes.

Nach 1. Theil, S. 32 ertheilt eine Kraft K einem Massenpunkt m die Beschleunigung

$$p = \frac{K}{m}$$

in der Richtung und im Sinne der Kraft K. Da bei geradliniger Bewegung nach S. 2 die Richtung der Beschleunigung mit der Richtung der Geschwindigkeit zusammenfällt, so muss auch die Richtung der wirkenden Kraft stets mit der Richtung der Geschwindigkeit übereinstimmen, damit eine geradlinige Bewegung entstehe.

Wir betrachten hier im Wesentlichen Bewegungen unter Wirkung veränderlicher Kräfte. Um aus der gegebenen Kraft und der daraus unmittelbar bestimmten Beschleunigung p die Geschwindigkeit v und den Abstand x des Massenpunktes von einem Festpunkt A seiner Bahnlinie zu finden, müssen Integrationen ausgeführt werden. Der einzuschlagende Weg der Rechnung ist abhängig von der Art der Veränderlichkeit der gegebenen Kraft.

1. Ist K eine Funktion der Zeit, also $K : m = p = F(t)$, so wird nach S. 2

$$dv = p \cdot dt = F(t) \cdot dt \quad \text{und}$$

$$v = \int F(t) \cdot dt + C, \quad \text{wofür}$$

$$v = \varphi(t)$$

geschrieben werden möge.

Daraus folgt weiter nach S. 1

$$dx = v \cdot dt = \varphi(t) \cdot dt \quad \text{und}$$

$$x = \int \varphi(t)\, dt + C_1, \quad \text{oder}$$

$$x = f(t)$$

als gesuchtes Bewegungsgesetz.

2. Ist K eine Funktion des Ortes des Massenpunktes, also

$$K : m = p = F(x), \quad \text{so wird}$$

$$dv = p \cdot dt = F(x) \cdot dt.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad \text{so entsteht}$$

$$v\,dv = F(x) \cdot dx \quad \text{und}$$

$$v^2 = 2 \int F(x) \cdot dx + C \quad \text{oder}$$

$$v = \varphi(x). \quad \text{Daraus folgt weiter}$$

$$dx = v \cdot dt = \varphi(x) \cdot dt.$$

In dieser Gleichung muss man behufs der Integration die Veränderlichen trennen, d. h. alles mit x behaftete auf einer Seite vereinigen. Dann wird

$$dt = \frac{dx}{\varphi(x)} \quad \text{und}$$

$$t = \int \frac{dx}{\varphi(x)} + C = \psi(x),$$

hiermit hat man t als Funktion von x, woraus in vielen Fällen

$$x = f(t)$$

als Bewegungsgesetz entwickelt werden kann.

3. Ist die Kraft K eine Funktion der Geschwindigkeit, also

$$K : m = p = F(v), \quad \text{so wird}$$

$$dv = p \cdot dt = F(v) \cdot dt$$

und nach Trennung der Veränderlichen

$$dt = \frac{dv}{F(v)}.$$

Daraus $$t = \int \frac{dv}{F(v)} + C = \varphi(v).$$

Die Entwickelung dieser Gleichung nach v liefert $v = \psi(t)$. Dann wird

$$dx = v \cdot dt = \psi(t) \cdot dt,$$

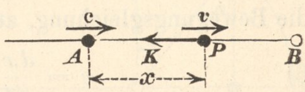
woraus sich $\qquad x = \int \psi(t) \cdot dt + C_1 = f(t)$ ergiebt.

Die folgenden Untersuchungen liefern Beispiele zu diesen allgemeinen Andeutungen. Der Fall, dass die Kraft als Funktion der Zeit gegeben sei, ist ausserordentlich einfach, kommt aber in der Anwendung kaum vor. Daher gehen wir sogleich zu einem Falle der zweiten Art über.

1. Geradlinige Schwingung eines Massenpunktes.

Ein Massenpunkt m stehe unter Einwirkung einer von einem festen Punkt A ausgehenden Anziehungskraft, welche stets das Bestreben hat, ihn nach A hinzuziehen (Fig. 60). Diese Anziehungskraft K sei verhältnisgleich mit dem Abstand x des Massenpunktes m von dem Festpunkt A. Befindet sich der Massenpunkt in A, so hat die Kraft den Werth Null, es ist daher A die Gleichgewichtslage des Massenpunktes. In ihr befinde sich der Massenpunkt zu Anfang, erfahre nun aber, etwa durch einen Stoss, eine Anfangsgeschwindigkeit c, die ihn aus der Gleichgewichtslage A entfernt. Dann wirkt auf ihn in derselben Richtung, aber in entgegengesetztem Sinne, die Kraft K, so dass die Bewegung eine geradlinige werden muss. Da K mit x verhältnisgleich ist, so kann man die Beschleunigung setzen

Fig. 60.



$$1) \qquad p = -\frac{K}{m} = -k^2 x.$$

Dann bedeutet k^2 die absolute Grösse der Beschleunigung im Abstande $= 1$ von der Gleichgewichtslage, und man erhält

$$2) \qquad \frac{dv}{dt} = -k^2 \cdot x;$$

multiplicirt man mit $v\,dt = dx$, so wird

$$v\,dv = -k^2 x\,dx, \text{ also}$$
$$v^2 = -k^2 x^2 + C$$

und weil $v = c$ war, für $x = 0$:

3) $$\boldsymbol{v = \sqrt{c^2 - k^2 x^2}.}$$

Setzt man nun $v = \frac{dx}{dt}$, so wird

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{c^2 - k^2 x^2}} = \frac{1}{k}\frac{dx}{\sqrt{\frac{c^2}{k^2} - x^2}} = \frac{1}{k}\frac{d\left(\frac{k}{c}x\right)}{\sqrt{1 - \frac{k^2}{c^2}x^2}};$$

dies giebt

4) $$t = \frac{1}{k}\arcsin\frac{kx}{c} + C_1$$

(mit $C_1 = 0$, weil $x = 0$ für $t = 0$). Hiernach ist

5) $$\boldsymbol{x = \frac{c}{k}\sin kt}$$

die Bewegungsgleichung, aus der noch die Geschwindigkeitsgleichung

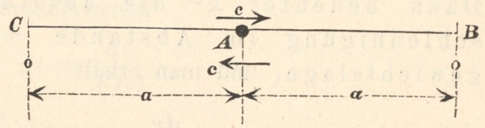
6) $$v = \frac{dx}{dt} = c \cdot \cos kt \quad \text{entsteht.}$$

Für	$t = 0$	$\frac{\pi}{2k}$	$\frac{\pi}{k}$	$\frac{3}{2}\frac{\pi}{k}$	$\frac{2\pi}{k}$	
wird	$x = 0$	$\frac{c}{k}$	0	$-\frac{c}{k}$	0	
und	$v = c$	0	$-c$	0	c	
(Punkt	A	B	A	C	A	Fig. 61).

$$x = \frac{c}{k} \quad \text{und} \quad x = -\frac{c}{k}$$

sind grösste und kleinste Werthe von x; nach einer Zunahme der Zeit um je $\frac{2\pi}{k}$, d. h. nach einer Zunahme der Grösse kt um je 2π kehren in den periodischen Funktionen der Gl. 5 und 6 stets die gleichen Werthe wieder.

Fig. 61.



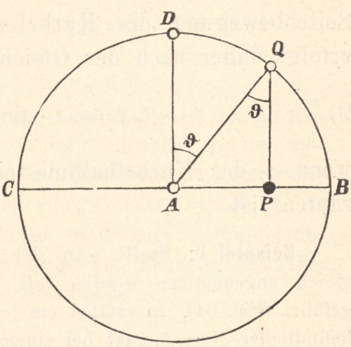
Während der Zeit $\frac{2\pi}{k}$ wird die Bahnlinie BC von dem Massenpunkte hin und her durchlaufen. Eine solche Bewegung nennt man eine Schwingungsbewegung. Der Massenpunkt schwingt um die Gleichgewichtslage als Mitte; es ist $\frac{2\pi}{k}$ die Zeit einer Doppelschwingung,

7) $$t_1 = \frac{\pi}{k}$$

die Dauer einer einfachen Schwingung.

Die Schwingungsdauer ist nach Gl. 7 nur von der Beschleunigungsgrösse k^2 (im Abstande gleich Eins) abhängig; die Geschwindigkeit c, mit welcher der Massenpunkt durch die Gleichgewichtslage geht, beeinflusst nur die halbe Schwingungsweite a; diese wird für $t = \frac{\pi}{2k}$ nach Gl. 5

Fig. 62.



8) $$a = \frac{c}{k}.$$

Solche Schwingungsbewegung kann man sehr einfach zur Darstellung bringen, wenn man einen Punkt mit gleichbleibender Geschwindigkeit c in einem Kreisumfange vom Halbmesser $a = c : k$ führt und diese Bewegung auf einen Durchmesser projicirt. Beginnt die Bewegung in D, so ist $DQ = ct$, daher

$$\sphericalangle DAQ = \sphericalangle AQP = ct : a = kt,$$

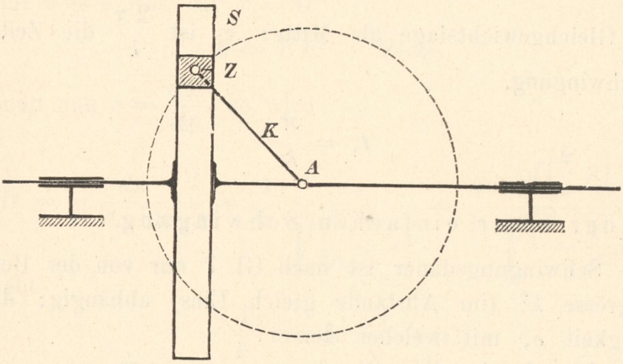
$$AP = x = a \sin kt,$$

d. h. mit Gl. 5 übereinstimmend.

Eine solche Projektionsbewegung einer Kreisbewegung kommt vor bei der **Kurbelschleife** (Fig. 63). Dreht sich die Kurbel K gleichmässig um die Achse A, so gleitet der auf den Kurbelzapfen Z

gesteckte würfelförmige „Stein“ in dem Schlitze der wagerecht geführten Kurbelschleife S und überträgt auf sie nur die wagerechte

Fig. 63.



Seitenbewegung des Kurbelzapfens. Die Bewegung der Schleife erfolgt daher nach der Gleichung

9) $$x = a \cdot \sin kt = a \cdot \sin \frac{c \cdot t}{a},$$

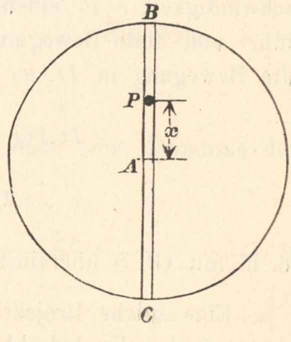
wenn a der Kurbelhalbmesser, c die Geschwindigkeit des Kurbelzapfens ist.

Beispiel 1: Stellt man sich vor, durch die Erde, deren Dichte überall gleich angenommen werden soll, sei längs eines Durchmessers eine Röhre geführt (Fig. 64), so erfährt ein in der Röhre befindlicher Massenpunkt bei einem Abstand x vom Erdmittelpunkt A nach 1. Theil, S. 58, Gl. 7, eine Fallbeschleunigung

$$g_x = g \frac{x}{r},$$

wenn r der Erdhalbmesser und g die Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche ist. Da die nach dem Punkt A gerichtete Anziehungskraft mit x verhältnisgleich, so ist die Bedingung der Schwingung nach Gl. 5 erfüllt. Für $x = 1$ wird

Fig. 64.



$$g_x = \frac{g}{r} = k^2, \text{ daher ist}$$

10) $$k = \sqrt{\frac{g}{r}}.$$

Hatte nun der Massenpunkt an der Stelle B die Geschwindigkeit Null, so ist nach Gl. 8

$$AB = r = a = \frac{c}{k} = c\sqrt{\frac{r}{g}}$$

die halbe Schwingungsweite, woraus

11) $$c = \sqrt{g\,r}$$

folgt als Geschwindigkeit, mit welcher der Massenpunkt die Gleichgewichtslage A durchläuft. Der Massenpunkt langt bei C mit der Geschwindigkeit Null an, kehrt nach B zurück und wiederholt diese Bewegungen fortgesetzt. Das einmalige Durchlaufen des Durchmessers erfordert die Zeit

12) $$t_1 = \frac{\pi}{k} = \pi\sqrt{\frac{r}{g}};$$

es ist dies die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels von der Schwingungslänge r (Erdhalbmesser) bei kleiner Schwingungsweite (s. 1. Theil, S. 78).

Mit $r = 6\,370\,000^{\text{m}}$ und $g = 9{,}81\,^{\text{m}}/_{\text{s.}^2}$ wird

$$t_1 = \pi\sqrt{\frac{6\,370\,000}{9{,}81}} = 2532^{\text{s.}} = 42{,}2^{\text{min.}};$$

$$c = \sqrt{9{,}81 \cdot 6\,370\,000} = 7905\,^{\text{m}}/_{\text{s.}}$$

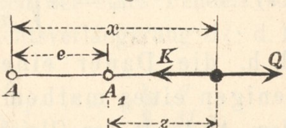
Würde man einen zweiten Punkt mit dieser Geschwindigkeit um die Erde führen, so würde er stets in derselben Zeit in B und C eintreffen wie der erste, den Durchmesser BC durchschwingende Punkt. Übrigens braucht dieser zweite Punkt nicht einmal geführt zu werden, vielmehr wird er, bei B mit der wagerechten Geschwindigkeit $c = \sqrt{g\,r}$ versehen, wenn kein Luftwiderstand auftritt, die Erde frei umkreisen, ohne einen Druck auf die Erde auszuüben, weil die Schwere mg allein zur Centripetalbeschleunigung

$$p_n = \frac{c^2}{r} = \frac{g\,r}{r} = g.$$

verbraucht wird.

Hinzutreten einer unveränderlichen Kraft. In den meisten Fällen, wo Schwingungsbewegungen auftreten, wirkt ausser der veränderlichen Kraft K noch eine unveränderliche Kraft Q, gewöhnlich das Gewicht des Massenpunktes. Es lässt sich zeigen, dass deren Hinzukommen die Grundeigenschaften der Bewegung nicht erheblich ändert.

Fig. 65.



Ist (Fig. 65) A der Ausgangspunkt (Nullpunkt) der veränderlichen Kraft $K = m \cdot k^2 \cdot x$, von welchem aus x gemessen wird, und tritt nun vielleicht in entgegengesetztem

Sinne die Kraft Q hinzu, so wird die Mittelkraft $= m \cdot k^2 x - Q$. Diese wird Null für

13) $$x = \frac{Q}{m k^2} = e = A A_1,$$

d. h. die Stelle A_1 ist jetzt die Gleichgewichtslage. Nennt man $z = x - e$ den Abstand des Massenpunktes von A_1, so wird unter Einsetzung von $x = z + e$ die Mittelkraft nunmehr

$$m \cdot k^2 (z + e) - Q = m \cdot k^2 (z + e) - m \cdot k^2 e = m \cdot k^2 z,$$

weil nach Gl. 13 $Q = m k^2 e$ ist. Diese Mittelkraft ist nach der Gleichgewichtslage gerichtet und ertheilt dem Massenpunkt eine Beschleunigung

14) $$p = - k^2 z$$

im Sinne des wachsenden z. Hierin bedeutet k^2 die absolute Beschleunigungsgrösse im Abstande $= 1$ von der Gleichgewichtslage. Die Vergleichung mit Gl. 1 (S. 53) zeigt nur eine Vertauschung des Buchstaben x mit z; beide bedeuten aber den Abstand des Massenpunktes von der Gleichgewichtslage. Bezeichnet daher wieder

c die Geschwindigkeit in der Gleichgewichtslage,

a die halbe Schwingungsweite,

t_1 die Dauer einer einfachen Schwingung,

so gilt nach Gl. 7 u. 8:

15) $$t_1 = \frac{\pi}{k}; \quad a = \frac{c}{k}; \quad c = k a.$$

Ist die unveränderliche Kraft Q die Schwerkraft mg, so wird nach Gl. 13

16) $$e = \frac{g}{k^2}, \quad \text{also} \quad k^2 = \frac{g}{e}, \quad \text{mithin}$$

17) $$t_1 = \pi \sqrt{\frac{e}{g}}; \quad a = c \sqrt{\frac{e}{g}}; \quad c = a \sqrt{\frac{g}{e}},$$

d. h. die Dauer einer Schwingung ist nun gleich derjenigen eines mathematischen Pendels von der Länge $e =$ dem Abstande der Gleichgewichtslage von dem Nullpunkte der veränderlichen Kraft $=$ der Verschiebung der Gleichgewichtslage in Folge des Hinzutretens der Kraft $Q = mg$.

Vorstehende Entwickelungen finden auf die meisten elastischen (Feder-) Schwingungen Anwendung, wenn man die eigene Masse des elastischen Körpers gegenüber der angehängten Masse vernachlässsigen darf.

a) Schwingungen in Folge elastischer Aufhängung.

Hängt an einer lothrechten elastischen Stange (Fig. 66) vom Querschnitt F, der Länge l in (spannungslosem Zustande) und dem Elasticitätsmafs E eine Masse m, so bewirkt deren Gewicht mg eine Gleichgewichtsverlängerung

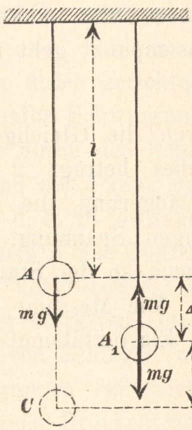
$$\Delta l = \frac{l}{E} \frac{mg}{F}$$

(2. Theil, S. 5), während eine Verlängerung um x, verbunden mit einer gleichen Verschiebung des Punktes m aus der Lage A nach unten eine Spannkraft

$$K = \frac{EF}{l} x$$

hervorbringt. Die Kraft K entspricht also der Gl. 1 (S. 53); es ist A der Nullpunkt der veränderlichen Kraft. Für $x = \Delta l$ heben sich K und mg auf, daher ist

Fig. 66.



18) $$e = \Delta l$$

die Verschiebung der Gleichgewichtslage A_1 des Punktes von dem Nullpunkt A der Spannkraft. Wird also der elastisch aufgehängte Punkt m etwa durch einen Stoss oder Schlag derartig in Bewegung gesetzt, dass er mit einer lothrechten Geschwindigkeit c durch die Gleichgewichtslage A_1 geht, so führt er Schwingungen um die Gleichgewichtslage aus, deren Dauer gleich der eines Pendels von einer Schwingungslänge = der Gleichgewichtsverlängerung Δl; d. h.

19) $$t_1 = \pi \sqrt{\frac{\Delta l}{g}}; \quad \text{ferner} \quad a = c\sqrt{\frac{\Delta l}{g}}; \quad c = a\sqrt{\frac{g}{\Delta l}}.$$

Ob die Schwingungslänge $2a$ gross oder klein, hat auf t_1 keinen Einfluss, sofern nur die Gleichung für die Spannkraft

$K = \frac{E \cdot F}{l} x$ gültig bleibt; es darf also der Stab nicht über die Proportionalitätsgrenze verlängert werden; auch darf der Stab bei der Aufwärtsbewegung sich nicht ausbiegen. Solange die halbe Schwingungsweite $a \leq \Delta l$ ist, wird der Stab nur Zugkräfte auszuhalten haben. Ist aber gerade $a = \Delta l$, so fällt die höchste Lage des Punktes m mit A zusammen, wobei der Stab eben spannungslos wird.

Dieser Fall tritt ein, wenn die Masse m mit der spannungslosen Stange verbunden und plötzlich losgelassen wird. Dann hat m zu Anfang die Geschwindigkeit Null, die Beschleunigung g nach unten. Es fällt die obere Grenzlage des Punktes mit A zusammen, während die andere Grenzlage C um $2a = 2 \cdot \Delta l$ tiefer liegt. Der Massenpunkt geht mit der Geschwindigkeit

20) $$c = \sqrt{\Delta l \cdot g}$$

durch die Gleichgewichtslage A_1. Die stärkste Verlängerung des Stabes beträgt $2 \cdot \Delta l$, d. h. das Doppelte der Gleichgewichtsverlängerung, die stärkste Spannung also auch das Doppelte derjenigen Spannung, welche entstehen würde, wenn die Masse m ruhend an der Stange hinge. (Vgl. 2. Theil, S. 106.)

Die Messung der Schwingungsdauer t_1 kann zur Bestimmung des Elasticitätsmafses E benutzt werden. Denn es ist (Gl. 19)

$$\Delta l = \frac{l}{E} \frac{mg}{F} = g \frac{t_1^2}{\pi^2}, \quad \text{also}$$

21) $$E = \frac{\pi^2}{t_1^2} \frac{mg \cdot l}{gF}.$$

Beispiel 2: Für einen Stahlstab sei $E = 2\,500\,000^{\text{at}}$; $F = 1^{\text{qcm}}$; $l = 5^{\text{m}} = 500^{\text{cm}}$; $mg = 1000^{\text{kg}}$. Dann ist die Gleichgewichtsspannung $\sigma_0 = 1000^{\text{at}}$, die entsprechende Verlängerung

$$\Delta l = \frac{1000 \cdot 500}{2\,500\,000} = 0{,}2^{\text{cm}}.$$

Die Schwingungsdauer entspricht einer Pendellänge $= 0{,}2^{\text{cm}}$ und beträgt mit $g = 981^{\text{cm}/\text{s}^2}$

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{0{,}2}{981}} = \frac{1}{22} \text{ Sekunden.}$$

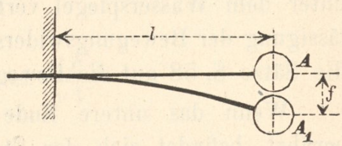
Beginnt die Bewegung bei A, dem spannungslosen Zustande der Stange entsprechend, so geht die Masse m mit der Geschwindigkeit

$$c = \sqrt{0{,}2 \cdot 981} = 14^{\text{cm}/\text{s}}.$$

durch die Gleichgewichtslage A_1.

Querschwingungen. Annähernd gelten die Gl. 15—17 auch, wenn ein leichter elastischer Stab durch die daran befestigte Masse m nach Fig. 67 in Biegungsspannungen versetzt wird, weil innerhalb der Elasticitätsgrenze die Durchbiegung verhältnisgleich mit der biegenden Kraft wächst. Die Lage A entspricht dem spannungslosen Zustande des Stabes. Die Gleichgewichtslage A_1 befindet sich um das Mafs der einer Last mg zugehörigen Durchbiegung

Fig. 67.



$$22)\qquad f = \frac{mg \cdot l^3}{3\,EJ} = e$$

(2. Theil, S. 43, Gl. 7) tiefer als A, wenn l die Länge des Stabes, J das Trägheitsmoment seines Querschnitts. Die Schwingungsdauer entspricht einer Pendellänge f.

Kommt die Masse etwa durch einen nach unten gerichteten Schlag aus der Gleichgewichtslage, so ist die halbe Schwingungsweite a nach Gl. 17 von der dem Massenpunkte durch den Schlag ertheilten Geschwindigkeit c abhängig. Wird nun der Schlag nach einer oder nach mehreren Doppelschwingungen, d. h. in Zwischenzeiten $2\,t_1$, $4\,t_1$ oder allgemein $2\,n\,t_1$ wiederholt (worin n eine Ganzzahl bedeutet), so entsteht dadurch jedes Mal eine Vergrösserung der Geschwindigkeit c und in Folge dessen auch der stärksten Durchbiegung und Spannung. Solche Wiederholung von Schlägen oder Stössen kann also einen in elastischen Schwingungen befindlichen Stab zum Bruche führen. Aus diesem Grunde können Brückenträger, für welche die Dauer einer einfachen Schwingung t_1 beträgt, gefährdet werden, wenn Menschen in gebundenem Schritt über die Brücke marschiren und die Dauer eines Schrittes ein ganzes Vielfaches von $2\,t_1$ beträgt. Auch die Stösse eines Eisenbahnzuges erfolgen in einem gewissen Takte; daher spricht man von einer „kritischen“ Geschwindigkeit eines Zuges in Bezug auf eine Brücke. Wiederholen sich aber die Stösse in der Zwischenzeit t_1, der Dauer einer einfachen Schwingung, so hebt jeder zweite Stoss die Wirkung des ersten wieder auf, so dass gefährliche Schwingungen weniger leicht zu erwarten sind.

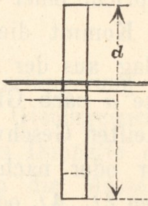
b) Lothrechte Schwingung schwimmender Körper.

Ein prismatischer Stab von dem Querschnitt F und der Länge d (Fig. 67) sei am unteren Ende derartig beschwert, dass er, um die

Länge h in Wasser eingetaucht, in lothrechter Schwimmlage im Gleichgewicht ist. Dann heben sich an dem Stabe das Gewicht mg und der Auftrieb $A = \gamma Fh$ (vergl. 2. Theil, S. 184) auf, wenn γ das Gewicht der Kubikeinheit des Wassers. Beträgt die eingetauchte Länge des Stabes x, so hat der Auftrieb die Grösse $K = \gamma \cdot F \cdot x$, ist also eine mit der Tiefe x des unteren Stabendes unter dem Wasserspiegel verhältnisgleiche Kraft. Unter Vernachlässigung der Bewegungswiderstände des Stabes im Wasser kann man die Sätze S. 58 auf die Bewegung des Stabschwerpunktes anwenden.

Wenn das untere Ende des Stabes den Wasserspiegel eben berührt, befindet sich der Stabschwerpunkt in der Lage, die dem Werthe Null der Kraft K entspricht. Ruhig schwimmend, liegt der Stab um h tiefer als in der eben genannten Lage für $K = 0$; es ist daher die S. 58 eingeführte Grösse e hier

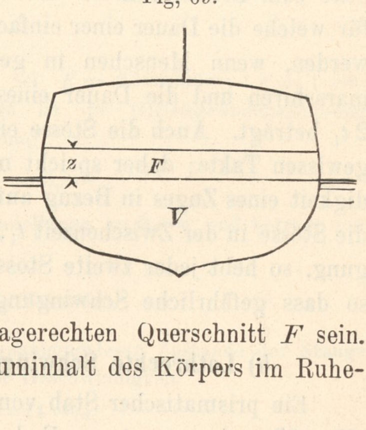
Fig. 68.



23) $$e = h.$$

Wird der Stab durch einen leichten Stoss aus der Ruhelage gebracht, so schwingt er um die Gleichgewichtslage als Mitte, und die Dauer einer einfachen Schwingung entspricht einer Pendellänge, gleich der Eintauchungstiefe h im Ruhezustande. Es darf nur die Bewegung nicht so bedeutend sein, dass der Stab ganz unter Wasser oder ganz aus dem Wasser komme, denn in beiden Fällen verschwindet die Veränderlichkeit des Auftriebes K.

Fig, 69.



Obige Betrachtungen bleiben auch gültig, wenn der eingetauchte Körper nicht prismatisch ist; es muss nur derjenige Theil des schwimmenden Körpers, der bei der Schwingung durch die Wasserspiegelebene hindurch geht, ein lothrechtes Prisma von dem wagerechten Querschnitt F sein. Nennt man V den eingetauchten Rauminhalt des Körpers im Ruhezustande, so dass

24) $$\gamma V = mg,$$

so vergrössert sich in Folge einer Vermehrung der Eintauchung um z der Auftrieb um $\gamma F z$. Dies ist also die Kraft, welche den Körper in die Gleichgewichtslage zurückzuführen strebt und ihm eine Beschleunigung

$$p = -\frac{\gamma F z}{m} = -k^2 z$$

(Gl. 14) ertheilt. Dann ist

$$k^2 = \frac{\gamma F}{m} = \frac{\gamma F g}{m g} = \frac{\gamma F g}{\gamma V}$$

(nach Gl. 24), mithin $k^2 = \frac{F}{V} g$ und

25) $$t_1 = \frac{\pi}{k} = \pi \sqrt{\frac{V}{F g}}.$$

Die Schwingungslänge wird also nach Gl. 16 hier allgemein

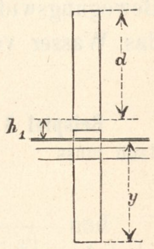
26) $$e = \frac{V}{F},$$

anstatt des besonderen Werthes h bei prismatischen Körpern.

c) Eintauchen eines ins Wasser fallenden lothrechten Stabes.

Lässt man einen prismatischen Stab vom Querschnitt F, der Länge d, dem Gewichte mg, dessen unteres Ende zu Anfang um h_1 über Wasser liegt, hinabfallen (Fig. 70), so kann die Tiefe y, bis zu welcher er überhaupt einsinkt, am einfachsten mittels des Satzes vom Arbeitsvermögen (1. Theil, S. 266) berechnet werden. Längs des Weges h_1 erfolgt eine gleichförmig beschleunigte Fallbewegung, längs des weiteren Weges y eine Bewegung unter Einwirkung eines veränderlichen Auftriebs, d. h. nach den auf S. 53 u. ff. gegebenen Regeln, und schliesslich ist die Aufwärtsbewegung der Abwärtsbewegung symmetrisch. Bei der Berechnung der Arbeit braucht man aber auf die Einzelheiten der Bewegung nicht einzugehen. Einer Eintauchung y entspricht ein

Fig. 70.



Auftrieb $K = \gamma F y$, und die Arbeit dieser veränderlichen Kraft beträgt bis zu einer Eintauchung y:

$$27)\qquad \mathfrak{A} = -\int_0^y K\,dy = -\tfrac{1}{2}\gamma F y^2.$$

Da nun in der höchsten und in der tiefsten Lage die Geschwindigkeit des Stabes Null ist, so muss die Gesammtarbeit der Schwere und des Auftriebs auch Null sein, daher

$$mg(h_1 + y) = \tfrac{1}{2}\gamma F y^2.$$

Bezeichnet man wieder die Eintauchungstiefe im Gleichgewichte mit h, so ist

$$mg = \gamma \cdot F \cdot h \quad \text{und}$$

$$2h(h_1 + y) = y^2; \quad \text{dies giebt}$$

$$28)\qquad y = h\left(1 \pm \sqrt{1 + 2\frac{h_1}{h}}\right).$$

von den doppelten Vorzeichen ist hier nur das Zeichen $+$ verwendbar. Diese Gleichung ist aber nur gültig, solange $y \leqq d$ bleibt, weil für $y > d$ der Auftrieb nicht mehr veränderlich sein würde. Demnach muss die Höhe des freien Falles

$$29)\qquad h_1 \leqq \left(\frac{d}{2h} - 1\right) d$$

sein. Dies ist nur möglich für $d > 2h$. Hierbei sind freilich die Bewegungswiderstände und der Arbeitsverlust beim Aufschlagen auf das Wasser vernachlässigt.

Beispiel 3: Es sei $d = 1^{\text{m}}$, die Gleichgewichtseintauchung $h = 0{,}4^{\text{m}}$, dann muss

$$h_1 \leqq \frac{d}{4}, \quad \text{d. h.} \quad h_1 \leqq 0{,}25^{\text{m}}$$

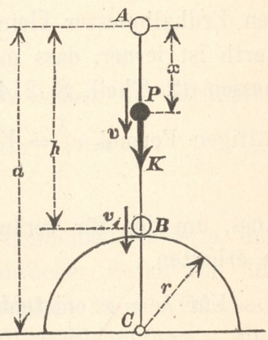
sein. Lässt man nun den Stab aus der Höhe $h_1 = 0{,}2^{\text{m}}$ fallen, so beträgt die stärkste Eintauchung

$$y = 0{,}4\left(1 + \sqrt{1+1}\right) = 0{,}966^{\text{m}}.$$

2. Fall eines Massenpunktes aus sehr grosser Höhe ohne Rücksicht auf den Luftwiderstand.

Fällt der Massenpunkt aus so grosser Höhe, dass die Fallbeschleunigung nicht mehr als konstant angesehen werden kann, so hat man für dieselbe

Fig. 71.



1) $$g_x = g \frac{r^2}{(a - x)^2}$$

zu setzen (1. Theil, S. 57), wenn g die Fallbeschleunigung $= 9{,}81$ an der Erdoberfläche, r der Erdhalbmesser, $a - x$ die augenblickliche Entfernung des Massenpunktes von dem Erdmittelpunkte C (Fig. 71). (Der Kreis im unteren Theile der Figur soll die Erde andeuten.) Die Bewegung beginne bei A in der Höhe h über der Erdoberfläche, im Abstand $a = h + r$ vom Mittelpunkte der Erde, mit der Geschwindigkeit Null. Nach t Sekunden habe der Punkt x Meter zurückgelegt, habe die Geschwindigkeit v und befinde sich bei P; dann ist nach Gl. 1

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g r^2}{(a - x)^2};$$

dies giebt, mit $v\,dt = dx$ multiplicirt:

$$v\,dv = g r^2 \frac{dx}{(a - x)^2} = - g r^2 \frac{d(a - x)}{(a - x)^2};$$

mithin ist $$\frac{v^2}{2} = \frac{g r^2}{a - x} + C$$

und wegen $v = 0$ für $x = 0$:

$$0 = \frac{g r^2}{a} + C, \quad \text{also}$$

$$v^2 = 2 g r^2 \left(\frac{1}{a - x} - \frac{1}{a} \right) = 2 g r^2 \frac{x}{a(a - x)} \quad \text{und}$$

2) $$v = r \sqrt{\frac{2 g x}{a(a - x)}}.$$

Für $x = h$, $a = r + h$ und $a - x = r$ wird v zur Endgeschwindigkeit v_1, mit der der Punkt bei B an der Erdoberfläche anlangt, nämlich

3) $$v_1 = r\sqrt{\frac{2gh}{(r+h)r}} = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{h}{r}}}.$$

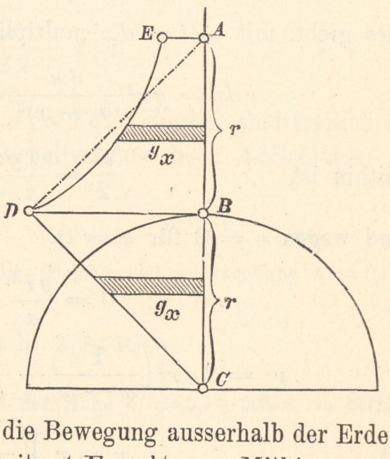
Hieraus ist zu ersehen, dass man, sobald die Fallhöhe h gegen den Erdhalbmesser klein ist, $v_1 = \sqrt{2gh}$ setzen darf. Bemerkenswerth ist ferner, dass man, ebenso wie beim barometrischen Höhenmessen (2. Theil, S. 214), in der für konstante Fallbeschleunigung gültigen Formel $v_1 = \sqrt{2gh}$ die Fallhöhe h durch $\dfrac{h}{1+\frac{h}{r}}$ ersetzen muss, um den für veränderliche Fallbeschleunigung gültigen Werth zu erhalten.

Für $h = r$ entsteht aus Gl. 3

4) $$v_1 = \sqrt{gr}.$$

Die gleiche Geschwindigkeit würde sich auch ergeben, wenn der Massenpunkt die Strecke $BC = r$ (Fig. 72) im Innern der homogen gedachten Erde zurücklegte (siehe S. 57, Gl. 11). Daraus folgt, dass auch die Arbeiten der Schwerkraft längs dieser beiden Wege AB und BC gleich sein müssen. Die auf die Masseneinheit kommende Schwerkraftarbeit ist aber offenbar $\int g_x \cdot dx$, d. h. gleich der der durchfallenen Höhe entsprechenden Fläche derjenigen Kurve, welche das veränderliche g_x darstellt. Für das Innere der Erde ist nach dem 1. Theile, S. 58 die Darstellung von g_x eine Gerade CD mit $BD = g = 9{,}81$, für die Bewegung ausserhalb der Erde eine hyperbelartige Kurve DE mit $AE = \frac{1}{4}g$. Mithin muss

Fig. 72.



$BCD = ABDE$, also auch $ABDE = ABD = {}^1/_2\, g r$ sein. Die Nachrechnung ergiebt auch mit $g_x = \frac{g r^2}{(a-x)^2}$ und $a = 2r$

5) $$\int_{x=0}^{x=r} g_x\, dx = \frac{g r}{2}.$$

Schreibt man Gl. 3 in der Form

6) $$v_1 = \sqrt{\frac{2 g h r}{r+h}} = \sqrt{\frac{2 g r}{\frac{r}{h}+1}},$$

so erhält man für Fallhöhen h, gegen die selbst der Erdhalbmesser r vernachlässigt werden darf, d. h. für $\frac{h}{r} = \infty$:

7) $$v_1 = \sqrt{2 g r}.$$

D. h. wenn ein Punkt nach dem allgemeinen Gesetze der Massenanziehung (1. Theil, S. 55) aus unendlicher Ferne von der Erde angezogen wird, so ist seine Geschwindigkeit an der Erdoberfläche dieselbe, als ob er mit konstanter Fallbeschleunigung g eine Höhe, gleich dem Erdhalbmesser r, durchfallen hätte. Die Gesammtfläche der bis ins Unendliche über E (Fig. 72) hinaus fortgesetzten Linie DE der Fallbeschleunigung muss daher $= g r$ sein.

Die zur Fallbewegung erforderliche Zeit ergiebt sich, wenn man in Gl. 2 $v = dx : dt$ setzt und schreibt

$$dt = \sqrt{\frac{a}{2 g r^2}} \sqrt{\frac{a-x}{x}}\, dx.$$

Bei der Integration von Ausdrücken dieser Art muss man aus dem Zähler ein etwaiges Wurzelzeichen zu beseitigen suchen; daher multiplicire man Zähler und Nenner mit $\sqrt{a-x}$, um zu erhalten

$$dt = \sqrt{\frac{a}{2 g r^2}}\, \frac{a-x}{\sqrt{a x - x^2}}\, dx.$$

Weil nun $d(a x - x^2) = (a - 2x)\, dx = 2\left(\frac{a}{2} - x\right) dx$,

so vertausche man im Zähler a mit $\frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ und ordne

8) $$dt = \sqrt{\frac{a}{2 g r^2}} \left\{ \frac{{}^1/_2\, a - x}{\sqrt{a x - x^2}}\, dx + \frac{a}{2} \frac{dx}{\sqrt{a x - x^2}} \right\}$$

Das Integral des ersten Summanden in der Klammer ist $\sqrt{ax - x^2}$; um den zweiten Summanden auf eine der Grundformeln zurückzuführen, setze man vorübergehend $x = b - y$ mit $dx = -dy$; dann wird

$$\sqrt{ax - x^2} = \sqrt{ab - ay - b^2 + 2by - y^2}.$$

Man bestimmt nun die bis jetzt willkürliche Grösse b so, dass unter dem Wurzelzeichen die Glieder mit der ersten Potenz von y verschwinden, also $2b = a$, d. h. $b = {}^1\!/_2\, a$ werde; dann wird

$$\frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}} = -\frac{dy}{\sqrt{ab - b^2 - y^2}} = -\frac{dy}{\sqrt{\frac{a^2}{4} - y^2}}$$

$$= -\frac{dy}{\frac{a}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{2}{a}y\right)^2}} = -\frac{d\left(\frac{2}{a}y\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{2}{a}y\right)^2}} = d\left(\arccos\frac{2}{a}y\right)$$

$$= d\left(\arccos\frac{a - 2x}{a}\right).$$

Hiernach liefert die Integration der Gl. 8:

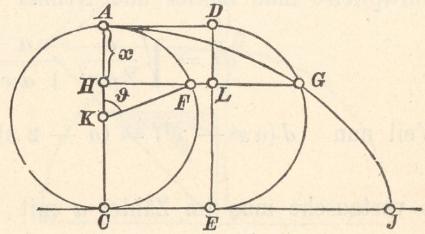
$$9)\qquad t = \sqrt{\frac{a}{2gr^2}}\left\{\sqrt{ax - x^2} + \frac{a}{2}\arccos\frac{a - 2x}{a}\right\}.$$

Eine Integrationskonstante braucht nicht mehr hinzugefügt zu werden, weil für $x = 0$ richtig

$$t = \sqrt{\frac{a}{2gr^2}}\left(0 + \frac{a}{2}\arccos 1\right) = 0 \quad \text{entsteht.}$$

Gl. 9 ist nach x nicht auflösbar, doch lässt sich der Klammerausdruck der rechten Seite leicht mittels einer Cykloide darstellen. Lässt man (Fig. 73) einen Kreis vom Durchmesser a auf der Geraden JC rollen und von einem Punkt des Umfanges die Cykloide JA erzeugen und zieht in einer Tiefe $AH = x$ unter dem Scheitelpunkte der Cykloide eine Parallele zu CJ, so ist

Fig. 73.



$$HF = \sqrt{x(a - x)} = \sqrt{ax - x^2}.$$

Ferner ist

$$\cos HKF = \cos \vartheta = \frac{{}^1/_2\, a - x}{{}^1/_2\, a} = \frac{a - 2x}{a},$$

mithin der Kreisbogen

$$AF = \frac{a}{2} \arccos \frac{a - 2x}{a}.$$

Macht man also $\overline{AD} = \widehat{AF}$ und zeichnet den Halbkreis DGE, so ist $LG = HF$, $HL = AD = \widehat{AF}$, mithin

$$HG = \sqrt{ax - x^2} + \frac{a}{2} \arccos \frac{a - 2x}{a}.$$

Für $a = 2r$ und $x = r$, d. h. für den Fall aus der Höhe r über der Erdoberfläche bis zu dieser, ist eine Zeit erforderlich

$$t = \sqrt{\frac{2r}{2gr^2}} \left\{ \sqrt{2r^2 - r^2} + r \arccos 0 \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{gr}}\, r \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \sqrt{\frac{r}{g}},$$

während der Fall von der Oberfläche bis zum Mittelpunkte der Erde nach Gl. 12, S. 57 nur die Zeit

$$\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{r}{g}}$$

in Anspruch nehmen würde. Der Unterschied erklärt sich dadurch, dass in dem jetzt vorliegenden Falle die Beschleunigung zu Anfang nur den geringen Werth ${}^1/_4\, g$ hat, dass daher die Geschwindigkeit nur langsam zunimmt, während in dem auf S. 56/57 behandelten Falle die Bewegung mit der Maximalbeschleunigung g beginnt.

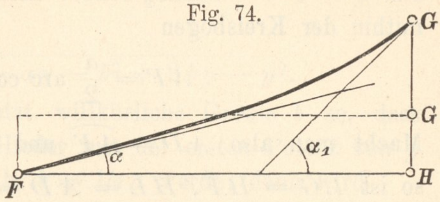
Einen noch klareren Einblick in diese Verhältnisse gewinnt man, wenn man für jede der hier in Vergleich stehenden Bewegungen die Geschwindigkeitskurve (nach 1. Theil, S. 10) aufzeichnet, d. h. zu den Zeiten als Abscissen die Geschwindigkeiten als Ordinaten aufträgt.

Für die ausserhalb der Erde von A nach B (Fig. 72) verlaufende Bewegung fehlt es allerdings an einer unmittelbaren Beziehung zwischen v und t; führt man aber die Wegeslängen x als Hülfsgrössen ein, so kann man mittels Gl. 2 das entsprechende v und nach Gl. 9 das zugehörige t ermitteln, wobei zur Erleichterung der Berechnung noch die Figur 73 benutzt werden kann.

So entspricht beispielsweise $x = 0{,}1\, r$, wenn man dies in Gl. 9 einführt und gleichzeitig $a = 2r$ setzt, $t = 0{,}887 \sqrt{\frac{r}{g}}$; Gl. 2 aber liefert mit den gleichen Werthen für a und x $v = 0{,}229\sqrt{gr}$. Diese Koordinaten t und v bestimmen einen Punkt der Geschwindigkeitskurve, und in gleicher Weise findet man eine beliebige Zahl anderer;

wählt man für $\sqrt{\frac{r}{g}}$ das Mafs 2 cm, für $\sqrt{gr}$ ebenfalls das Mafs 2 cm, so ergiebt sich die Geschwindigkeitskurve Fig. 74. Die Beschleunigung erscheint nach 1. Theil, S. 15 als das Ansteigungsverhältnis der Geschwindigkeitskurve; es ist

Fig. 74.



$$GH = \sqrt{g \cdot r} \qquad FH = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\sqrt{\frac{r}{g}} = 2{,}57\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Da nun die Fallbeschleunigung in der Höhe r über der Erdoberfläche $\frac{1}{4}g$, an der Erdoberfläche g beträgt, so muss $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}\operatorname{tg}\alpha_1$ sein, wenn α und α_1 die Neigungswinkel der Kurve bei F und G bedeuten.

Für die Bewegung im Inneren der Erde von B nach C (Fig. 72) gilt, wenn man von der Stelle B aus die Wege und Zeiten misst, ein Bewegungsgesetz von etwas anderer Form als Gl. 5, S. 54. Es würde nämlich jetzt in Fig. 62, S. 55 $BQ = ct$ und $BP = x = r\left(1 - \cos\frac{ct}{r}\right)$ sein, oder, weil

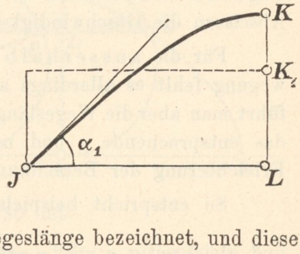
$c = \sqrt{g \cdot r}$, $\quad x = r\left(1 - \cos t\sqrt{\frac{g}{r}}\right)$; und das Geschwindigkeitsgesetz:

$$v = \sqrt{g \cdot r}\,\sin t\sqrt{\frac{g}{r}}.$$

Setzt man hierin beispielsweise $t = 0{,}1\sqrt{\frac{r}{g}}$, so wird $v = \sqrt{g \cdot r}\sin 0{,}1$. Der Bogengrösse $0{,}1$ entspricht die Gradzahl $5{,}73$ oder rund $5^0\,44'$ und der Sinus $0{,}0999$, womit genau genug $\sin 0{,}1 = 0{,}1$ und $v = 0{,}1\sqrt{g \cdot r}$ gefunden ist. In dieser Weise ergeben sich die Koordinaten der Geschwindigkeitskurve JK (Fig. 75), welche einen Theil einer Sinuslinie bildet. Es ist $KL = \sqrt{g \cdot r}$,

$$JL = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}} = 1{,}57\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Fig. 75.



Das Ansteigungsverhältnis der Kurve JK an der Stelle J ist $\operatorname{tg}\alpha_1$, d. h. von derselben Grösse wie $\operatorname{tg}\alpha_1$ in Fig. 74. Da nach 1. Theil, S. 11 der Inhalt der Geschwindigkeitskurve die Wegeslänge bezeichnet, und diese in beiden Fällen $= r$ ist, so müssen die Flächen FGH und JKL einander gleich sein. Die Figur FGH lässt sich in ein Rechteck von der Breite $2{,}57\sqrt{\frac{r}{g}}$ und der Höhe $0{,}39\sqrt{g\cdot r}$ verwandeln, was der Fläche $=r$ entspricht; die Figur JKL ebenso in ein Rechteck von der Breite $1{,}57\sqrt{\frac{r}{g}}$ und der Höhe $0{,}64\sqrt{g\cdot r}$.

3. Bewegung unter alleiniger Einwirkung eines Flüssigkeits-Widerstandes.

Wird ein schwimmender Körper mit einer Geschwindigkeit c in Bewegung gesetzt und sodann der alleinigen Einwirkung des Wasser- und Luftwiderstandes überlassen, so wird er, weil der Auftrieb der Schwerkraft das Gleichgewicht hält, eine verzögerte Bewegung in wagerechter gerader Linie ausführen. Man kann den Flüssigkeitswiderstand W mit dem Quadrate der veränderlichen Geschwindigkeit v verhältnisgleich annehmen, also setzen

1) $$W = A v^2.$$

Es empfiehlt sich nun, zur Abkürzung der Ergebnisse eine Geschwindigkeit k einzuführen, bei welcher der Körper oder Massenpunkt m einen Widerstand, gleich seinem Gewichte mg, erfährt. Dann wird aus Gl. 1:

$$mg = A k^2,$$

woraus durch Verbindung mit Gl. 1

2) $$\boldsymbol{W = mg\frac{v^2}{k^2}}$$

entsteht. Hiernach wird die Beschleunigung

3) $$\frac{dv}{dt} = -\frac{W}{m} = -g\frac{v^2}{k^2} \quad \text{oder}$$

$$dt = -\frac{k^2}{g}\frac{dv}{v^2} = \frac{k^2}{g}\,d\left(\frac{1}{v}\right), \quad \text{mithin}$$

$$t = \frac{k^2}{g}\frac{1}{v} + C;$$

weil für $t = 0$, $v = c$ war, so muss

$$0 = \frac{k^2}{g} \frac{1}{c} + C \quad \text{sein;}$$

also folgt (durch Abziehen)

$$t = \frac{k^2}{g} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{c} \right) \tag{4}$$ und hieraus

$$v = \frac{c}{1 + \frac{g}{k^2} c \cdot t}. \tag{5}$$

Setzt man $v = \frac{dx}{dt}$, und verwandelt $c \cdot dt$ in

$$\frac{k^2}{g} d\left(1 + \frac{g}{k^2} c \cdot t\right), \quad \text{so wird}$$

$$dx = \frac{k^2}{g} \frac{d\left(1 + \frac{g}{k^2} c \cdot t\right)}{1 + \frac{g}{k^2} c \cdot t}, \quad \text{also}$$

$$x = \frac{k^2}{g} \,\mathrm{l}\left(1 + \frac{g}{k^2} c \cdot t\right). \tag{6}$$

(Die Integrationskonstante verschwindet hier, weil für $t = 0$ auch $x = 0$ wird.) Weil nach Gl. 5

$$1 + \frac{g}{k^2} c \cdot t = \frac{c}{v},$$

so kann man durch Einsetzung dieses Werthes in Gl. 6 eine unmittelbare Beziehung zwischen Geschwindigkeit v und Länge x erhalten, nämlich

$$x = \frac{k^2}{g} \,\mathrm{l}\left(\frac{c}{v}\right) \quad \text{oder} \quad v = c \cdot e^{-\frac{g}{k^2} x}. \tag{7}$$

Nach diesen Ergebnissen ist die Bewegung des schwimmenden Körpers weder der Zeit noch dem Orte nach begrenzt. Es wird v erst zu Null für $t = \infty$ (Gl. 5) und für $x = \infty$ (Gl. 7). Ein einmal in Bewegung gesetzter schwimmender Körper wird also, wenn der Widerstand genau proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit (Gl. 2) und die Wasserfläche unbegrenzt ist, niemals und nirgends zur

Ruhe kommen. Er würde, wenn keine Störungen eintreten, das ganze Weltmeer durchschwimmen. In Wirklichkeit dürfte dies nicht zutreffen, weil der Widerstand des Wassers der Gl. 2 nicht genau entspricht, weil das Wasser eine gewisse Klebrigkeit hat, die den Widerstand, nachdem die Geschwindigkeit sehr klein geworden ist, erheblich beeinflussen kann, weil endlich Luft und Wasser nie ganz ruhig bleiben.

Beispiel: Ergiebt ein Schiff von $mg = 3000^{\text{t}} = 3\,000\,000^{\text{kg}}$ Gewicht bei einer Geschwindigkeit von $7^{\text{m}}/_{\text{s.}}$ einen Widerstand von $15\,000^{\text{kg}}$, so ist nach Gl. 2

$$k^2 = \frac{mg}{W} v^2 = \frac{3000}{15} \cdot 49 = 9800\,, \quad \text{d. h.}$$

$$k \text{ rund } = 100^{\text{m}}.$$

Ertheilte man nun dem Schiff eine Anfangsgeschwindigkeit $c = 10^{\text{m}}/_{\text{s.}}$, so würde ohne weitere Triebkraft zur Zurücklegung einer Strecke von 1000^{m} eine Zeit erforderlich sein, die aus Gl. 6 (mit $g = 10$)

$$1000 = \frac{10\,000}{10}\, \mathfrak{l} \left(1 + \frac{10}{10\,000} 10\,t\right)$$

gefunden werden kann. Es müsste

$$\mathfrak{l} \left(1 + \frac{t}{100}\right) = 1\,, \quad \text{oder}$$

$$1 + \frac{t}{100} = e = 2{,}7183\,, \quad \text{also}$$

$$t = 172^{\text{s.}} \quad \text{betragen.}$$

Das Schiff hat in diesem Augenblicke noch eine Geschwindigkeit (nach Gl. 5)

$$v = \frac{10}{1 + 0{,}01\,t} = \frac{10}{2{,}72} = 3{,}68^{\text{m}}/_{\text{s.}}\,.$$

Von der Arbeit, welche nöthig war, um dem Schiffe die Anfangsgeschwindigkeit zu ertheilen, nämlich

$$3\,000\,000 \cdot \frac{c^2}{2g} = 15\,000\,000^{\text{mkg}}\,,$$

sind noch
$$mg \cdot \frac{v^2}{2g} = \text{rund } 2\,030\,000^{\text{mkg}}\,,$$

d. h. $13{,}5\,\%$ vorhanden, $86{,}5\,\%$ durch den Wasserwiderstand aufgezehrt.

Nach einer Stunde ($t = 3600$) würde $v = 0{,}27^{\text{m}}/_{\text{s.}}$, $x = 3611^{\text{m}}$ betragen;

nach 2 Stunden: $v = 0{,}137^{\text{m}}/_{\text{s.}}$, $x = 4290^{\text{m}}$;

nach 10 Stunden: $v = 0{,}0277^{\text{m}}/_{\text{s.}}$, $x = 5889^{\text{m}}$.

4. Lothrechte Wurf- und Fallbewegung in einem widerstehenden Mittel (Luft oder Wasser).

a) Steigen.

Wird der Massenpunkt m bei A (Fig. 76) mit der Geschwindigkeit c lothrecht aufwärts geworfen und wirken auf ihn die Schwere mg und der Widerstand W eines Mittels (etwa der Luft) verzögernd, so mag er nach t Sekunden einen Weg $AP = x$ zurückgelegt und die Geschwindigkeit v erhalten haben. Führt man, wie Gl. 2, S. 71, den Widerstand in der Form

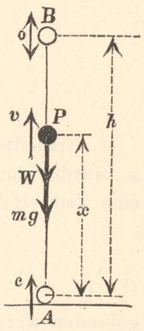


Fig. 76.

1) $$W = mg\,\frac{v^2}{k^2}$$

ein, so wird die Beschleunigung

2) $$\frac{dv}{dt} = -\,g - \frac{W}{m} = -\,g\left(1 + \frac{v^2}{k^2}\right).$$

Hieraus erhält man die Beziehung zwischen Geschwindigkeit und Zeit, indem man die Veränderlichen trennt, nämlich schreibt:

$$-\,g \cdot dt = \frac{dv}{1 + \left(\frac{v}{k}\right)^2} = k\,\frac{d\left(\frac{v}{k}\right)}{1 + \frac{v^2}{k^2}},$$

so dass entsteht $\quad g \cdot t = -\,k \operatorname{arc\,tg} \frac{v}{k} + C.$

Weil $v = c$ war für $t = 0$, so muss ferner sein

$$0 = -\,k \operatorname{arc\,tg} \frac{c}{k} + C,$$

also nach Entfernung von C mittels Abziehens der letzten Gleichung von der vorhergehenden

3) $$t = \frac{k}{g}\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{c}{k} - \operatorname{arc\,tg} \frac{v}{k}\right).$$

Will man die Zeit t wissen, nach welcher die aufwärts gerichtete Geschwindigkeit v zu Null geworden ist, so setze man $v = 0$ in Gl. 3 ein und erhält dadurch die

4) **Steigdauer** $$t_1 = \frac{k}{g} \operatorname{arc\,tg} \frac{c}{k}.$$

Zur Ermittelung der **Steighöhe** ist es am einfachsten, x als $f(v)$ zu entwickeln. Zu dem Zwecke multiplicire man Gl. 2 mit $v\,dt = dx$; dann wird

$$v\,dv = -g\left(1 + \frac{v^2}{k^2}\right)dx,$$

oder nach Trennung der Veränderlichen

$$dx = -\frac{1}{2g}\,\frac{2v \cdot dv}{1 + \frac{v^2}{k^2}} = -\frac{k^2}{2g}\,\frac{2\,\frac{v \cdot dv}{k^2}}{1 + \frac{v^2}{k^2}}, \quad \text{also}$$

$$x = -\frac{k^2}{2g}\,\mathfrak{l}\left(1 + \frac{v^2}{k^2}\right) + C.$$

Weil $x = 0$ für $v = c$, so wird

$$C = \frac{k^2}{2g}\,\mathfrak{l}\left(1 + \frac{c^2}{k^2}\right) \quad \text{und}$$

5) $$x = \frac{k^2}{2g}\,\mathfrak{l}\left(\frac{k^2 + c^2}{k^2 + v^2}\right).$$

Will man die Höhe $x = h$ wissen, bei welcher die Geschwindigkeit zu Null geworden ist, so setze man $v = 0$ in Gl. 5 ein, und erhält die

6) $$\textbf{Steighöhe}\ \boldsymbol{h = \frac{k^2}{2g}\,\mathfrak{l}\left(1 + \frac{c^2}{k^2}\right)}.$$

Eine unmittelbare Beziehung zwischen x und t ist nicht sehr bequem, kann aber in folgender Weise aus Gl. 3 erhalten werden:

Man setze
$$\operatorname{arc\,tg}\frac{c}{k} = \alpha, \quad \text{also}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = k \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{gt}{k}\right) \quad \text{und}$$

$$dx = \frac{k^2}{g}\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{gt}{k}\right) d\left(\frac{g}{k}\,t\right) = -\frac{k^2}{g}\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{gt}{k}\right) d\left(\alpha - \frac{gt}{k}\right).$$

Nun ist

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\,\mathfrak{l}\,(\cos x), \quad \text{daher}$$

$$x = \frac{k^2}{g}\,\mathfrak{l}\left(\cos\left(\alpha - \frac{gt}{k}\right)\right) + C = \frac{k^2}{g}\,\mathfrak{l}\left\{\cos\alpha \cdot \cos\frac{gt}{k} + \sin\alpha \cdot \sin\frac{gt}{k}\right\} + C,$$

$$0 = \frac{k^2}{g}\,\mathfrak{l}\,(\cos\alpha) + C,$$

also $$x = \frac{k^2}{g}\,\mathrm{l}\left\{\cos\frac{gt}{k} + \operatorname{tg}\alpha\sin\frac{gt}{k}\right\}$$

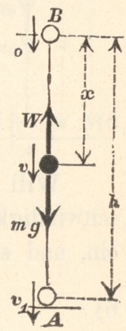
und, weil $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{c}{k}:$$

7) $$x = \frac{k^2}{g}\,\mathrm{l}\left\{\cos\frac{gt}{k} + \frac{c}{k}\sin\frac{gt}{k}\right\}.$$

b) Fallen.

Nachdem die Höhe h erstiegen wurde, beginnt das Fallen mit der Beschleunigung g, die aber mit wachsender Geschwindigkeit durch den Widerstand des Mittels vermindert wird. Nach t Sekunden sei die Höhe x durchfallen (Fig. 77), die Geschwindigkeit v geworden, dann ist die Beschleunigung

Fig. 77.



8) $$\frac{dv}{dt} = g - \frac{W}{m} = g\left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right).$$

Es möge zunächst die Geschwindigkeit v_1 berechnet werden, mit der der Massenpunkt unten bei A wieder anlangt; dann multiplicire man Gl. 8 mit $v\,dt = dx$:

$$v\,dv = g\left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right)dx$$

und schreibe $$\frac{-2\frac{v}{k}\,d\left(\frac{v}{k}\right)}{1 - \frac{v^2}{k^2}} = -\frac{2g}{k^2}dx,$$ woraus entsteht:

$$\mathrm{l}\left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right) = -\frac{2g}{k^2}x,$$

da (wegen $x = 0$; $v = 0$) die Konstante zu Null wird. Hieraus folgt für $x = h$ und $v = v_1$:

9) $$\mathrm{l}\left(1 - \frac{{v_1}^2}{k^2}\right) = -\frac{2g}{k^2}h \quad \text{oder}$$

10) $$v_1 = k\left(1 - e^{-\frac{2gh}{k^2}}\right)^{1/2}.$$

Einfacher führt man v_1 auf die Geschwindigkeit c des Aufwurfes an derselben Stelle A zurück, indem man aus Gl. 6 und 9 die Höhe h entfernt, und erhält

$$\mathfrak{l}\left(1 - \frac{v_1^2}{k^2}\right) = - \mathfrak{l}\left(1 + \frac{c^2}{k^2}\right) \text{ oder}$$

$$1 - \frac{v_1^2}{k^2} = \frac{1}{1 + \frac{c^2}{k^2}}, \text{ mithin}$$

11) $$\frac{v_1}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{c^2}{k^2}}}, \text{ d. h. } v_1 < c.$$

Um nun die Falldauer zu erhalten, schreibe man Gl. 8:

$$\frac{g}{k^2}\,dt = \frac{dv}{k^2 - v^2},$$

so dass $$t = \frac{k^2}{g}\int\frac{dv}{k^2 - v^2} + C \text{ wird.}$$

Behufs der Integration bedenke man, dass

$$\frac{1}{k^2 - v^2} = \frac{A}{k + v} + \frac{B}{k - v} = \frac{Ak - Av + Bk + Bv}{k^2 - v^2}$$

geschrieben werden kann, worin, damit

$$(A + B)k - (A - B)v = 1$$

werde (für jeden beliebigen Werth von v),

$$A = B \quad \text{und} \quad 2Ak = 1$$

sein muss. Hiermit wird

$$\int\frac{dv}{k^2 - v^2} = \frac{1}{2k}\int\frac{dv}{k + v} + \frac{1}{2k}\int\frac{dv}{k - v}$$

$$= \frac{1}{2k}\,\mathfrak{l}(k + v) - \frac{1}{2k}\,\mathfrak{l}(k - v), \quad \text{also}$$

12) $$t = \frac{k}{2g}\,\mathfrak{l}\left(\frac{k + v}{k - v}\right),$$

indem $C = 0$ wird, weil $v = 0$ richtig $t = 0$ liefert. — Setzt man nun $v = v_1$, so wird aus t die **Falldauer** t_2, d. h.

13) $$t_2 = \frac{k}{2g}\,\mathfrak{l}\left(\frac{k + v_1}{k - v_1}\right).$$

Aus Gl. 11 ergiebt sich aber

$$\frac{k+v_1}{k-v_1} = \frac{(c+\sqrt{c^2+k^2})^2}{k^2}, \text{ mithin}$$

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{l}\left(\frac{k+v_1}{k-v_1}\right) = \mathrm{l}\left(\frac{c+\sqrt{c^2+k^2}}{k}\right);$$

die Einsetzung dieses Werthes in Gl. 13 liefert:

$$14)\qquad t_2 = \frac{k}{g}\,\mathrm{l}\left(\frac{c+\sqrt{c^2+k^2}}{k}\right);$$

hiermit ist die Falldauer unmittelbar auf gegebene Grössen zurückgeführt.

Die unmittelbare Beziehung zwischen x und t wird wieder etwas umständlich. Gl. 12 lässt sich schreiben

$$k + v = (k - v)\, e^{\frac{2g}{k}t},$$

woraus sich ergiebt:

$$v = \frac{dx}{dt} = k\,\frac{e^{\frac{2g}{k}t} - 1}{e^{\frac{2g}{k}t} + 1} = k\,\frac{e^{\frac{g}{k}t} - e^{-\frac{g}{k}t}}{e^{\frac{g}{k}t} + e^{-\frac{g}{k}t}}$$

$$dx = \frac{k^2}{g}\,\frac{e^{\frac{g}{k}t} - e^{-\frac{g}{k}t}}{e^{\frac{g}{k}t} + e^{-\frac{g}{k}t}}\, d\left(\frac{g}{k}t\right);$$

da nun der Zähler die Abgeleitete des Nenners darstellt, so ist

$$x = \frac{k^2}{g}\,\mathrm{l}\left\{e^{\frac{g}{k}t} + e^{-\frac{g}{k}t}\right\} + C_1.$$

Weil $t = 0$ auch $x = 0$ geben muss, so wird

$$0 = \frac{k^2}{g}\,\mathrm{l}\,2 + C_1,$$

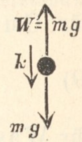
daher durch Abziehen

$$15)\qquad x = \frac{k^2}{g}\,\mathrm{l}\left\{\frac{e^{\frac{g}{k}t} + e^{-\frac{g}{k}t}}{2}\right\}.$$

Die Beschleunigung der Abwärtsbewegung würde zu Null werden, wenn die Geschwindigkeit v den Werth k erreichte, weil für diesen Fall der Widerstand $W = mg$ werden würde (Fig. 78). Ertheilt man also dem Massenpunkt in dem Sinne abwärts die Geschwindigkeit k, so führt er eine gleichmässige Bewegung aus. Daher wollen wir k die G l e i c h g e w i c h t s g e s c h w i n d i g k e i t nennen.

Bei der mit der Geschwindigkeit Null beginnenden Fallbewegung kann die Geschwindigkeit v nach Gl. 12 den Werth k aber erst nach unendlich langer Zeit erreichen, denn $v = k$ giebt in dieser Gl. $t = \infty$. Die mit einer Geschwindigkeit, kleiner als k, beginnende Fallbewegung nähert sich daher asymptotisch der gleichförmigen Bewegung mit der Geschwindigkeit k. Bei sehr grosser Fallhöhe kann annähernd die Endgeschwindigkeit $v_1 = k$ gesetzt werden. Ertheilt man dem Punkt im Sinne abwärts eine Geschwindigkeit $> k$, so ist seine Bewegung eine verzögerte, nähert sich aber mit abnehmender Geschwindigkeit, und zwar ebenfalls asymptotisch, wie man leicht findet, der gleichförmigen Bewegung mit der Geschwindigkeit k.

Fig. 78.



Lässt man den Massenpunkt von einer Höhe $h = \frac{k^2}{2g}$ herabfallen, so würde er ohne Wirkung des Luftwiderstandes eine Endgeschwindigkeit k erhalten. Mit Berücksichtigung des Luftwiderstandes aber wird nach Gl. 10:

16) $$v_1 = k\sqrt{1 - \frac{1}{e}} = 0{,}795\,k$$

oder rund $0{,}8\,k$.

c) Bestimmung der Gleichgewichtsgeschwindigkeit *k*.

Ist γ das Gewicht von 1 cbm des widerstehenden Mittels; F der grösste Querschnitt des Körpers, rechtwinklig zur Bewegungsrichtung genommen; V der Rauminhalt, $\gamma_1 V$ das Gewicht des Körpers; ζ eine von der Form und Oberflächenbeschaffenheit des Körpers abhängige Widerstandsziffer, so wird nach 2. Theil, S. 326, Gl. 3

$$W = \zeta\gamma F\frac{v^2}{2g},$$

daher, nach Gl. 1 (S. 74), für $v = k$:

$$mg = \gamma_1 V = \zeta\gamma F\frac{k^2}{2g}, \quad \text{also}$$

17) $$\frac{k^2}{2g} = \frac{\gamma_1}{\gamma}\frac{V}{F}\frac{1}{\zeta} \quad \text{und} \quad k^2 = \frac{\gamma_1}{\gamma}\frac{V}{F}\frac{2g}{\zeta}.$$

Setzt man für kugelförmige Körper vom Halbmesser r $\zeta = 0{,}5$; $V = {}^4/_3\, r^3 \pi$; $F = r^2 \pi$, so entsteht

18) $$\frac{k^2}{2g} = \frac{8}{3} \frac{\gamma_1}{\gamma} r \quad \text{und} \quad k^2 = 52{,}32 \frac{\gamma_1}{\gamma} r.$$

Für Gusseisenkugeln ($\gamma_1 = 7200$) in Luft ($\gamma = 1{,}29$) wird

19) $$\frac{k^2}{2g} = 14\,884\, r \quad \text{und} \quad k^2 = 292\,014\, r.$$

Für Wassertropfen oder Eiskugeln ($\gamma_1 = 1000$) in Luft ($\gamma = 1{,}29$)

20) $$\frac{k^2}{2g} = 2067\, r \quad \text{und} \quad k^2 = 40\,561\, r.$$

Für Gusseisenkugeln ($\gamma_1 = 7200$) in Wasser ($\gamma = 1000$) darf der Auftrieb γV des Wassers nicht vernachlässigt werden, oder es kommt bei der Berechnung der Gleichgewichtsgeschwindigkeit k nur das scheinbare Gewicht der Kugel in Bezug auf Wasser $(\gamma_1 - \gamma) V$ (s. 2. Theil, S. 185) in Frage; d. h.

$$(\gamma_1 - \gamma) V = \gamma \zeta F \frac{k^2}{2g} \quad \text{oder}$$

$$\frac{k^2}{2g} = \frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma} \frac{V}{F} \frac{1}{\zeta} \quad \text{und} \quad k^2 = \frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma} \frac{V}{F} \frac{2g}{\zeta}.$$

Dies giebt:

21) $$\frac{k^2}{2g} = 6{,}2 \cdot \frac{8}{3} r = 16{,}5\, r \quad \text{und} \quad k^2 = 324\, r.$$

Beispiel 1: Eine Gusseisenkugel von $r = 0{,}04^{\text{m}}$ Halbmesser werde mit einer Geschwindigkeit $c = 500^{\text{m}}/_{\text{s.}}$ lothrecht aufwärts geschossen. Es sollen h, t_1, v_1 und t_2 berechnet werden.

Zunächst ist nach Gl. 19

$$\frac{k^2}{2g} = 14\,884 \cdot 0{,}04 = 595\,; \quad k^2 = 292\,014 \cdot 0{,}04 = 11\,681 \quad \text{und} \quad k = 108^{\text{m}};$$

$$\frac{c}{k} = 4{,}63\,; \quad \frac{k}{g} = 11.$$

Dann wird die Steigdauer (Gl. 4)

$$t_1 = 11 \cdot \operatorname{arc\,tg} 4{,}63 = 11 \cdot \operatorname{arc} 77^0\, 49' = 11 \cdot 1{,}3582 = 14{,}9^{\text{s.}}$$

$$\text{(gegen } \frac{500}{g} = 51^{\text{s.}} \text{ ohne Luftwiderstand).}$$

Die Steighöhe (Gl. 6)

$$h = 595\, \mathrm{l}\,(1 + 4{,}63^2) = 595 \cdot 3{,}090 = 1839^{\text{m}}$$

$$\text{(gegen } \frac{500^2}{2g} = 12\,742^{\text{m}} \text{ ohne Luftwiderstand).}$$

Die Aufschlaggeschwindigkeit unten (Gl. 11)

$$v_1 = \frac{500}{\sqrt{1 + 21{,}44}} = 105{,}5,$$

mithin nur wenig kleiner als $k = 108$ (gegen $c = 500$ ohne Luftwiderstand).

Die Falldauer (Gl. 13)

$$t_2 = \frac{11}{2}\,\mathrm{l}\left(\frac{108 + 105{,}5}{108 - 105{,}5}\right) = 5{,}5 \cdot 4{,}4427 = 24{,}4^{\,\mathrm{s.}}$$

also selbstverständlich $t_2 > t_1$ (gegen $51^{\mathrm{s.}}$ ohne Luftwiderstand).

Bei geringer Geschwindigkeit c ist die Wirkung des Luftwiderstandes unerheblich. Dieselbe Kugel mit $k = 108$ erreicht mit $c = 21{,}6^{\mathrm{m}}$ Geschwindigkeit eine Höhe $h = 23{,}3^{\mathrm{m}}$ (gegen $23{,}8^{\mathrm{m}}$ ohne Luftwiderstand).

Beispiel 2: Die aus grosser Höhe herabfallenden Regentropfen, Schlossen, Hagelkörner u. dergl. bewegen sich in der Nähe des Erdbodens nahezu gleichförmig mit der Geschwindigkeit k. Nach Gl. 20 ist k verhältnisgleich mit $\sqrt{r}$; kleine Tropfen haben daher sehr geringe Geschwindigkeit, während dicke Tropfen mit grösserer Geschwindigkeit auf den Boden schlagen. Für solche kann $r = 2{,}5^{\mathrm{mm}} = 0{,}0025^{\mathrm{m}}$ sein, dann wird

$$\frac{k^2}{2\,g} = 5{,}16^{\mathrm{m}} \quad \text{und} \quad k = 10{,}1^{\mathrm{m}}.$$

Derartiger Regen hat also beim Aufschlagen eine Geschwindigkeitshöhe von nur $5{,}16^{\mathrm{m}}$, mag er aus noch so grosser Höhe fallen.

Hagelkörner kommen vor von $0{,}03^{\mathrm{m}}$ Halbmesser und $0{,}1^{\mathrm{kg}}$ Gewicht. Für diese ist die Geschwindigkeitshöhe

$$\frac{k^2}{2\,g} = 62^{\mathrm{m}}, \qquad \text{die Geschwindigkeit } k \text{ rund } 35^{\mathrm{m}}.$$

Die Schlagwirkung eines Hagelkorns ist nach dem Werthe seines Arbeitsvermögens $\frac{1}{2}\, m \cdot k^2$ zu beurtheilen. Da nun m mit r^3 verhältnisgleich, k^2 aber mit r in gleichem Verhältnisse wächst, so ist die Schlagwirkung proportional mit der vierten Potenz von r. Ein Hagelkorn vom doppelten Durchmesser hat also die 16fache Wirkung eines solchen mit einfachem Durchmesser.

Beispiel 3: Wie lange gebraucht eine Gusseisenkugel von $r = 0{,}3^{\mathrm{m}}$ Halbmesser, um eine Meerestiefe von 8000^{m} zu durchsinken. Wegen der grossen Tiefe wird die Fallgeschwindigkeit bald dem Grenzwerthe k sehr nahe kommen. Es ist (Gl. 21)

$$k^2 = 324 \cdot 0{,}3 = 97{,}2\,, \quad \text{also}$$

$$k = 9{,}86$$

und die Zeit, wegen nahezu gleichmässiger Bewegung,

$$t_2 = 8000 : 9{,}86 = 811^{\mathrm{s.}} = 13^1\!/\!_2{}^{\mathrm{min.}}.$$

d) Übergang zur widerstandslosen Bewegung.

Der einfache Fall, in welchem nur die Schwere wirkt, lässt sich aus den vorstehenden Untersuchungen ableiten. Soll nämlich der Widerstand W zu Null werden, so muss in Gl. 1 die für W massgebende Grösse $k = \infty$ gesetzt werden. Dabei liefern dann die Gleichungen 3, 4, 5, 6, 7, 9 bis 14 Ergebnisse, die zunächst in unbestimmten Formen $\infty \cdot 0$ und $\frac{0}{0}$ auftreten, aber nach den Lehren der Differentialrechnung oder durch sonstige geeignete Umformung in die einfachen Gleichungen der gleichförmig beschleunigten Bewegung übergeführt werden können. Es möge dies beispielsweise an Gl. 4 durchgeführt werden:

Mit wachsendem k, also abnehmendem $\frac{c}{k}$ verschwindet mehr und mehr der Unterschied zwischen dem Bogen $\frac{c}{k}$ und seiner Tangente, so dass arc tg $\frac{c}{k}$ mit $\frac{c}{k}$ vertauscht werden kann. Somit wird aus Gl. 4:

$$t_1 = \frac{k}{g} \cdot \frac{c}{k} = \frac{c}{g},$$

wie es sein muss.

Durch entsprechende Behandlung gehen die übrigen Gleichungen für $k = \infty$ über in:

Gl. 5) $x = \frac{c^2 - v^2}{2g}$,

Gl. 6) $h = \frac{c^2}{2g}$,

Gl. 7) $x = \frac{ct}{2}$,

Gl. 9) $h = \frac{v_1^2}{2g}$,

Gl. 10) $v_1 = \sqrt{2gh}$,

Gl. 11) $v_1 = c$,

Gl. 12) $t = \frac{v}{g}$,

Gl. 13) $t_2 = \frac{v_1}{g}$,

Gl. 14) $t_2 = \frac{c}{g}$,

Gl. 15) $x = \frac{g t^2}{2}$.

B. Freie krummlinige Bewegung eines Massenpunktes.

Eine krummlinige Bewegung entsteht, wenn Kraftrichtung und Geschwindigkeitsrichtung nicht übereinstimmen.

Die Bewegung eines Punktes im Raum ist bestimmt durch die Bewegungen seiner Projektionen auf drei Achsen. Diese Projektionsbewegungen nennt man auch Seitenbewegungen. Ist R die auf den Massenpunkt wirkende Mittelkraft, p die Beschleunigung, also $R = mp$, sind X, Y und Z die Projektionen von R auf die drei Achsen oder die Seitenkräfte in der Richtung der Achsen, p_x, p_y, p_z die entsprechenden Beschleunigungen, d. h. die Projektionen von p auf die Achsen, so sind diese nach S. 6 zugleich die Beschleunigungen der drei Seiten- oder Projektionsbewegungen. D. h., wenn x, y, z die veränderlichen Koordinaten des Punktes, es ist

$$p_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d v_x}{dt} = \frac{X}{m};$$

$$p_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d v_y}{dt} = \frac{Y}{m};$$

$$p_z = \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d v_z}{dt} = \frac{Z}{m}.$$

Es liegt dann die Aufgabe vor, hieraus durch Integration die Gleichungen der Projektionsbewegungen $x = f(t)$ u. s. w. zu entwickeln.