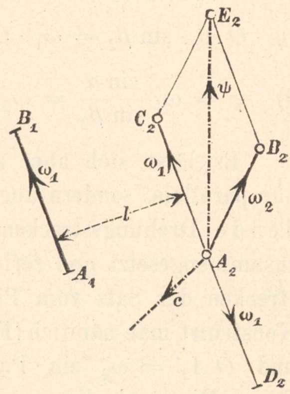
dem Parallelogrammgesetze zu einer Drehungsachse $A_2 E_2 = \psi$ vereinigen. $A_1 B_1$ und $A_2 D_2$ aber bilden ein Drehungspaar von dem Momente $l \cdot \omega_1$, wenn l der Abstand des Punktes A_2 von der Richtung $A_1 B_1$; dies Drehungspaar ist gleichbedeutend mit einer zur Ebene $B_1 A_1 A_2$ rechtwinkligen Verschiebungsgeschwindigkeit $c = l \cdot \omega_1$. Hiermit sind die gegebenen Drehungsstrecken ω_1 und ω_2 zurückgeführt auf eine Drehungsstrecke ψ und eine Verschiebungsgeschwindigkeit c.

Fig. 43.



Auf Grund dieses Verfahrens kann man beliebig viele im Raume zerstreute Drehungsstrecken zusammensetzen, indem man sie wie Einzelkräfte behandelt und mit ihnen genau so verfährt, wie im 1. Theil, S. 111 ausführlich beschrieben wurde. Auch gleichzeitig noch gegebene Verschiebungsgeschwindigkeiten erschweren die Aufgabe nicht, da man sie als Drehungspaare darstellen kann. Wie man bei der Zusammensetzung von Kräften zu einer Einzelkraft und einem Kräftepaare gelangt, so erhält man hier als Endergebnis eine Drehungsstrecke und ein Drehungspaar, d. h. eine Drehungsstrecke und eine Verschiebungsgeschwindigkeit; und wie man dort durch geeignete Parallelverschiebung der Einzelkraft erreichen konnte, dass die Kräftepaarsachse so klein wie möglich und parallel der Einzelkraft wurde, so kann man in entsprechender Weise auch hier dazu gelangen, dass die Verschiebungsgeschwindigkeit so klein wie möglich und parallel der Drehungsstrecke werde, d. h. dass schliesslich eine S c h r a u b e n b e w e g u n g entsteht. Die Achse der Schraubenbewegung entspricht also der Centralachse (1. Theil, S. 115) einer Kräftegruppe.

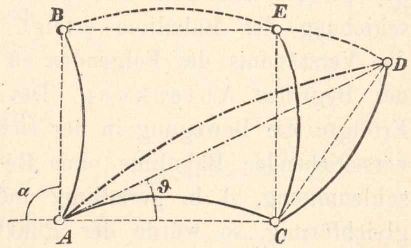
5. Bewegung eines Punktes in einer Bahnlinie mit beliebiger Bewegung.

Wenn ein Punkt sich in einer beliebigen Bahnlinie bewegt, die selbst eine V e r s c h i e b u n g erleidet, so gilt nach 1. Theil S. 26

für die wahre Bewegung des Punktes, sowie auch für die Geschwindigkeit und die Beschleunigung derselben einfach das Parallelogrammgesetz. Das Ergebnis wird aber zum Theil ein anderes, wenn die Bahnlinie eine **beliebige** Bewegung ausführt, d. h. neben der Verschiebung auch eine Drehung erleidet.

Während eines Zeittheilchens dt durchlaufe der Punkt das Bahntheilchen AB (Fig. 44), dieses aber gehe während derselben Zeit in die Lage CD über, indem ausser einer Verschiebung um das Stück AC noch eine Drehung um eine durch C gehende Achse erfolge. Ist nun w die Geschwindigkeit des Punktes längs der Bahnlinie oder seine scheinbare (relative) Geschwindigkeit in Bezug auf dieselbe, u die Geschwindigkeit,

Fig. 44.



mit welcher sich der Anfangspunkt A des relativen Bahntheilchens bewegt, v endlich die Geschwindigkeit der wahren (resultirenden) Bewegung von A nach D, so ist, wenn man die Sehnen $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ und $\overline{AD}$ zieht, nach dem Begriffe der Geschwindigkeit einer krummlinigen Bewegung (S. 3) $\overline{AB} = w \cdot dt$; $\overline{AC} = u \cdot dt$; $\overline{AD} = v \cdot dt$. In Folge der Drehung der Bahnlinie verändert sich nun der Winkel α zwischen den Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ auf $ACD = \alpha + d\alpha$. Daher wird, wenn man den gemeinschaftlichen Faktor dt in $w\,dt$, $u\,dt$ und $v\,dt$ fortlässt,

$$v = \sqrt{u^2 + w^2 - 2\,uw \cos(\alpha + d\alpha)}\,;$$

da aber $\cos(\alpha + d\alpha) = \cos\alpha - \sin\alpha \cdot d\alpha$, sich also von $\cos\alpha$ nur um ein unendlich kleines unterscheidet, so wird

1) $$v = \sqrt{u^2 + w^2 - 2\,uw \cos\alpha} \quad \text{und}$$

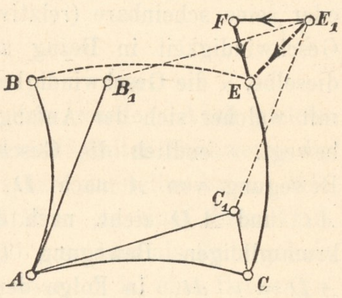
$$\sin\vartheta : \sin(\alpha + d\alpha) = w : v, \quad \text{d. h.}$$

2) $$\sin\vartheta = \frac{w}{v}\sin\alpha\,.$$

Richtung und Grösse der wahren Geschwindigkeit v ändern sich hiernach in Folge der Drehung der Bahnlinie nicht um eine endliche Grösse. Die wahre Geschwindigkeit v ist die geometrische Summe aus der scheinbaren Geschwindigkeit w und der Geschwindigkeit u, mit welcher sich der Anfangspunkt des Theilchens der scheinbaren Bahnlinie bewegt.

Anders ist es aber mit der Beschleunigung. Erfährt die Bahnlinie nur eine Verschiebung, aber keine Verdrehung, so ist, wie im 1. Theil, S. 26 bewiesen wurde, die wahre Beschleunigung die Resultirende aus der Beschleunigung des Punktes in seiner beweglichen Bahnlinie und der Beschleunigung, mit der die Verschiebung der Bahnlinie erfolgt. Dieses Ergebnis soll hier, um das Verständnis des Folgenden zu erleichtern, noch einmal mittels des Begriffes Ablenkung (Deviation) (s. S. 8) gezeigt werden. Erfolgte die Bewegung in der sich verschiebenden Bahnlinie ohne Beschleunigung, d. h. geradlinig und gleichförmig, so würde der Punkt etwa von A nach B_1 (Fig. 45) gelangen, und die Strecke $B_1 B$ ist die Ablenkung in Folge der Beschleunigung p_1 der scheinbaren Bewegung, d. h. nach Gl. 14, S. 8

Fig. 45.



$$B_1 B = \frac{p_1 dt^2}{2}.$$

Würde die Bahnlinie sich gleichförmig und geradlinig verschieben, so gelangte ihr Anfangspunkt nach C_1 anstatt nach C. Ist nun p_2 die Beschleunigung, mit welcher sich der Anfangspunkt des relativen Bahntheilchens bewegt, so ist deren Wirkung die Ablenkung $C_1 C$, d. h.

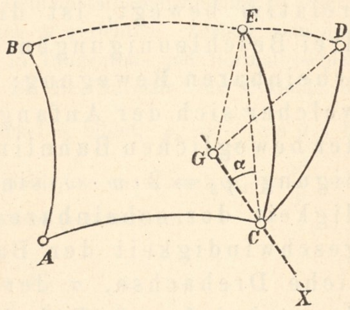
$$C_1 C = p_2 \frac{dt^2}{2}.$$

Würden beide Seitenbewegungen ohne Beschleunigung erfolgen, so müsste der Punkt die Diagonale AE_1 des aus den geraden Linien AB_1 und AC_1 gezeichneten Parallelogramms beschreiben; da er aber in Wirklichkeit nach E gelangt, so muss, wenn seine wahre Beschleunigung p genannt wird, seine wahre Ablenkung

$$E_1 E = p \frac{dt^2}{2} \quad \text{sein.}$$

Man erkennt nun leicht $E_1 E$ als geometrische Summe von $B_1 B$ und $C_1 C$. Würde man nämlich AB um die Strecke AC_1 parallel verschieben, so würde sich AB tangential an $C_1 E_1$ legen und B nach F fallen, wenn $E_1 F \parallel B_1 B$ und $E_1 F = {}^1\!/_2 p_1 dt^2$, und durch nochmalige Verschiebung um $C_1 C \#\, FE$ gelangt AB aus der (nicht gezeichneten) Zwischenlage $C_1 F$ in die Endlage CE, so dass $FE = C_1 C = {}^1\!/_2 p_2 dt^2$. Ebenso nun, wie die wahre Ablenkung $E_1 E = {}^1\!/_2 p\, dt^2$ die geometrische Summe der Seitenablenkungen ${}^1\!/_2 p_1 dt^2$ und ${}^1\!/_2 p_2 dt^2$ ist, muss auch die wahre Beschleunigung p die geometrische Summe der Seitenbeschleunigungen p_1 und p_2 sein.

Fig, 46.



Die Folge der Drehung der Bahnlinie ist nun eine Verrückung des Endpunktes der Bewegung von E nach D (Fig. 46), und diese kann als eine Ablenkung von der reinen Verschiebung, d. h. als Folge einer dritten Beschleunigung p_3 aufgefasst werden, so dass

$$ED = p_3 \frac{dt^2}{2} \quad \text{wird.}$$

Ist nun CX die augenblickliche Drehachse für die Bahnlinie, um welche sie noch gedreht werden muss, nachdem man sie (gemäss S. 24) entsprechend der Bahnlinie AC des Punktes A, verschoben hat, und fällt man von E eine Winkelrechte EG auf die Drehachse, so wird, wenn man $\measuredangle\, EGD = d\vartheta$ setzt, $ED = EG \cdot d\vartheta$. Nennt man ω die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um die Achse CX, α den Winkel, den letztere mit dem relativen Bahntheilchen CE bildet, so ist, weil $CE = w \cdot dt$, $EG = CE \cdot \sin \alpha$ $= w \cdot dt \cdot \sin \alpha$ und $d\vartheta = \omega dt$,

$$ED = p_3 \frac{dt^2}{2} = w\, dt \sin \alpha \cdot \omega\, dt = w \cdot \omega \cdot \sin \alpha \cdot dt^2.$$

Da nun diese Ablenkung in Folge der Drehung der Bahnlinie zu den vorstehend berechneten Ablenkungen $B_1 B$ und $C_1 C$ (Fig. 44) hinzukommt, so muss die gesammte Ablenkung die geometrische Summe von $B_1 B$, $C_1 C$ und ED sein; mithin wird die wahre

Beschleunigung p des Punktes die geometrische Summe der drei Beschleunigungen p_1, p_2 und p_3 oder

3) $$p = p_1,\ p_2,\ p_3,$$

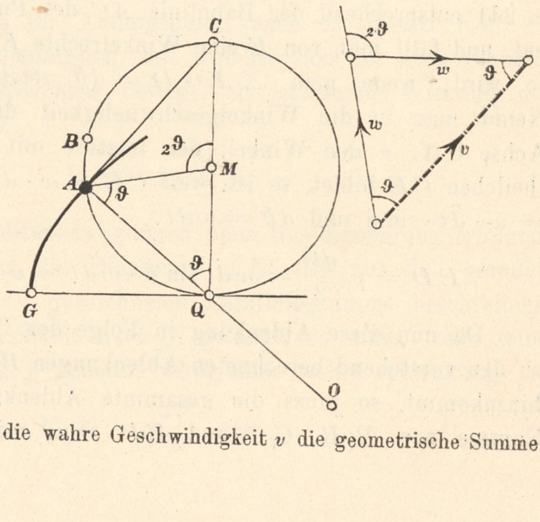
von denen die dritte den Werth hat

4) $$p_3 = 2\,w \cdot \omega \cdot \sin\alpha.$$

Daher der Satz: Die Beschleunigung eines Punktes, der sich in Bezug auf eine Bahnlinie scheinbar (relativ) bewegt, ist die geometrische Summe von drei Beschleunigungen: 1. der Beschleunigung p_1 der scheinbaren Bewegung; 2. der Beschleunigung p_2, mit welcher sich der Anfangspunkt A des Theilchens AB der beweglichen Bahnlinie bewegt; 3. einer Beschleunigung $p_3 = 2 \cdot w \cdot \omega \cdot \sin\alpha$, worin w die Geschwindigkeit der scheinbaren Bewegung, ω die Winkelgeschwindigkeit der Bahnlinie um die augenblickliche Drehachse, α der Winkel, den das Theilchen der scheinbaren Bahnlinie mit ihrer augenblicklichen Drehachse bildet; Richtung und Sinn dieser Beschleunigung p_3 stimmen überein mit Richtung und Sinn der Drehung des Endpunktes B des Bahntheilchens AB um seine augenblickliche Drehachse.

Beispiel 1: Die Rollbewegung des Kreises, bei welcher ein Punkt A desselben eine Cykloide GA (Fig. 47) beschreibt, kann zerlegt werden in eine Drehung um M mit der Umfangsgeschwindigkeit w und eine gleichzeitige Verschiebung, parallel der Geraden GQ mit derselben Geschwindigkeit w. Man kann sich also vorstellen, dass der beschreibende Punkt sich in dem Kreise von A nach B bewegt, während diese Bahnlinie sich wagerecht verschiebt. Es ist hiernach die wahre Geschwindigkeit v die geometrische Summe

Fig. 47.



aus der scheinbaren Geschwindigkeit w in der Richtung AB und der wagerechten Verschiebungsgeschwindigkeit w nach rechts. Bildet die scheinbare Geschwindigkeit w mit der Wagerechten den Winkel 2ϑ, so schliesst v mit der Wagerechten den Winkel ϑ ein und hat die Grösse

5) $$v = 2\,w \cos\vartheta .$$

Es ist in diesem Falle p_1 die Centripetalbeschleunigung $w^2 : r$; $p_2 = 0$, weil die Verschiebung der scheinbaren Kreisbahn gleichförmig und geradlinig erfolgt; p_3 ebenfalls $= 0$, weil die scheinbare Bahnlinie nur eine Verschiebung, aber keine Verdrehung erleidet, also $\omega = 0$ ist. Hiernach ist die wahre Beschleunigung p gleichbedeutend mit der Centripetalbeschleunigung $p_1 = w^2 : r$ und rechtwinklig zu AB, d. h. von A nach M gerichtet. Zerlegt man diese Beschleunigung p der Cykloidenbewegung in Tangential- und Normalbeschleunigung, so wird letztere, weil nach S. 20 die Normale zur Cykloide die Richtung AQ hat und mit AM den Winkel ϑ bildet, $p_n = \frac{w^2}{r}\cos\vartheta$. Ist aber ρ der Krümmungshalbmesser der Cykloide, so muss auch $p_n = \frac{v^2}{\rho}$ sein. Hiernach kann man den Krümmungshalbmesser ρ berechnen:

$$\rho = \frac{r\,v^2}{w^2 \cos\vartheta},$$

also nach Gl. 5 $$\rho = r \cdot 4\cos\vartheta = 2 \cdot 2\,r\cos\vartheta,$$

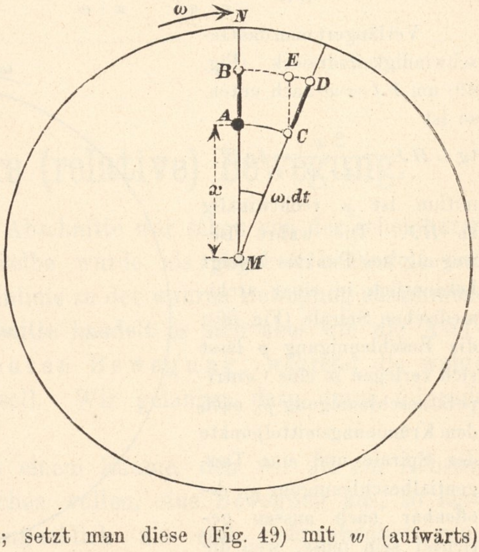
also, weil die Normale $$AQ = 2\,r\cos\vartheta:$$

6) $$\rho = 2\,\text{Norm.},$$

d. h. der Krümmungshalbmesser OA gleich der doppelten Normalen AQ.

Beispiel 2: Auf dem Halbmesser MN einer mit der Winkelgeschwindigkeit ω sich gleichförmig rechts herum drehenden Scheibe (Fig. 48) bewege sich ein Punkt mit der Geschwindigkeit w gleichmässig nach aussen. Es sollen für den Augenblick, wo der Punkt sich bei A im Abstand x von der Mitte befindet, die Geschwindigkeit v und Beschleunigung p der wahren Bewegung bestimmt werden.

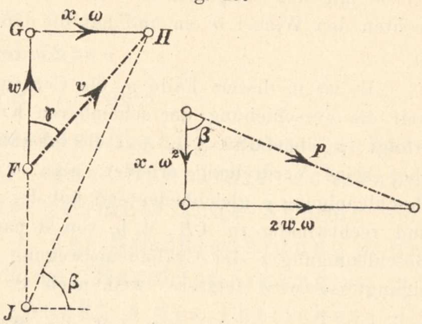
Fig. 48.



AB sei das Theilchen dx der scheinbaren Bahnlinie. Der Anfangspunkt A desselben hat eine Geschwindigkeit $x\omega$ nach rechts; setzt man diese (Fig. 49) mit w (aufwärts) zusammen, so ergiebt sich v, u. zw. schliesst v mit dem Halbmesser einen Winkel γ ein, für den

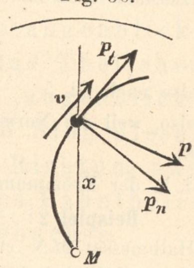
$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{x\,\omega}{w}.$$

Fig. 49.



Man hat sich im Sinne der Herleitung auf S. 39 den Übergang des Theilchens AB in die Nachbarlage CD (Fig. 48) in der Weise vorzustellen, dass man demselben eine Verschiebung um den Bogen AC in die Zwischenlage CE ertheilt denkt und nun um eine durch C gehende augenblickliche Drehachse, rechtwinklig zur Bildebene, eine Drehung von CE nach CD um den Winkel $\omega \cdot dt$ ausführt. In diesem Fall ist $p_1 = 0$, weil die scheinbare Bewegung ohne Beschleunigung erfolgt. Der Punkt A erfährt bei seiner Bewegung längs AC eine Centripetalbeschleunigung $p_2 = x \cdot \omega^2$; es ist, weil die Drehachse zur scheinbaren Bahnlinie rechtwinklig steht, in Gl. 4 $\alpha = 90^0$, daher $p_3 = 2\,w \cdot \omega$ mit dem Sinne rechtwinklig zu CE nach rechts, weil der Punkt E sich in diesem Sinne von E nach D bewegt. p (Fig. 49) schliesst mit dem Halbmesser einen Winkel β ein, für den

Fig. 50.



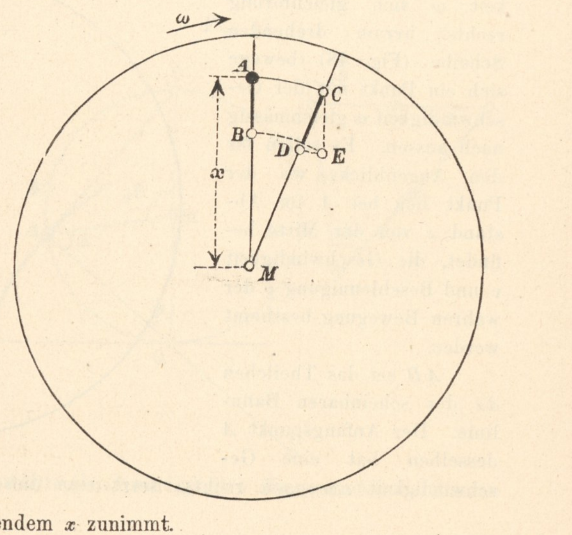
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2\,w \cdot \omega}{x \cdot \omega^2} = \frac{2\,w}{x \cdot \omega}.$$

Verlängert man das Geschwindigkeitsdreieck (Fig. 49) um $FJ = w$ nach unten, so ist

$$\operatorname{tg} GHJ = \frac{2\,w}{x \cdot \omega} = \operatorname{tg} \beta,$$

mithin ist p rechtwinklig zu HJ. Die wahre Bewegung des Punktes erfolgt bekanntlich in einer archimedischen Spirale (Fig. 50); die Beschleunigung p lässt sich zerlegen in eine Centripetalbeschleunigung p_n nach dem Krümmungsmittelpunkte der Spirale und eine Tangentialbeschleunigung p_t, die offenbar nach aussen gerichtet sein muss, weil die Geschwindigkeit v mit wachsendem x zunimmt.

Fig. 51.



Beispiel 3: Die scheinbare Bahnlinie sei ebenfalls ein Halbmesser einer sich gleichmässig drehenden Scheibe; die scheinbare Bewegung erfolge aber nicht nach aussen, sondern nach der Mitte hin (Fig. 51) mit der gleichbleibenden Geschwindigkeit w. Man findet v mittels Fig. 52. Es ist wiederum $p_1 = 0$; $p_2 = x\,\omega^2$ centripetal; $p_3 = 2\,w \cdot \omega$ aber nach links gerichtet, weil

Fig. 52.

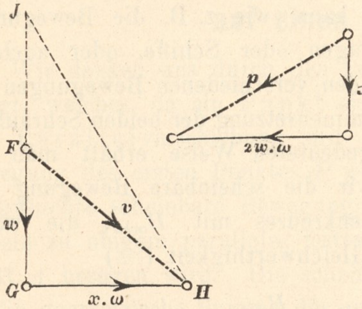
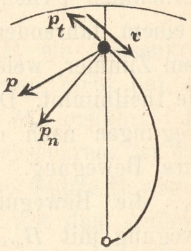


Fig. 53.



sich bei der Drehung um C der Endpunkt E von E nach D bewegt. Die Richtung von p wird wiederum rechtwinklig zu HJ in dem Geschwindigkeitsdreieck Fig. 52, an welches man $JF = w$ anreiht. Die Zerlegung von p liefert diesmal in tangentialer Richtung eine Verzögerung (Fig. 53), weil die Geschwindigkeit v mit kleiner werdendem x abnimmt. Die wahre Bahnlinie ist wiederum eine archimedische Spirale.

D. Scheinbare (relative) Bewegung.

In dem vorstehenden Abschnitte war schon von der scheinbaren Bewegung die Rede; dieselbe wurde als gegeben behandelt und mit der Bewegung der Bahnlinie zu der wahren Bewegung zusammengesetzt. In diesem Abschnitte handelt es sich aber um die Aufsuchung der scheinbaren Bewegung, während die wahre Bewegung gegeben sein soll. Wir gelangen dazu durch folgende Betrachtung.

Führt ein Körper in einem Raume, den wir als ein Achsenkreuz auffassen und bezeichen wollen, eine Bewegung aus, so lässt sich diese für jeden Augenblick als eine Schraubenbewegung