zur Bestimmung der Lage eines Körpers nicht neun, sondern nur sechs Stücke erforderlich sind.

Sämmtliche Punkte der Schraubenachse haben Geschwindigkeiten von der übereinstimmenden Grösse c, deren Richtungen sämmtlich in diese Achse fallen, weil die Drehungshalbmesser r Null sind. Legt man durch den Körper irgend eine Gerade, welche der Schraubenachse parallel ist, so haben deren Punkte wohl auch Geschwindigkeiten gleicher Grösse und Richtung, doch bildet letztere mit der Schraubenachse einen Winkel α, für den $\operatorname{tg} \alpha = \frac{r\omega}{c}$, der also von Null verschieden ist. Legt man aber durch den Körper eine Gerade, die mit der Schraubenachse nicht parallel ist, deren Punkte also verschiedene Abstände von der Schraubenachse haben, so sind die Geschwindigkeiten dieser Punkte nach Grösse und Richtung verschieden. Hiernach kommt die kennzeichnende Eigenschaft der Schraubenachse, dass die Geschwindigkeiten aller ihrer Punkte in der Richtung der Achse liegen, nur der einen Geraden zu. Während also der augenblickliche Bewegungszustand eines Körpers (nach S. 25) in unendlich vielen verschiedenen Weisen auf eine Verschiebung und eine Drehung zurückgeführt werden kann, ist die Zurückführung auf eine Schraubenbewegung nur in *einer* Weise möglich. Daher hat man den Satz:

Jede Bewegung eines Körpers kann für einen Augenblick, und zwar nur in einer Weise, auf eine Schraubenbewegung zurückgeführt werden.

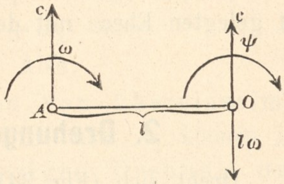
C. Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen eines Körpers.

I. Drehung und Verschiebung.

Ein Körper habe eine Drehung um eine Achse A mit einer Winkelgeschwindigkeit ω und erleide gleichzeitig eine Verschiebung in einer Richtung, rechtwinklig zu der Achse, mit der Geschwindigkeit c (Fig. 33). Dieser Fall kommt z. B. vor, wenn sich ein

Rad um eine Achse dreht, die Achse aber nicht festliegt, sondern verschoben wird. (Ein besonderer Fall hiervon ist jedes rollende Rad.) Schneidet man den Körper durch eine zur Achse A rechtwinklige Ebene E, so bewegt sich die Schnittfigur nur in ihrer Ebene; es ist daher diese zusammengesetzte Bewegung eine ebene Bewegung, die nach S. 14 für jeden Augenblick als Drehung um einen Pol O oder um eine rechtwinklig zur Ebene stehende Achse O aufgefasst werden kann. Legt man durch A in der Ebene E eine Gerade $AO = l$, rechtwinklig zu c, so bekommt der Endpunkt O in Folge der Winkelgeschwindigkeit ω eine Geschwindigkeit $l\omega$ nach unten, in Folge der Verschiebungsgeschwindigkeit c, an der alle Punkte übereinstimmend theilnehmen, eine Geschwindigkeit c nach oben. Ist nun

Fig. 33.



1) $$l\omega = c,$$

so wird die Geschwindigkeit in O zu Null; hierdurch kennzeichnet sich der Pol O und die in O rechtwinklig zur Bildebene errichtete augenblickliche Drehachse. Nennt man ψ die zu suchende Winkelgeschwindigkeit um O, so muss ψ derartig bestimmt werden, dass daraus der gegebene Geschwindigkeitszustand wieder hervorgeht. Die mit der Achse A zusammenfallenden Punkte des Körpers hatten aber nur die Geschwindigkeit c, rechtwinklig zu OA; durch ψ bekommen sie eine Geschwindigkeit $l\psi$ in derselben Richtung mit c, daher muss

$$l\psi = c$$

sein, und weil auch $l\omega = c$ (Gl. 1), so wird

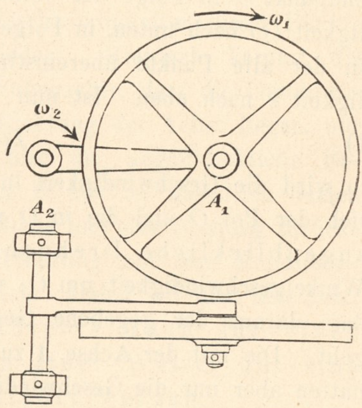
2) $$l = \frac{c}{w} \quad \text{und} \quad \psi = \omega.$$ Das heisst:

Eine Drehung um eine Achse A mit der Winkelgeschwindigkeit ω und einer gleichzeitigen Verschiebung rechtwinklig zu O mit der Geschwindigkeit c lassen sich zu einer einzigen Drehung um eine Achse $O \parallel A$ mit der Winkelgeschwindigkeit ω zusammensetzen. A und O liegen in einer zu c rechtwinkligen Ebene; ihr Abstand ist $l = c : w$. Umgekehrt lässt sich natürlich eine Drehung um O mit der Winkelgeschwindigkeit ω zerlegen in eine Drehung um eine zu O parallele Achse A im Abstande l von O mit derselben Winkelgeschwindigkeit ω und eine gleichzeitige Verschiebung rechtwinklig zu der durch O und A gelegten Ebene mit der Geschwindigkeit $c = l\omega$.

2. Drehungen um parallele Achsen.

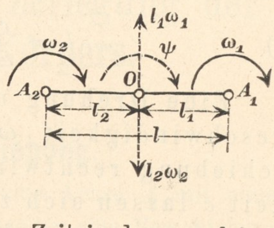
Dreht sich (Fig. 34) ein Körper, vielleicht ein Rad, um eine Achse A_1 mit einer Winkelgeschwindigkeit ω_1, befindet sich aber die Achse A_1 an einem Kurbelarme von der Länge l, der sich zugleich mit der Geschwindigkeit ω_2 um eine Achse A_2 dreht, so hat der Körper eine von beiden Drehungen beeinflusste Bewegung, die aber, weil sie eine ebene Bewegung ist, in jedem Augenblick auf eine einzige Drehung um eine Achse O zurückgeführt werden kann.

Fig. 34.



Haben ω_1 und ω_2 übereinstimmenden Drehsinn, so wähle man in der durch A_1 und A_2 gehenden Ebene (Fig. 35) eine zu beiden parallele Achse O, welche von A_1 und A_2 die Abstände l_1 und l_2 hat; diese Achse empfängt von ω_1 eine Geschwindigkeit $l_1\omega_1$ aufwärts, von ω_2 eine Geschwindigkeit $l_2\omega_2$ abwärts. Die Gesammtgeschwindigkeit der Achse O ist also Null, wenn

Fig. 35.



$$3)\qquad l_1\omega_1 = l_2\omega_2 \quad \text{oder} \quad \frac{l_1}{l_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Hierdurch ist die augenblickliche Drehachse gefunden. Für ihre Winkelgeschwindigkeit ψ ist Bedingung, dass die zur Zeit in den gegebenen Achsen befindlich gedachten Körperpunkte ihre wahren Geschwindigkeiten wiedererhalten. A_1 bekommt durch ω_2 eine Geschwindigkeit

$(l_1 + l_2)\omega_2$, durch ψ eine Geschwindigkeit $l_1 \cdot \psi$. Ein Körperpunkt A_2 würde durch ω_1 eine Geschwindigkeit $(l_1 + l_2)\omega_1$, durch ψ eine Geschwindigheit $l_2\psi$ erhalten. Daher muss stattfinden:

$$l_1\psi = (l_1 + l_2)\omega_2 \quad \text{uud} \quad l_2\psi = (l_1 + l_2)\omega_1, \text{ d. h.}$$

$$(l_1 + l_2)\psi = (l_1 + l_2)(\omega_1 + \omega_2) \quad \text{oder}$$

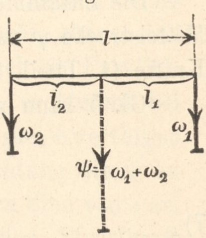
4) $$\psi = \omega_1 + \omega_2. \quad \text{Also:}$$

Zwei gleichzeitige Drehungen von übereinstimmendem Sinn um Parallelachsen A_1 und A_2 können in jedem Augenblicke zu einer einzigen Drehung um eine in der Ebene der A_1 und A_2, zwischen beiden liegende und zu ihnen parallele Achse O ersetzt werden. Die Abstände l_1 und l_2 der augenblicklichen Drehachse O von den beiden gegebenen verhalten sich umgekehrt wie die entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten. Die Winkelgeschwindigkeit um O ist gleich der Summe der beiden gegebenen.

Für die vorstehende Entwickelung ist es gleichgültig, ob sich der Körper in erster Linie mit ω_1 um A_1 und in zweiter Linie mit ω_2 um A_2 dreht, oder umgekehrt.

Eine Drehung um eine Achse mit einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit und einem bestimmten Drehsinne lässt sich durch eine **Drehungsstrecke** darstellen, indem man auf der Achse eine Länge abträgt, die nach einem bestimmten Mafsstabe die Winkelgeschwindigkeit ausdrückt, und indem man ferner auf der Achse eine Pfeilspitze so anbringt, dass man, gegen die Spitze sehend, den Drehsinn positiv, rechts herum, im Sinne der Zeigerbewegung einer Uhr, erblickt. Geschieht dies, so kann man behufs der Zusammensetzung der Winkelgeschwindigkeiten die Drehungsstrecken wie Einzelkräfte behandeln und nach den dafür im 1. Theil, S. 111 entwickelten Regeln zusammensetzen und zerlegen.

Fig. 36.



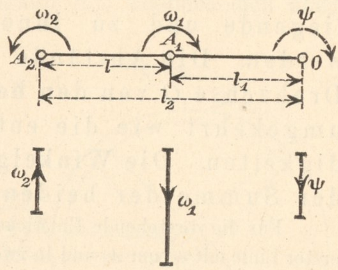
Die in Figur 35 durch Drehungspfeile gezeichneten Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 bilden nach vorstehender Erklärung zwei parallele Drehungsstrecken ω_1 und ω_2 gleichen Sinnes im Abstande l (Fig. 36). Die Mittelstrecke ist nach 1. Theil, S. 103, gleich der Summe der gegebenen, liegt mit ω_1 und ω_2 in derselben Ebene zwischen beiden und ist mit ihnen parallel. Ihre Abstände von den gegebenen Drehungsstrecken verhalten sich umgekehrt wie diese Strecken, d. h.

$$l_1 : l_2 = \omega_2 : \omega_1 .$$

Die so erhaltene Mittelstrecke $\psi = \omega_1 + \omega_2$ entspricht genau dem Ergebnisse der Zusammensetzung der Winkelgeschwindigkeiten auf Seite 31.

Ist der Drehsinn von ω_1 dem von ω_2 entgegengesetzt (Fig. 37), so liegt die augenblickliche Drehachse O auch in der Ebene der A_1 und A_2 und zu ihnen parallel, aber nicht zwischen ihnen, sondern ausserhalb derselben, u. zw. auf der Seite der Achse mit der grösseren Winkelgeschwindigkeit. Wählt man nämlich für $\omega_1 > \omega_2$ rechts von A_1 eine Achse O mit den Abständen l_1 und l_2 von A_1 und A_2, so empfängt O vermöge ω_1 eine Geschwindigkeit $l_1 \omega_1$ abwärts, vermöge ω_2 eine Geschwindigkeit $l_2 \omega_2$ aufwärts, so dass die Gesammtgeschwindigkeit von O wiederum Null wird für

Fig. 37.



5) $$l_1 \omega_1 = l_2 \omega_2 \text{ oder } \frac{l_1}{l_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Für die Winkelgeschwindigkeit ψ der augenblicklichen Drehachse O gilt wieder

$$l_2 \psi = \omega_1 l = \omega_1 (l_2 - l_1)$$
$$l_1 \psi = \omega_2 l = \omega_2 (l_2 - l_1) \text{ also}$$
$$(l_2 - l_1) \psi = (\omega_1 - \omega_2)(l_2 - l_1), \text{ d. h.}$$

6) $$\psi = \omega_1 - \omega_2 .$$

Die Zusammensetzung der Drehungsstrecken ω_1 und ω_2 zu einer Mittelstrecke ψ nach der Lehre von der Zusammensetzung paralleler Kräfte (1. Theil, S. 104) liefert nach Fig. 37 dasselbe Ergebnis.

Gl. 5 kann man auch schreiben:

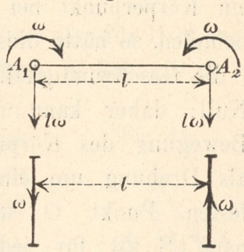
$$\frac{l_1}{l_2 - l_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_2} \text{ oder}$$

7) $$l_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_2} l .$$

Stellt man sich nun vor, dass ω_2 unverändert bleibt, dass aber das ursprünglich grössere ω_1 sich allmählich ω_2 nähert, so dass

$\psi = \omega_1 - \omega_2$ mehr und mehr gegen Null geht, so wird l_1 grösser und grösser, und im Grenzfalle $\omega_1 = \omega_2$ wird $\psi = 0$ und $l_1 = \infty$, d. h. für zwei gleiche und entgegengesetzte Winkelgeschwindigkeiten um Parallelachsen giebt es keine in der Endlichkeit liegende augenblickliche Drehachse (ebenso wenig, wie zwei gleiche Parallelkräfte entgegengesetzten Sinnes eine in der Endlichkeit liegende Mittelkraft haben). Zwei solche gleiche parallele Drehungsstrecken entgegengesetzten Sinnes nennt man ein **Drehungspaar** (entsprechend der Bezeichnung *Kräftepaar*, 1. Theil, S. 105). Da es gleichwerthig ist einer Drehung um eine unendlich ferne Gerade in der Ebene des Drehungspaares, und da in Bezug auf eine unendlich ferne Achse alle Drehungshalbmesser in dem Verhältnis Eins zu einander stehen, so haben alle Punkte des Körpers Geschwindigkeiten von gleicher Grösse c, rechtwinklig zur Ebene des Drehungspaares. Die Geschwindigkeit c ergiebt sich einfach durch Beobachtung der Geschwindigkeit der Punkte der Achse A_1 (Fig. 38), nämlich $c = l\omega$ nach unten, ebenso für A_2 zu $c = l\omega$ nach unten.

Fig. 38.



Ein Drehungspaar ist gleichwerthig einer Verschiebung, rechtwinklig zur Ebene des Paares. Das Produkt aus der Winkelgeschwindigkeit ω und dem Abstand l der beiden Achsen heisst das Moment des Paares und bezeichnet die Grösse $c = l\omega$ der Verschiebungs-Geschwindigkeit. Da die Verschiebungs-Geschwindigkeit c allen Punkten des Körpers gemeinsam ist, c also keine bestimmte Lage hat, so haben auch die Achsen eines Drehungspaares keine bestimmte Lage, können vielmehr, ebenso wie Kräftepaare, nicht nur in ihrer Ebene, sondern auch in Parallelebenen beliebig verschoben und verwandelt werden; es kommt bei ihnen nur auf die Grösse ihres Momentes, d. h. der gleichwerthigen Verschiebungs-Geschwindigkeit $c = l\omega$, auf die Richtung dieser zu ihren Ebenen rechtwinkligen Geschwindigkeit c und den Sinn von c an. Eine einzelne Drehungsstrecke dagegen hat wie eine Einzelkraft (s. 1. Theil, S. 109) eine bestimmte Lage. Jede Verschiebungs-Geschwindigkeit kann durch ein Drehungspaar ausgedrückt werden.

3. Drehungen um sich schneidende Achsen.

Dreht sich der Körper K um die Achse OA_2 (Fig. 39) und diese wieder um die Achse OA_1, so sagt man, der Körper habe gleichzeitig zwei Drehungen um OA_1 und OA_2 mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2, welche in Fig. 40 als Drehungsstrecken aufgetragen sind. Würde sich ein Körperpunkt bei O befinden, so hätte dieser die Geschwindigkeit Null; daher kann die Bewegung des Körpers als Drehung um einen festen Punkt O und nach S. 23 für jeden Augenblick als Drehung um eine durch O gehende augenblickliche Drehachse OP aufgefasst werden. Es ist die Richtung von OP und ihre Winkelgeschwindigkeit ψ zu bestimmen, u. zw. im Hinblick darauf, dass ein beliebiger Punkt P der Achse die Geschwindigkeit Null hat. Wählt man OP in der Ebene OA_1A_2 und hat der Punkt P von OA_1 uud OA_2 die rechtwinkligen Abstände x_1 und x_2, so bekommt P durch ω_1 eine Geschwindigkeit $x_1\omega_1$ nach unten, durch ω_2 eine Geschwindigkeit $x_2\omega_2$ nach oben; ist also $x_1\omega_1 = x_2\omega_2$, so hat P die Gesammtgeschwindigkeit Null. Nennt man die Winkel der OP mit OA_1 und OA_2 bezw. β_1 und β_2, ihre Summe $\beta_1 + \beta_2 = \alpha$, so ist

Fig. 39.

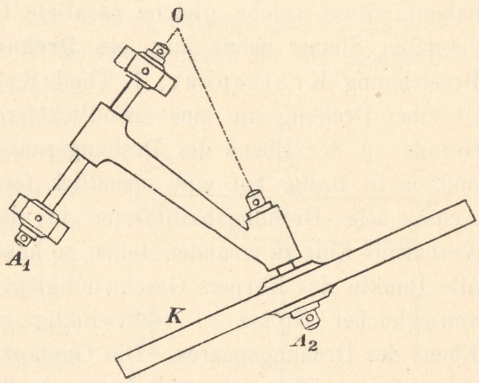
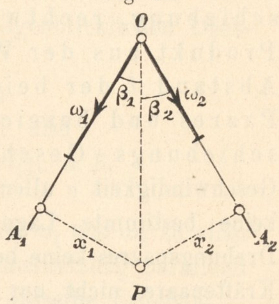


Fig. 40.



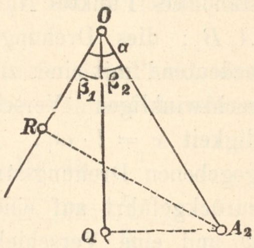
$$x_1 = OP \sin\beta_1; \quad x_2 = OP \sin\beta_2,$$

daher muss $$\omega_1 \sin\beta_1 = \omega_2 \sin\beta_2, \quad \text{d. h.}$$

8) $$\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad \text{sein.}$$

Um die Winkelgeschwindigkeit ψ der Achse OP zu erhalten, fällt man von A_2 aus die Winkelrechten A_2Q und A_2R (Fig. 41), dann muss

Fig. 41.



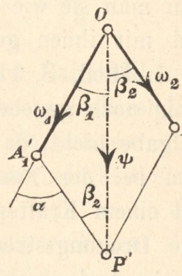
$$\psi \cdot \overline{QA_2} = \omega_1 \cdot \overline{RA_2} \quad \text{oder}$$

$$\psi \cdot \overline{OA_2} \cdot \sin\beta_2 = \omega_1 \cdot \overline{OA_2} \cdot \sin\alpha, \quad \text{d. h.}$$

$$9) \quad \psi = \omega_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta_2} = \omega_2 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta_1} \quad \text{sein.}$$

Es lässt sich aber zeigen, dass nicht nur parallele, sondern auch sich schneidende Drehungsstrecken wie Einzelkräfte zusammengesetzt und zerlegt werden können, dass also für Drehungsstrecken der Satz vom Parallelogramm (1. Theil, S. 38) gültig ist. Konstruirt man nämlich (Fig. 42) aus $OA_1' = \omega_1$ und $OA_2' = \omega_2$ ein Parallelogramm, so ist dessen Diagonale die gesuchte Drehungsstrecke ψ nach Grösse, Richtung und Sinn. Denn es ist in dem Dreieck $OA_1'P'$

Fig. 42.



$$10) \quad \sin\beta_1 : \sin\beta_2 : \sin\alpha = \omega_2 : \omega_1 : \psi,$$

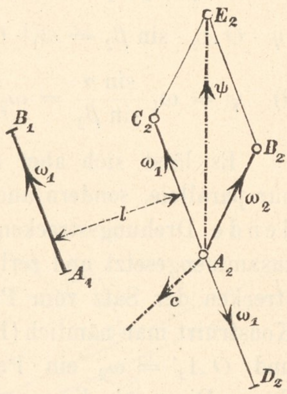
was den Gl. 8 und 9 entspricht.

Wie aus dem Satze vom Parallelogramm der Kräfte der Satz vom Parallelepiped, vom Vieleck und der geometrischen Summe der Kräfte hergeleitet wurde (1. Theil, S. 39—41), so kann dies auch hier bezüglich der Drehungsstrecken in gleicher Weise geschehen.

4. Drehungen um Achsen, die nicht in derselben Ebene liegen.

Sind (Fig. 43) $A_1B_1 = \omega_1$ und $A_2B_2 = \omega_2$ zwei zu einander windschiefe Drehungsstrecken, so lege man durch A_2 zwei Drehungsstrecken A_2C_2 und A_2D_2, beide $=$ und $\parallel A_1B_1$, aber unter sich von entgegengesetztem Sinne. Diese beiden heben sich gegenseitig auf, denn zwei gleiche entgegengesetzte Drehungen um dieselbe Achse tilgen sich gegenseitig. A_2B_2 und A_2C_2 lassen sich nach dem Parallelogrammgesetze zu einer Drehungsachse $A_2 E_2 = \psi$ vereinigen. $A_1 B_1$ und $A_2 D_2$ aber bilden ein Drehungspaar von dem Momente $l \cdot \omega_1$, wenn l der Abstand des Punktes A_2 von der Richtung $A_1 B_1$; dies Drehungspaar ist gleichbedeutend mit einer zur Ebene $B_1 A_1 A_2$ rechtwinkligen Verschiebungsgeschwindigkeit $c = l \cdot \omega_1$. Hiermit sind die gegebenen Drehungsstrecken ω_1 und ω_2 zurückgeführt auf eine Drehungsstrecke ψ und eine Verschiebungsgeschwindigkeit c.

Fig. 43.



Auf Grund dieses Verfahrens kann man beliebig viele im Raume zerstreute Drehungsstrecken zusammensetzen, indem man sie wie Einzelkräfte behandelt und mit ihnen genau so verfährt, wie im 1. Theil, S. 111 ausführlich beschrieben wurde. Auch gleichzeitig noch gegebene Verschiebungsgeschwindigkeiten erschweren die Aufgabe nicht, da man sie als Drehungspaare darstellen kann. Wie man bei der Zusammensetzung von Kräften zu einer Einzelkraft und einem Kräftepaare gelangt, so erhält man hier als Endergebnis eine Drehungsstrecke und ein Drehungspaar, d. h. eine Drehungsstrecke und eine Verschiebungsgeschwindigkeit; und wie man dort durch geeignete Parallelverschiebung der Einzelkraft erreichen konnte, dass die Kräftepaarsachse so klein wie möglich und parallel der Einzelkraft wurde, so kann man in entsprechender Weise auch hier dazu gelangen, dass die Verschiebungsgeschwindigkeit so klein wie möglich und parallel der Drehungsstrecke werde, d. h. dass schliesslich eine Schraubenbewegung entsteht. Die Achse der Schraubenbewegung entspricht also der Centralachse (1. Theil, S. 115) einer Kräftegruppe.

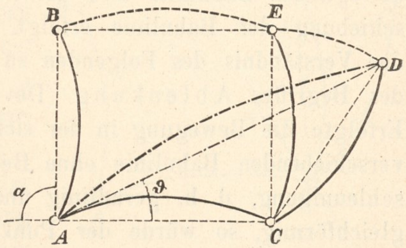
5. Bewegung eines Punktes in einer Bahnlinie mit beliebiger Bewegung.

Wenn ein Punkt sich in einer beliebigen Bahnlinie bewegt, die selbst eine Verschiebung erleidet, so gilt nach 1. Theil S. 26

für die wahre Bewegung des Punktes, sowie auch für die Geschwindigkeit und die Beschleunigung derselben einfach das Parallelogrammgesetz. Das Ergebnis wird aber zum Theil ein anderes, wenn die Bahnlinie eine **beliebige** Bewegung ausführt, d. h. neben der Verschiebung auch eine Drehung erleidet.

Während eines Zeittheilchens dt durchlaufe der Punkt das Bahntheilchen AB (Fig. 44), dieses aber gehe während derselben Zeit in die Lage CD über, indem ausser einer Verschiebung um das Stück AC noch eine Drehung um eine durch C gehende Achse erfolge. Ist nun w die Geschwindigkeit des Punktes längs der Bahnlinie oder seine scheinbare (relative) Geschwindigkeit in Bezug auf dieselbe, u die Geschwindigkeit,

Fig. 44.



mit welcher sich der Anfangspunkt A des relativen Bahntheilchens bewegt, v endlich die Geschwindigkeit der wahren (resultirenden) Bewegung von A nach D, so ist, wenn man die Sehnen $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ und $\overline{AD}$ zieht, nach dem Begriffe der Geschwindigkeit einer krummlinigen Bewegung (S. 3) $\overline{AB} = w \cdot dt$; $\overline{AC} = u \cdot dt$; $\overline{AD} = v \cdot dt$. In Folge der Drehung der Bahnlinie verändert sich nun der Winkel α zwischen den Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ auf $ACD = \alpha + d\alpha$. Daher wird, wenn man den gemeinschaftlichen Faktor dt in $w\,dt$, $u\,dt$ und $v\,dt$ fortlässt,

$$v = \sqrt{u^2 + w^2 - 2uw\cos(\alpha + d\alpha)};$$

da aber $\cos(\alpha + d\alpha) = \cos\alpha - \sin\alpha \cdot d\alpha$, sich also von $\cos\alpha$ nur um ein unendlich kleines unterscheidet, so wird

1) $$v = \sqrt{u^2 + w^2 - 2uw\cos\alpha} \quad \text{und}$$

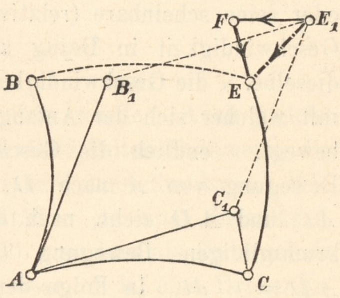
$$\sin\vartheta : \sin(\alpha + d\alpha) = w : v, \quad \text{d. h.}$$

2) $$\sin\vartheta = \frac{w}{v}\sin\alpha.$$

Richtung und Grösse der wahren Geschwindigkeit v ändern sich hiernach in Folge der Drehung der Bahnlinie nicht um eine endliche Grösse. **Die wahre Geschwindigkeit** v **ist die** geometrische Summe aus der scheinbaren Geschwindigkeit w und der Geschwindigkeit u, mit welcher sich der Anfangspunkt des Theilchens der scheinbaren Bahnlinie bewegt.

Anders ist es aber mit der Beschleunigung. Erfährt die Bahnlinie nur eine Verschiebung, aber keine Verdrehung, so ist, wie im 1. Theil, S. 26 bewiesen wurde, die wahre Beschleunigung die Resultirende aus der Beschleunigung des Punktes in seiner beweglichen Bahnlinie und der Beschleunigung, mit der die Verschiebung der Bahnlinie erfolgt. Dieses Ergebnis soll hier, um das Verständnis des Folgenden zu erleichtern, noch einmal mittels des Begriffes Ablenkung (Deviation) (s. S. 8) gezeigt werden. Erfolgte die Bewegung in der sich verschiebenden Bahnlinie ohne Beschleunigung, d. h. geradlinig und gleichförmig, so würde der Punkt etwa von A nach B_1 (Fig. 45) gelangen, und die Strecke $B_1 B$ ist die Ablenkung in Folge der Beschleunigung p_1 der scheinbaren Bewegung, d. h. nach Gl. 14, S. 8

Fig. 45.



$$B_1 B = \frac{p_1 dt^2}{2}.$$

Würde die Bahnlinie sich gleichförmig und geradlinig verschieben, so gelangte ihr Anfangspunkt nach C_1 anstatt nach C. Ist nun p_2 die Beschleunigung, mit welcher sich der Anfangspunkt des relativen Bahntheilchens bewegt, so ist deren Wirkung die Ablenkung $C_1 C$, d. h.

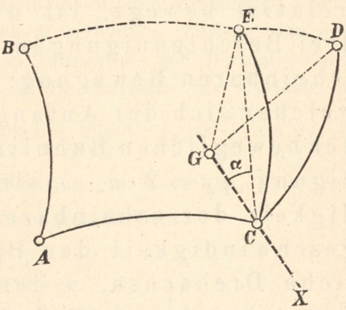
$$C_1 C = p_2 \frac{dt^2}{2}.$$

Würden beide Seitenbewegungen ohne Beschleunigung erfolgen, so müsste der Punkt die Diagonale AE_1 des aus den geraden Linien AB_1 und AC_1 gezeichneten Parallelogramms beschreiben; da er aber in Wirklichkeit nach E gelangt, so muss, wenn seine wahre Beschleunigung p genannt wird, seine wahre Ablenkung

$$E_1 E = p \frac{dt^2}{2} \text{ sein.}$$

Man erkennt nun leicht $E_1 E$ als geometrische Summe von $B_1 B$ und $C_1 C$. Würde man nämlich AB um die Strecke AC_1 parallel verschieben, so würde sich AB tangential an $C_1 E_1$ legen und B nach F fallen, wenn $E_1 F \parallel B_1 B$ und $E_1 F = {}^1\!/_2 p_1 dt^2$, und durch nochmalige Verschiebung um $C_1 C \#\, FE$ gelangt AB aus der (nicht gezeichneten) Zwischenlage $C_1 F$ in die Endlage CE, so dass $FE = C_1 C = {}^1\!/_2 p_2 dt^2$. Ebenso nun, wie die wahre Ablenkung $E_1 E = {}^1\!/_2 p\, dt^2$ die geometrische Summe der Seitenablenkungen ${}^1\!/_2 p_1 dt^2$ und ${}^1\!/_2 p_2 dt^2$ ist, muss auch die wahre Beschleunigung p die geometrische Summe der Seitenbeschleunigungen p_1 und p_2 sein.

Fig, 46.



Die Folge der Drehung der Bahnlinie ist nun eine Verrückung des Endpunktes der Bewegung von E nach D (Fig. 46), und diese kann als eine Ablenkung von der reinen Verschiebung, d. h. als Folge einer dritten Beschleunigung p_3 aufgefasst werden, so dass

$$ED = p_3 \frac{dt^2}{2} \quad \text{wird.}$$

Ist nun CX die augenblickliche Drehachse für die Bahnlinie, um welche sie noch gedreht werden muss, nachdem man sie (gemäss S. 24) entsprechend der Bahnlinie AC des Punktes A, verschoben hat, und fällt man von E eine Winkelrechte EG auf die Drehachse, so wird, wenn man $\measuredangle\, EGD = d\vartheta$ setzt, $ED = EG \cdot d\vartheta$. Nennt man ω die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um die Achse CX, α den Winkel, den letztere mit dem relativen Bahntheilchen CE bildet, so ist, weil $CE = w \cdot dt$, $EG = CE \cdot \sin\alpha = w \cdot dt \cdot \sin\alpha$ und $d\vartheta = \omega dt$,

$$ED = p_3 \frac{dt^2}{2} = w\, dt \sin\alpha \cdot \omega\, dt = w \cdot \omega \cdot \sin\alpha \cdot dt^2.$$

Da nun diese Ablenkung in Folge der Drehung der Bahnlinie zu den vorstehend berechneten Ablenkungen $B_1 B$ und $C_1 C$ (Fig. 44) hinzukommt, so muss die gesammte Ablenkung die geometrische Summe von $B_1 B$, $C_1 C$ und ED sein; mithin wird die wahre

Beschleunigung p des Punktes die geometrische Summe der drei Beschleunigungen p_1, p_2 und p_3 oder

3) $$p = p_1,\ p_2,\ p_3,$$

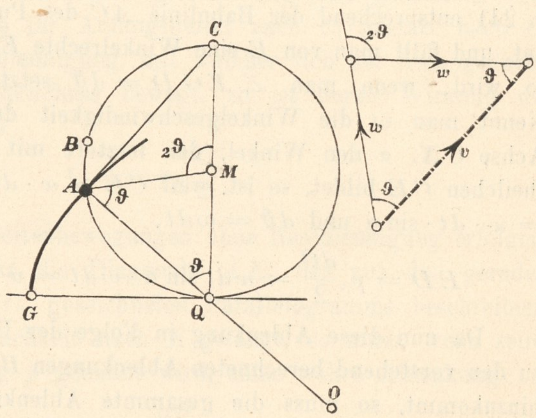
von denen die dritte den Werth hat

4) $$p_3 = 2\,w \cdot \omega \cdot \sin \alpha.$$

Daher der Satz: Die Beschleunigung eines Punktes, der sich in Bezug auf eine Bahnlinie scheinbar (relativ) bewegt, ist die geometrische Summe von drei Beschleunigungen: 1. der Beschleunigung p_1 der scheinbaren Bewegung; 2. der Beschleunigung p_2, mit welcher sich der Anfangspunkt A des Theilchens AB der beweglichen Bahnlinie bewegt; 3. einer Beschleunigung $p_3 = 2 \cdot w \cdot \omega \cdot \sin \alpha$, worin w die Geschwindigkeit der scheinbaren Bewegung, ω die Winkelgeschwindigkeit der Bahnlinie um die augenblickliche Drehachse, α der Winkel, den das Theilchen der scheinbaren Bahnlinie mit ihrer augenblicklichen Drehachse bildet; Richtung und Sinn dieser Beschleunigung p_3 stimmen überein mit Richtung und Sinn der Drehung des Endpunktes B des Bahntheilchens AB um seine augenblickliche Drehachse.

Beispiel 1: Die Rollbewegung des Kreises, bei welcher ein Punkt A desselben eine Cykloide GA (Fig. 47) beschreibt, kann zerlegt werden in eine Drehung um M mit der Umfangsgeschwindigkeit w und eine gleichzeitige Verschiebung, parallel der Geraden GQ mit derselben Geschwindigkeit w. Man kann sich also vorstellen, dass der beschreibende Punkt sich in dem Kreise von A nach B bewegt, während diese Bahnlinie sich wagerecht verschiebt. Es ist hiernach die wahre Geschwindigkeit v die geometrische Summe

Fig. 47.



aus der scheinbaren Geschwindigkeit w in der Richtung AB und der wagerechten Verschiebungsgeschwindigkeit w nach rechts. Bildet die scheinbare Geschwindigkeit w mit der Wagerechten den Winkel 2ϑ, so schliesst v mit der Wagerechten den Winkel ϑ ein und hat die Grösse

5) $$v = 2w\cos\vartheta.$$

Es ist in diesem Falle p_1 die Centripetalbeschleunigung $w^2 : r$; $p_2 = 0$, weil die Verschiebung der scheinbaren Kreisbahn gleichförmig und geradlinig erfolgt; p_3 ebenfalls $= 0$, weil die scheinbare Bahnlinie nur eine Verschiebung, aber keine Verdrehung erleidet, also $\omega = 0$ ist. Hiernach ist die wahre Beschleunigung p gleichbedeutend mit der Centripetalbeschleunigung $p_1 = w^2 : r$ und rechtwinklig zu AB, d. h. von A nach M gerichtet. Zerlegt man diese Beschleunigung p der Cykloidenbewegung in Tangential- und Normalbeschleunigung, so wird letztere, weil nach S. 20 die Normale zur Cykloide die Richtung AQ hat und mit AM den Winkel ϑ bildet, $p_n = \frac{w^2}{r}\cos\vartheta$. Ist aber ρ der Krümmungshalbmesser der Cykloide, so muss auch $p_n = \frac{v^2}{\rho}$ sein. Hiernach kann man den Krümmungshalbmesser ρ berechnen:

$$\rho = \frac{rv^2}{w^2\cos\vartheta},$$

also nach Gl. 5 $\quad \rho = r\cdot 4\cos\vartheta = 2\cdot 2r\cos\vartheta,$

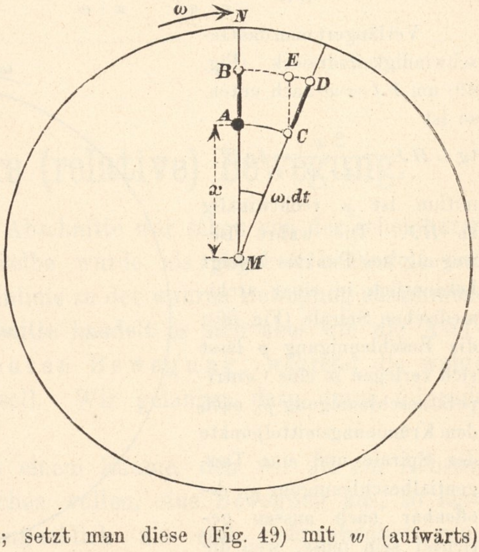
also, weil die Normale $\quad AQ = 2r\cos\vartheta$:

6) $$\rho = 2\,\text{Norm.},$$

d. h. der Krümmungshalbmesser OA gleich der doppelten Normalen AQ.

Beispiel 2: Auf dem Halbmesser MN einer mit der Winkelgeschwindigkeit ω sich gleichförmig rechts herum drehenden Scheibe (Fig. 48) bewege sich ein Punkt mit der Geschwindigkeit w gleichmässig nach aussen. Es sollen für den Augenblick, wo der Punkt sich bei A im Abstand x von der Mitte befindet, die Geschwindigkeit v und Beschleunigung p der wahren Bewegung bestimmt werden.

Fig. 48.



AB sei das Theilchen dx der scheinbaren Bahnlinie. Der Anfangspunkt A desselben hat eine Geschwindigkeit $x\omega$ nach rechts; setzt man diese (Fig. 49) mit w (aufwärts)