Augenblicke die geometrische Summe aus der wahren Bewegung des Körpers und dem Entgegengesetzten der Bewegung des Achsenkreuzes.

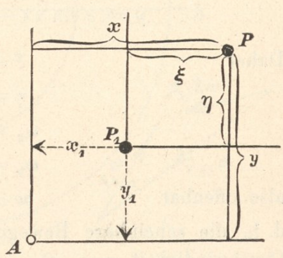
I. Scheinbare Bewegung eines Punktes in Bezug auf einen anderen.

Wir denken uns durch den zweiten Punkt P_1 ein Achsenkreuz gelegt, welches, da ein Punkt eine Drehbewegung nicht hat, nur eine Parallelverschiebung mit dem Punkte P_1 ausführt. Die Bewegung des ersten Punktes P gegen dieses Achsenkreuz ist dann die gesuchte scheinbare Bewegung, während seine wahre Bewegung auf ein zu obigem paralleles festes Achsenkreuz mit dem Anfangspunkt A bezogen wird. Die scheinbare Bewegung von P gegen P_1 ist die geometrische Summe der wahren Bewegung von P und dem Entgegengesetzten der Verschiebung von P_1; die scheinbare Geschwindigkeit w ist die geometrische Summe aus der wahren Geschwindigkeit v und dem Entgegengesetzten der Geschwindigkeit u des Punktes P_1, d. h.

$$w \equiv v, (-u);$$

ebenso ist die scheinbare Beschleunigung p_1 die geometrische Summe aus der wahren Beschleunigung p und dem Entgegengesetzten der Beschleunigung p_2 des Punktes P, d. h.

Fig. 54.



$$p_1 \equiv p, (-p_2).$$

(p_3 kommt hier noch nicht in Frage, weil das bewegliche Achsenkreuz keine Drehung ausführt, also in Gl. 4, S. 40 $\omega = 0$ ist.)

Hat der Punkt P in Bezug auf ein festes Achsenkreuz die Koordinaten x, y, z, der Punkt P_1 in Bezug auf dasselbe Achsenkreuz die Koordinaten x_1, y_1, z_1, so gilt für die (scheinbaren) Koordinaten ξ, η, ζ des Punktes P in Bezug auf das mit P_1 bewegliche Achsenkreuz

$$\xi = x - x_1; \quad \eta = y - y_1; \quad \zeta = z - z_1.$$

Fig. 54 zeigt den Fall, wo die Bewegungen nur in einer Ebene vor sich gehen. Dann kann man auch schreiben:

$$w_x = v_x - u_x \quad \text{oder} \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt},$$

$$w_y = v_y - u_y \quad \text{oder} \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt}$$

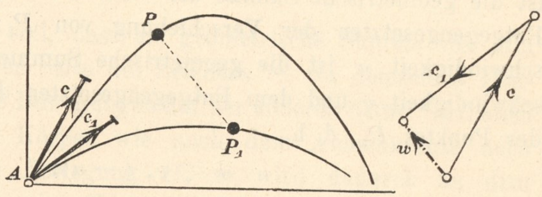
und ebenso für die Beschleunigungen

$$p_{1x} = p_x - p_{2x} \quad \text{oder} \quad \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2x_1}{dt^2},$$

$$p_{2y} = p_y - p_{2y} \quad \text{oder} \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2y_1}{dt^2}.$$

Beispiel 1: In derselben lothrechten Ebene werden (Fig. 55) gleichzeitig zwei Punkte P und P_1 mit den Geschwindigkeiten c und c_1 unter den Neigungswinkeln α und α_1 fortgeworfen; welches ist die scheinbare Bewegung von P in Bezug auf P_1 (wenn man sich vorstellt, dass ein Beobachter [wie Münchhausen auf der Kanonenkugel] die Bewegung von P_1 mitmacht). Auf die Punkte soll nur die Schwere, kein Luftwiderstand wirken. Dann ist nach dem 1. Theile, S. 49

Fig. 55.



$$x = c\cos\alpha\, t; \qquad x_1 = c_1 \cos\alpha_1\, t;$$

$$y = c\sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2}; \qquad y_1 = c_1 \sin\alpha_1\, t - \frac{gt^2}{2}.$$

Daher

$$\xi = (c\cos\alpha - c_1\cos\alpha_1)\, t,$$

$$\eta = (c\sin\alpha - c_1\sin\alpha_1)\, t,$$

$$w_x = c\cos\alpha - c_1\cos\alpha_1,$$

$$w_y = c\sin\alpha - c_1\sin\alpha_1,$$

also offenbar

$$w \equiv c,\ (-c_1);\ p_1 = 0,$$

d. h. die scheinbare Bewegung erfolgt gleichförmig und geradlinig mit der Geschwindigkeit w.

Es ergiebt sich dies noch einfacher, wenn man die Wurfbewegungen zerlegt in die gleichförmig geradlinigen ct bezw. c_1t nach den Richtungen der Anfangsgeschwindigkeiten, und die lothrecht abwärts gerichteten $\frac{1}{2}gt^2$ bezw. $\frac{1}{2}gt^2$. Da die beschleunigten Fallbewegungen beiden Punkten gemeinsam sind, so kann die scheinbare Bewegung nur von den beschleunigungslosen Bewegungen ct und c_1t abhängig sein.

Beispiel 2: Zwei Punkte P und P_1 durchlaufen mit gleichen Winkelgeschwindigkeiten zwei Kreise mit gemeinsamem Mittelpunkt A (Fig. 56). Die scheinbare Bewegung von P in Bezug auf P_1 soll untersucht werden.

Es seien r und r_1 die Halbmesser AP und AP_1 der Kreise, α der Winkel, den die gleichzeitigen Fahrstrahlen r und r_1 mit einander bilden, ϑ der veränderliche Neigungswinkel von AP gegen die AX; dann ist

$$x = r\cos\vartheta; \qquad y = r\sin\vartheta;$$

$$x_1 = r_1\cos(\alpha+\vartheta); \qquad y_1 = r_1\sin(\alpha+\vartheta);$$

$$\xi = x - x_1 = r\cos\vartheta - r_1\cos(\alpha+\vartheta);$$

$$\eta = y - y_1 = r\sin\vartheta - r_1\sin(\alpha+\vartheta).$$

Bildet man hiernach $\xi^2 + \eta^2$, so erhält man dafür

$$r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos\alpha = l^2 = \overline{PP_1}^2,$$

was übrigens auch schon daraus folgt, dass wegen gleicher Winkelgeschwindigkeit beider Punkte das Dreieck APP_1 seine Form unverändert behält, während es sich um A dreht.

Die scheinbare Bewegung von P in Bezug auf P_1 ist also eine Bewegung in einem Kreise vom Halbmesser

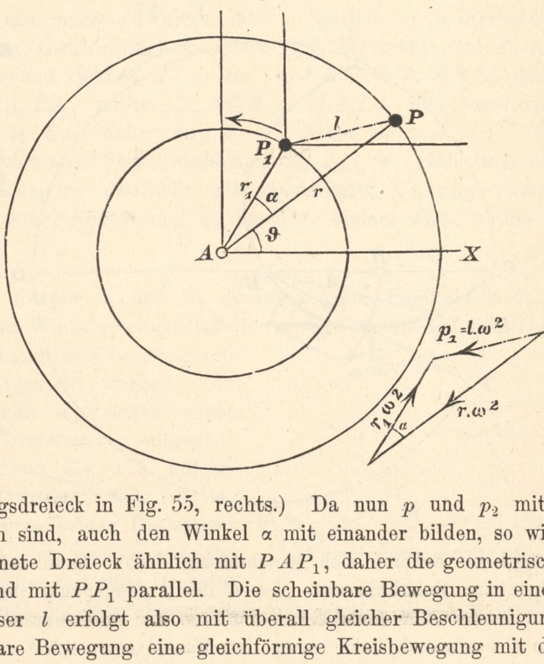
$$l = PP_1.$$

Die wahre Beschleunigung von P ist $p = r \cdot \omega^2$ in der Richtung von P nach A; die Beschleunigung

$$p_2 = r_1\omega^2$$

hat die Richtung von P_1 nach A, daher ist $-p_2$ von A nach P_1 gerichtet.

Fig. 56.



(S. das Beschleunigungsdreieck in Fig. 55, rechts.) Da nun p und p_2 mit r und r_1 verhältnisgleich sind, auch den Winkel α mit einander bilden, so wird das aus ihnen gezeichnete Dreieck ähnlich mit PAP_1, daher die geometrische Summe $p_1 = l \cdot \omega^2$ und mit PP_1 parallel. Die scheinbare Bewegung in einem Kreise vom Halbmesser l erfolgt also mit überall gleicher Beschleunigung. Daher ist die scheinbare Bewegung eine gleichförmige Kreisbewegung mit der Umfangsgeschwindigkeit $w = l \cdot \omega$, der Winkelgeschwindigkeit ω.