Beispiel 3: Die scheinbare Bahnlinie sei ebenfalls ein Halbmesser einer sich gleichmässig drehenden Scheibe; die scheinbare Bewegung erfolge aber nicht nach aussen, sondern nach der Mitte hin (Fig. 51) mit der gleichbleibenden Geschwindigkeit w. Man findet v mittels Fig. 52. Es ist wiederum $p_1 = 0$; $p_2 = x\,\omega^2$ centripetal; $p_3 = 2\,w \cdot \omega$ aber nach links gerichtet, weil

Fig. 52.

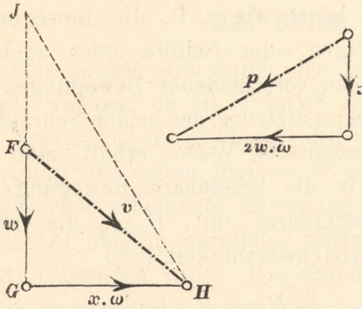
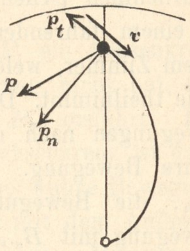


Fig. 53.



sich bei der Drehung um C der Endpunkt E von E nach D bewegt. Die Richtung von p wird wiederum rechtwinklig zu HJ in dem Geschwindigkeitsdreieck Fig. 52, an welches man $JF = w$ anreiht. Die Zerlegung von p liefert diesmal in tangentialer Richtung eine Verzögerung (Fig. 53), weil die Geschwindigkeit v mit kleiner werdendem x abnimmt. Die wahre Bahnlinie ist wiederum eine archimedische Spirale.

D. Scheinbare (relative) Bewegung.

In dem vorstehenden Abschnitte war schon von der scheinbaren Bewegung die Rede; dieselbe wurde als gegeben behandelt und mit der Bewegung der Bahnlinie zu der wahren Bewegung zusammengesetzt. In diesem Abschnitte handelt es sich aber um die Aufsuchung der scheinbaren Bewegung, während die wahre Bewegung gegeben sein soll. Wir gelangen dazu durch folgende Betrachtung.

Führt ein Körper in einem Raume, den wir als ein Achsenkreuz auffassen und bezeichen wollen, eine Bewegung aus, so lässt sich diese für jeden Augenblick als eine Schraubenbewegung darstellen. Bewegt sich nun auch das Achsenkreuz gleichzeitig, so kann man auch dessen Bewegung für jeden Augenblick auf eine Schraubenbewegung zurückführen. Die erstgenannte Bewegung heisst die scheinbare oder relative Bewegung des Körpers in Bezug auf das Achsenkreuz, weil ein an der Bewegung des Achsenkreuzes theilnehmender Beobachter nur diese Bewegung mit seinen Sinnen wahrnehmen (sehen und fühlen) kann, wie z. B. die Bewegungen in einem fahrenden Eisenbahnwagen oder Schiffe, oder auch in einem Zimmer, welches doch an den verschiedenen Bewegungen der Erde theilnimmt. Durch die Zusammensetzung der beiden Schraubenbewegungen nach der S. 35 angedeuteten Weise erhält man die wahre Bewegung. Bezeichnen wir die scheinbare Bewegung mit B_{sch}, die Bewegung des Achsenkreuzes mit B_{achs}, die wahre Bewegung mit B_w, so gilt die Gleichwerthigkeit ($\equiv$)

1) $$B_{sch},\ B_{achs} \equiv B_w,$$

welche nur andeuten soll, dass die geometrische Summe von B_{sch} und B_{achs} auf der einen Seite des Zeichens $\equiv$ zu demselben Endergebnisse führt wie die Bewegungen auf der anderen Seite. Ertheilen wir nun sowohl dem Körper wie auch dem Achsenkreuze noch eine fernere, beliebige Bewegung B, so wird dadurch an dem gegenseitigen Verhalten des Körpers und des Achsenkreuzes, also auch an der scheinbaren Bewegung nichts geändert, man kann daher auch schreiben:

2) $$B_{sch},\ B_{achs},\ B \equiv B_w,\ B.$$

Wählt man nun diese neue Bewegung so, dass sie das Entgegengesetzte der Bewegung des Achsenkreuzes ist, d. h. für jeden Augenblick eine Schraubenbewegung um dieselbe Achse mit gleichen aber entgegengesetzten Geschwindigkeiten der Drehung und Verschiebung, was wir durch

3) $$B \equiv -B_{achs}$$

ausdrücken wollen, so heben sich B_{achs} und B vollständig auf, und es wird aus Gl. 2:

4) $$B_{sch} \equiv B_w,\ (-B_{achs});$$

d. h. die scheinbare Bewegung eines Körpers in Bezug auf ein bewegliches Achsenkreuz ist in jedem

Augenblicke die geometrische Summe aus der wahren Bewegung des Körpers und dem Entgegengesetzten der Bewegung des Achsenkreuzes.

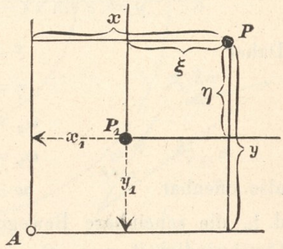
I. Scheinbare Bewegung eines Punktes in Bezug auf einen anderen.

Wir denken uns durch den zweiten Punkt P_1 ein Achsenkreuz gelegt, welches, da ein Punkt eine Drehbewegung nicht hat, nur eine Parallelverschiebung mit dem Punkte P_1 ausführt. Die Bewegung des ersten Punktes P gegen dieses Achsenkreuz ist dann die gesuchte scheinbare Bewegung, während seine wahre Bewegung auf ein zu obigem paralleles festes Achsenkreuz mit dem Anfangspunkt A bezogen wird. Die scheinbare Bewegung von P gegen P_1 ist die geometrische Summe der wahren Bewegung von P und dem Entgegengesetzten der Verschiebung von P_1; die scheinbare Geschwindigkeit w ist die geometrische Summe aus der wahren Geschwindigkeit v und dem Entgegengesetzten der Geschwindigkeit u des Punktes P_1, d. h.

$$w \equiv v, (-u);$$

ebenso ist die scheinbare Beschleunigung p_1 die geometrische Summe aus der wahren Beschleunigung p und dem Entgegengesetzten der Beschleunigung p_2 des Punktes P, d. h.

Fig. 54.



$$p_1 \equiv p, (-p_2).$$

(p_3 kommt hier noch nicht in Frage, weil das bewegliche Achsenkreuz keine Drehung ausführt, also in Gl. 4, S. 40 $\omega = 0$ ist.)

Hat der Punkt P in Bezug auf ein festes Achsenkreuz die Koordinaten x, y, z, der Punkt P_1 in Bezug auf dasselbe Achsenkreuz die Koordinaten x_1, y_1, z_1, so gilt für die (scheinbaren) Koordinaten ξ, η, ζ des Punktes P in Bezug auf das mit P_1 bewegliche Achsenkreuz

$$\xi = x - x_1; \quad \eta = y - y_1; \quad \zeta = z - z_1.$$

Fig. 54 zeigt den Fall, wo die Bewegungen nur in einer Ebene vor sich gehen. Dann kann man auch schreiben:

$$w_x = v_x - u_x \quad \text{oder} \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt},$$

$$w_y = v_y - u_y \quad \text{oder} \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt}$$

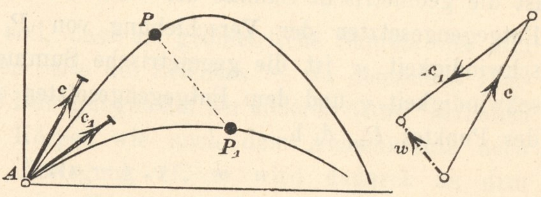
und ebenso für die Beschleunigungen

$$p_{1x} = p_x - p_{2x} \quad \text{oder} \quad \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2x_1}{dt^2},$$

$$p_{2y} = p_y - p_{2y} \quad \text{oder} \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2y_1}{dt^2}.$$

Beispiel 1: In derselben lothrechten Ebene werden (Fig. 55) gleichzeitig zwei Punkte P und P_1 mit den Geschwindigkeiten c und c_1 unter den Neigungswinkeln α und α_1 fortgeworfen; welches ist die scheinbare Bewegung von P in Bezug auf P_1 (wenn man sich vorstellt, dass ein Beobachter [wie Münchhausen auf der Kanonenkugel] die Bewegung von P_1 mitmacht). Auf die Punkte soll nur die Schwere, kein Luftwiderstand wirken. Dann ist nach dem 1. Theile, S. 49

Fig. 55.



$$x = c \cos \alpha\, t; \qquad x_1 = c_1 \cos \alpha_1\, t;$$

$$y = c \sin \alpha\, t - \frac{gt^2}{2}; \qquad y_1 = c_1 \sin \alpha_1\, t - \frac{gt^2}{2}.$$

Daher

$$\xi = (c \cos \alpha - c_1 \cos \alpha_1)\, t,$$

$$\eta = (c \sin \alpha - c_1 \sin \alpha_1)\, t,$$

$$w_x = c \cos \alpha - c_1 \cos \alpha_1,$$

$$w_y = c \sin \alpha - c_1 \sin \alpha_1,$$

also offenbar

$$w \equiv c,\ (-c_1);\ p_1 = 0,$$

d. h. die scheinbare Bewegung erfolgt gleichförmig und geradlinig mit der Geschwindigkeit w.

Es ergiebt sich dies noch einfacher, wenn man die Wurfbewegungen zerlegt in die gleichförmig geradlinigen ct bezw. $c_1 t$ nach den Richtungen der Anfangsgeschwindigkeiten, und die lothrecht abwärts gerichteten $\frac{1}{2} gt^2$ bezw. $\frac{1}{2} gt^2$. Da die beschleunigten Fallbewegungen beiden Punkten gemeinsam sind, so kann die scheinbare Bewegung nur von den beschleunigungslosen Bewegungen ct und $c_1 t$ abhängig sein.

Beispiel 2: Zwei Punkte P und P_1 durchlaufen mit gleichen Winkelgeschwindigkeiten zwei Kreise mit gemeinsamem Mittelpunkt A (Fig. 56). Die scheinbare Bewegung von P in Bezug auf P_1 soll untersucht werden.

Es seien r und r_1 die Halbmesser AP und AP_1 der Kreise, α der Winkel, den die gleichzeitigen Fahrstrahlen r und r_1 mit einander bilden, ϑ der veränderliche Neigungswinkel von AP gegen die AX; dann ist

$$x = r \cos \vartheta; \qquad y = r \sin \vartheta;$$

$$x_1 = r_1 \cos (\alpha + \vartheta); \qquad y_1 = r_1 \sin (\alpha + \vartheta);$$

$$\xi = x - x_1 = r \cos \vartheta - r_1 \cos (\alpha + \vartheta);$$

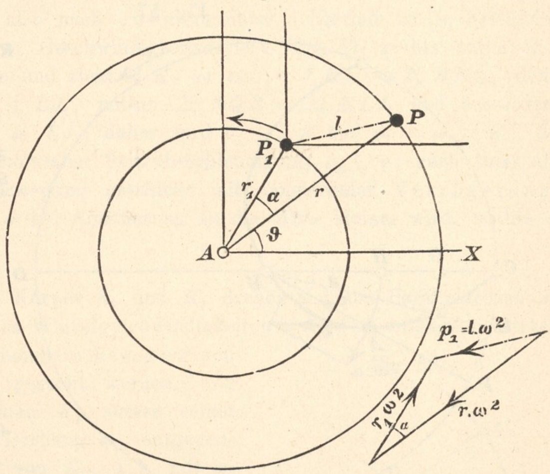
$$\eta = y - y_1 = r \sin \vartheta - r_1 \sin (\alpha + \vartheta).$$

Bildet man hiernach $\xi^2 + \eta^2$, so erhält man dafür

$$r^2 + r_1^2 - 2 r r_1 \cos \alpha = l^2 = \overline{PP_1}^2,$$

was übrigens auch schon daraus folgt, dass wegen gleicher Winkelgeschwindigkeit beider Punkte das Dreieck APP_1 seine Form unverändert behält, während es sich um A dreht.

Fig. 56.



Die scheinbare Bewegung von P in Bezug auf P_1 ist also eine Bewegung in einem Kreise vom Halbmesser

$$l = PP_1.$$

Die wahre Beschleunigung von P ist $p = r \cdot \omega^2$ in der Richtung von P nach A; die Beschleunigung

$$p_2 = r_1 \omega^2$$

hat die Richtung von P_1 nach A, daher ist $-p_2$ von A nach P_1 gerichtet. (S. das Beschleunigungsdreieck in Fig. 55, rechts.) Da nun p und p_2 mit r und r_1 verhältnisgleich sind, auch den Winkel α mit einander bilden, so wird das aus ihnen gezeichnete Dreieck ähnlich mit PAP_1, daher die geometrische Summe $p_1 = l \cdot \omega^2$ und mit PP_1 parallel. Die scheinbare Bewegung in einem Kreise vom Halbmesser l erfolgt also mit überall gleicher Beschleunigung. Daher ist die scheinbare Bewegung eine gleichförmige Kreisbewegung mit der Umfangsgeschwindigkeit $w = l \cdot \omega$, der Winkelgeschwindigkeit ω.

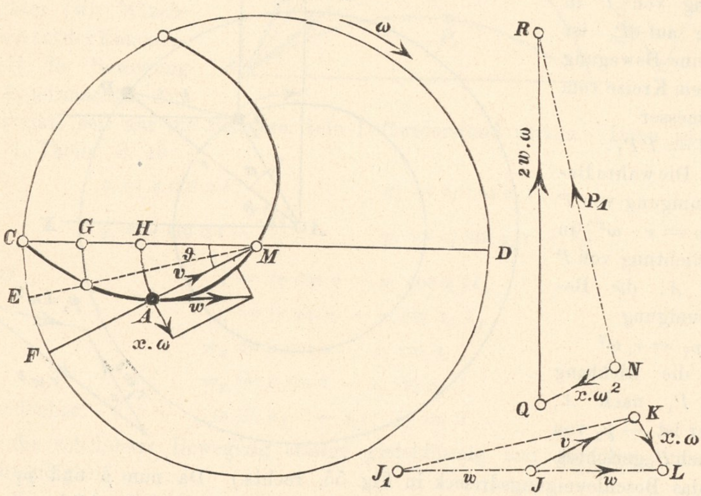
2. Scheinbare Bewegung in Bezug auf einen beliebig bewegten Raum.

In diesem Falle sind u und p_2 selbstverständlich Geschwindigkeit und Beschleunigung derjenigen Stelle des bewegten Raumes, an dem der Punkt oder Körper sich gerade befindet. Da ferner nach Gl. 3, S. 40 $p \equiv p_1, p_2, p_3$, so wird hieraus

1) $$p_1 \equiv p, (-p_2), (-p_3).$$

Beispiel 1: Eine wagerechte Scheibe (Fig. 57) drehe sich gleichförmig rechts herum mit der Winkelgeschwindigkeit ω um ihre lothrechte Achse; oberhalb derselben führe ein Punkt eine gleichmässige Bewegung längs einer wagerechten Geraden aus, die durch den Mittelpunkt der Scheibe geht. Diese wirkliche Bewegung erfolge mit der Geschwindigkeit v. Es soll die scheinbare Bewegung in Bezug auf die Scheibe bestimmt werden. Man stelle sich etwa vor, dass die Kante eines gegen die Scheibe erhöht liegenden Lineals die wirkliche Bahnlinie des Punktes, und dass der Punkt die Spitze eines Bleistiftes sei, den man gleichmässig an dem Lineale entlang bewegt, während die darunter

Fig. 57.



befindliche Scheibe sich gleichmässig dreht; dann zeichnet der Bleistift die scheinbare Bahnlinie auf. Ist C der Anfangspunkt der Bewegung, so erhält man leicht eine Anzahl von Punkten der scheinbaren Bahnlinie, indem man, von C beginnend, links herum den Winkel $\omega = CME = EMF$ u. s. f. hintereinander aufträgt und ebenso die Längen $v = CG = GH$ u. s. f. auf der

Geraden CMD abmisst. Schneidet ein durch H gelegter Kreisbogen mit dem Mittelpunkt M den Halbmesser MF in A, so ist A ein Punkt der scheinbaren Bahnlinie. Denn es muss der Geraden CMD, auf der sich der Punkt bewegt, eine Drehung um M ertheilt werden, welche der wahren Drehung der Scheibe gleich und entgegengesetzt ist.

Setzt man $\measuredangle\, CMA = \vartheta$, $MA = x$, $CM = r$, so ist

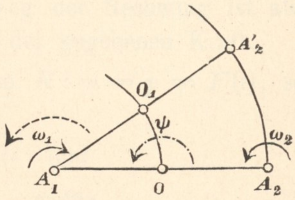
$$r - x = vt; \quad \vartheta = \omega t;$$

daraus entsteht
$$x = r - \frac{v}{\omega}\vartheta;$$

diese Gleichung bedeutet, weil die Beziehung zwischen x und ϑ linear ist, eine archimedische Spirale. Die scheinbare Geschwindigkeit w im Punkt A ist die Diagonale eines Rechtecks aus v in der Richtung AM und dem dazu rechtwinkligen $x\omega$. — Zur Bestimmung der scheinbaren Beschleunigung ist zu bedenken, dass $p = 0$, weil die wahre Bewegung gleichförmig erfolgt; daher muss $p_1 \equiv (-p_2), (-p_3)$ sein. Es bedeutet darin $-p_2$ die Centrifugalbeschleunigung $x \cdot \omega^2$, in der Richtung MA, d. h. rechtwinklig zu $KL = x \cdot \omega$ (Fig. 57, rechts unten) aufgetragen. Es ist $p_3 = 2\,w \cdot \omega$, weil $\alpha = 90^0$ ist. Richtung und Sinn von p_3 stimmt überein mit der Bewegung des Endpunkts von $w \cdot dt$, also auch von w bei einer Drehung um A mit der Winkelgeschwindigkeit ω der Scheibe, d. h. rechts herum. Daher ist $+p_3$ rechtwinklig zu w nach unten, $-p_3$ also nach oben gerichtet. Hiermit ist p_1 bestimmt. Verlängert man in dem Geschwindigkeitsdreieck (Fig. 57, rechts unten) LJ nach links um $JJ_1 = w$ und zieht J_1K, so ist $\triangle\, J_1KL \sim \triangle\, RNQ$, denn es ist $QN \perp KL$; $RQ \perp LJ_1$, mithin $\measuredangle\, NQR = \measuredangle\, KLJ_1$ und ausserdem $\overline{NQ} = \omega \cdot \overline{KL}$, $\overline{QR} = \omega \cdot \overline{LJ_1}$; daher wird $p_1 \perp J_1K$ und $p_1 = \omega \cdot \overline{J_1K}$. Es weicht p_1 von seiner normalen Seitenbeschleunigung p_n ($\perp w$) nach links ab, d. h. die scheinbare Bewegung geschieht mit tangentialer Verzögerung, wie es sein muss, da $x\omega$ bei Annäherung an die Mitte kleiner wird, mithin w abnehmen muss.

Beispiel 2: Zwei Körper K_1 und K_2 drehen sich um Parallelachsen A_1 und A_2 (Fig. 58) mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 entgegengesetzten Sinnes. Es soll die scheinbare Bewegung von K_2 in Bezug auf K_1 gesucht werden. Zu diesem Zwecke hat man K_2 ausser seiner Drehung ω_2 noch eine Drehung ω_1, entgegengesetzt der Bewegung von K_1, d. h. mit ω_2 gleichen Sinnes, zu ertheilen, wie bei A_1 punktirt angegeben. Diese beiden Drehungen um A_1 und A_2 lassen sich nach S. 31 für jeden Augenblick vertauschen mit einer Drehung um eine Achse $O \parallel A_1$ mit der Winkelgeschwindigkeit $\psi = \omega_1 + \omega_2$, u. zw. ist

Fig. 58.



$$\frac{OA_1}{OA_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Nach der Zeit t hat die Achse A_2 sich in ihrer scheinbaren Bewegung nach A_2' bewegt, wenn $A_2 A_1 A_2' = \omega_1 t$ ist. Dann liegt, wenn ω_1 und ω_2 sich nicht ändern, die augenblickliche Drehachse bei O_1. Der Cylinder $O O_1$ mit der Achse A_1 und dem Halbmesser $A_1 O$ ist der Ort der augenblicklichen Drehachsen, und da O auch von A_2 einen unveränderlichen Abstand hat, so ist ein mit dem Körper K_2 verbundener Cylinder $P P_1$ (Fig. 59) der Ort derjenigen Geraden des Körpers K_2, welche der Reihe nach mit den augenblicklichen Drehachsen O, O_1 . . . zusammenfallen. Die scheinbare Bewegung von K_2 in Bezug auf K_1 ist nach S. 19 ein Rollen des Cylinders $P P_1$ auf dem Cylinder $O O_1$. Sind diese Cylinderflächen an den Körpern thatsächlich vorhanden, so haben sie an der Berührungsstelle stets die Gleitgeschwindigkeit Null. Es beruht auf diesem Verhalten die Lehre von der Verzahnung der Zahnräder.

Fig. 59.