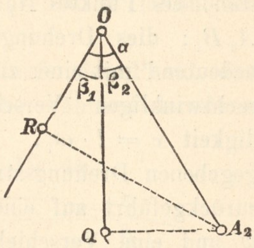
Um die Winkelgeschwindigkeit ψ der Achse OP zu erhalten, fällt man von A_2 aus die Winkelrechten A_2Q und A_2R (Fig. 41), dann muss

$$\psi \cdot \overline{QA_2} = \omega_1 \cdot \overline{RA_2} \quad \text{oder}$$

$$\psi \cdot \overline{OA_2} \cdot \sin\beta_2 = \omega_1 \cdot \overline{OA_2} \cdot \sin\alpha, \quad \text{d. h.}$$

$$9) \quad \psi = \omega_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta_2} = \omega_2 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta_1} \quad \text{sein.}$$

Fig. 41.

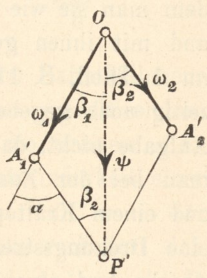


Es lässt sich aber zeigen, dass nicht nur parallele, sondern auch *sich schneidende* Drehungsstrecken wie Einzelkräfte zusammengesetzt und zerlegt werden können, dass also für Drehungsstrecken der Satz vom Parallelogramm (1. Theil, S. 38) gültig ist. Konstruirt man nämlich (Fig. 42) aus $OA_1' = \omega_1$ und $OA_2' = \omega_2$ ein Parallelogramm, so ist dessen Diagonale die gesuchte Drehungsstrecke ψ nach Grösse, Richtung und Sinn. Denn es ist in dem Dreieck $OA_1'P'$

$$10) \quad \sin\beta_1 : \sin\beta_2 : \sin\alpha = \omega_2 : \omega_1 : \psi,$$

was den Gl. 8 und 9 entspricht.

Fig. 42.

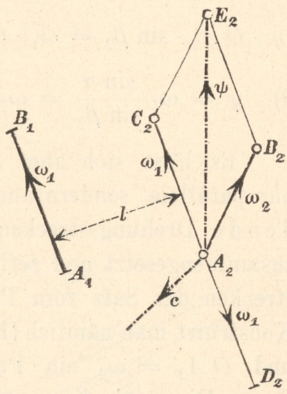


Wie aus dem Satze vom Parallelogramm der Kräfte der Satz vom Parallelepiped, vom Vieleck und der geometrischen Summe der Kräfte hergeleitet wurde (1. Theil, S. 39—41), so kann dies auch hier bezüglich der Drehungsstrecken in gleicher Weise geschehen.

4. Drehungen um Achsen, die nicht in derselben Ebene liegen.

Sind (Fig. 43) $A_1B_1 = \omega_1$ und $A_2B_2 = \omega_2$ zwei zu einander windschiefe Drehungsstrecken, so lege man durch A_2 zwei Drehungsstrecken A_2C_2 und A_2D_2, beide $=$ und $\parallel A_1B_1$, aber unter sich von entgegengesetztem Sinne. Diese beiden heben sich gegenseitig auf, denn zwei gleiche entgegengesetzte Drehungen um dieselbe Achse tilgen sich gegenseitig. A_2B_2 und A_2C_2 lassen sich nach dem Parallelogrammgesetze zu einer Drehungsachse $A_2E_2 = \psi$ vereinigen. A_1B_1 und A_2D_2 aber bilden ein Drehungspaar von dem Momente $l \cdot \omega_1$, wenn l der Abstand des Punktes A_2 von der Richtung A_1B_1; dies Drehungspaar ist gleichbedeutend mit einer zur Ebene $B_1A_1A_2$ rechtwinkligen Verschiebungsgeschwindigkeit $c = l \cdot \omega_1$. Hiermit sind die gegebenen Drehungsstrecken ω_1 und ω_2 zurückgeführt auf eine Drehungsstrecke ψ und eine Verschiebungsgeschwindigkeit c.

Fig. 43.



Auf Grund dieses Verfahrens kann man beliebig viele im Raume zerstreute Drehungsstrecken zusammensetzen, indem man sie wie Einzelkräfte behandelt und mit ihnen genau so verfährt, wie im 1. Theil, S. 111 ausführlich beschrieben wurde. Auch gleichzeitig noch gegebene Verschiebungsgeschwindigkeiten erschweren die Aufgabe nicht, da man sie als Drehungspaare darstellen kann. Wie man bei der Zusammensetzung von Kräften zu einer Einzelkraft und einem Kräftepaare gelangt, so erhält man hier als Endergebnis eine Drehungsstrecke und ein Drehungspaar, d. h. eine Drehungsstrecke und eine Verschiebungsgeschwindigkeit; und wie man dort durch geeignete Parallelverschiebung der Einzelkraft erreichen konnte, dass die Kräftepaarsachse so klein wie möglich und parallel der Einzelkraft wurde, so kann man in entsprechender Weise auch hier dazu gelangen, dass die Verschiebungsgeschwindigkeit so klein wie möglich und parallel der Drehungsstrecke werde, d. h. dass schliesslich eine Schraubenbewegung entsteht. Die Achse der Schraubenbewegung entspricht also der Centralachse (1. Theil, S. 115) einer Kräftegruppe.

5. Bewegung eines Punktes in einer Bahnlinie mit beliebiger Bewegung.

Wenn ein Punkt sich in einer beliebigen Bahnlinie bewegt, die selbst eine Verschiebung erleidet, so gilt nach 1. Theil S. 26