

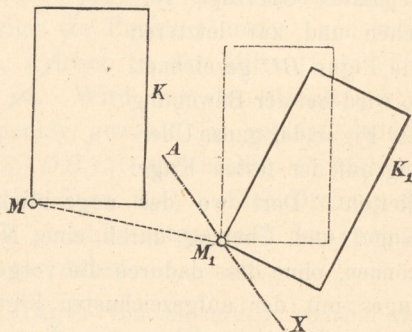
jedem Punkt O ein bestimmter Punkt P entsprechen. Der Ort der Punkte P ist eine sphärische Kurve des Überzuges, d. h. mit der beweglichen Figur verbunden, und heisst die bewegliche Polbahn. Sie ist die Leitlinie einer Kegelfläche (PM) mit der Spitze im Mittelpunkt M der Kugel. Die bewegliche Polbahn (P) hat mit der festen Polbahn (O) stets einen Punkt gemeinsam, der auf beiden Bahnen stets um gleiche Bogenlängen sich verschiebt; die bewegliche Polbahn rollt auf der festen Polbahn, oder auch: die bewegliche, mit der Figur verbundene Kegelfläche (PM) rollt auf der festen Kegelfläche. Also:

Jede Bewegung einer sphärischen Figur auf ihrer Kugelfläche kann man auffassen als das Rollen einer mit der Figur verbundenen sphärischen Polbahn auf einer festen sphärischen Polbahn. Dementsprechend ist die Drehung eines Körpers um einen festen Punkt M gleichwerthig mit dem Rollen einer mit dem Körper verbundenen Kegelfläche auf einer festen Kegelfläche; die Kegelflächen haben den festen Drehpunkt M gemeinsam zur Spitze.

5. Allgemeine Bewegung eines Körpers; Schraubenbewegung.

K und K_1 seien zwei unendlich benachbarte Lagen eines Körpers; irgend ein Punkt M beschreibe beim Übergang aus der einen in die andere die Bahnlinie MM_1 ; dann kann man den Übergang dadurch bewerkstelligen, dass man dem Körper zunächst eine Verschiebung um MM_1 ertheilt, wodurch der Körper in die punktirte Zwischenlage gelangt, und ihn sodann noch um den Punkt M_1 dreht. Diese unendlich kleine Drehung um den Punkt M_1 ist nach S. 23 zurückzuführen auf eine Drehung um eine durch M_1 gehende Achse AX .

Fig. 28.



Also: Jede Bewegung eines Körpers kann für einen Augenblick aufgefasst werden als zusammengesetzt aus einer Verschiebung und einer Drehung um eine augenblickliche Drehachse.

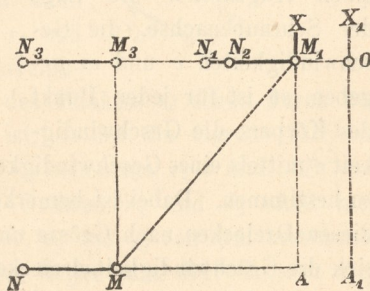
Befinden sich die beiden Lagen K und K_1 aber in endlichem Abstände, so muss man, wenn der eine Punkt des Körpers in der gegebenen Bahnlinie MM_1 geführt wird, dem Körper, damit er eine gegebene Bewegung ausführe, gleichzeitig eine Drehung um den richtig geführten Punkt M ertheilen, welche nach S. 24 gleichwerthig ist dem Rollen einer mit dem Körper verbundenen Kegelfläche auf einer anderen Kegelfläche, die mit dem richtig geführten Punkt M parallel verschoben wird. Die Kegel haben den Punkt M gemeinsam zur Spitze. Also:

Die beliebige Bewegung eines Körpers ist gleichwerthig dem Rollen eines mit dem Körper verbundenen Kegels auf einem zweiten Kegel, der eine Verschiebung erleidet. Die Verschiebung stimmt überein mit der Bahnlinie desjenigen Körperpunktes, der die gemeinsame Spitze der Kegel bildet.

Je nachdem der führende Punkt M am Körper anders gewählt wird, ergeben sich andere Verschiebungen und Rollbewegungen; es lässt sich daher eine Bewegung in unendlich vielen verschiedenen Weisen auf Verschiebung und Rollen zurückführen. Einfacher und zugleich bestimmter lässt sich aber die Bewegung eines Körpers auf **Schraubenbewegungen** zurückführen.

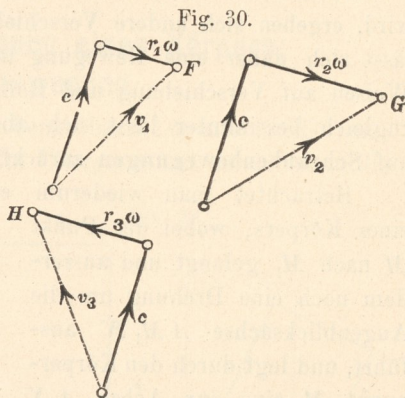
Betrachtet man wiederum eine unendlich kleine Bewegung eines Körpers, wobei der Punkt M nach M_1 gelangt und ausserdem noch eine Drehung um die Augenblicksachse AM_1X ausführt, und legt durch den Körperpunkt M eine zur Achse AX rechtwinklige Schnittebene, so möge eine Schnittfigur MN (Fig. 29) entstehen. Bei der Verschiebung gelangt diese in die Lage M_1N_1 , dann ist aber noch eine Drehung um AX erforderlich, durch welche die

Fig. 29.



Figur in die Endlage $M_1 N_2$ gelangen möge. Enthält die Schnittfigur mindestens drei nicht in dieselbe Gerade fallende Punkte, so bestimmt sie (nach S. 10) die Bewegung des Körpers vollständig. Man verschiebe nun die Schnittfigur MN zunächst rechtwinklig zu ihrer Ebene in ihre neue, durch M_1 gehende Parallelebene, in der sie die Zwischenlage $M_3 N_3$ einnehmen möge; dann ist nur noch eine Überführung in die derselben Ebene angehörende Lage $M_1 N_2$ erforderlich. Diese Bewegung kann man aber nach S. 14 durch Drehung um einen in der Ebene liegenden Pol O oder um eine zur Ebene rechtwinklige Achse $A_1 O X_1$ ausführen. Diese letztere Achse fällt im Allgemeinen nicht mit AX zusammen, ist aber dazu parallel. Hiermit ist die Bewegung der Schnittfigur MN und damit diejenige des Körpers zurückgeführt auf eine Verschiebung und eine Drehung um eine zur Verschiebungsrichtung parallele Achse; eine solche Bewegung aber (Drehung um eine Achse und Verschiebung parallel oder längs derselben) nennt man nach dem 1. Theile, S. 309 eine Schraubenbewegung.

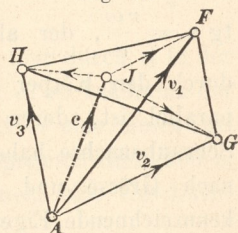
Ist c die Verschiebungsgeschwindigkeit längs der Achse und ω die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um die Schraubenachse, so sind die Geschwindigkeiten v_1, v_2 und v_3 dreier Punkte in den Abständen r_1, r_2 und r_3 von der Achse der Grösse nach dargestellt als Hypothenusen über den Katheten c und $r_1 \omega, c$ und $r_2 \omega$ und c und $r_3 \omega$ (Fig. 30). Sind für einen Augenblick die Lage der Schraubenachse, die Geschwindigkeiten c und ω gegeben, so ist für jeden Punkt des Körpers die Geschwindigkeit v mittels eines Geschwindigkeitsdreiecks nach Grösse und Richtung zu bestimmen. Dabei ist bemerkenswerth, dass die Kathete c bei allen diesen Dreiecken nach Grösse und Richtung dieselbe ist. Denkt man sich die Geschwindigkeitsdreiecke nicht wie in Fig. 30 in die Zeichenebene niedergeschlagen, sondern mit den wahren Richtungen im Raume konstruirt und mit den Katheten c aneinander gelegt, so



bilden die Umfangsgeschwindigkeiten der Drehung $r_1\omega$, $r_2\omega$ und $r_3\omega$ Strahlen, die zu c rechtwinklig stehen, d. h. in einer zu c rechtwinkligen Ebene liegen. In dieser Ebene befinden sich also auch die Endpunkte F , G , H der wahren Geschwindigkeiten v_1 , v_2 und v_3 .

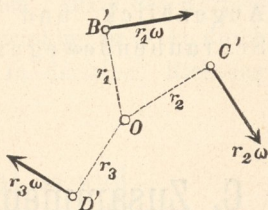
Hierauf gründet sich die zeichnerische Festlegung der Schraubenachse X_1X_1 , wenn von drei Punkten B , C und D des Körpers die wahren Geschwindigkeiten v_1 , v_2 und v_3 nach Grösse und Richtung gegeben sind. Man trägt nämlich diese drei Geschwindigkeiten von einem Punkt A aus nach Grösse und Richtung auf (Fig. 31), legt durch deren Endpunkte F , G und H eine Ebene E und zieht von A aus eine Rechtwinklige AJ zur Ebene, so ist $AJ = c$ die Verschiebungsgeschwindigkeit der Schraubenbewegung. Zugleich ist nach Grösse und Richtung $JF = r_1\omega$; $JG = r_2\omega$; $JH = r_3\omega$.

Fig. 31.



Projiziert man nun die Punkte B , C und D des Körpers auf eine zu c rechtwinklige Ebene mit den Projektionen B' , C' und D' (Fig. 32) und trägt an diesen Projektionen die Umfangsgeschwindigkeiten $r_1\omega$, $r_2\omega$ und $r_3\omega$ auf, so müssen Gerade, die man durch B' , C' und D' in dieser Ebene rechtwinklig zu jenen Umfangsgeschwindigkeiten zieht, sich in der Projektion O der Schraubenachse schneiden. Hiermit stehen dann auch die Drehungshalbmesser r_1 , r_2 und r_3 fest und somit auch die Winkelgeschwindigkeit ω . Da die Lage des Punktes O schon durch zwei Gerade $B'O$ und $C'O$ bestimmt ist, so ist die Gerade $D'O$ zur Bestimmung überflüssig. Auch ist ω schon aus $r_1\omega$ und $OB' = r_1$ gefunden, mithin sind hierzu die Grössen r_2 und r_3 nicht mehr nöthig. In den Geschwindigkeiten v_1 , v_2 und v_3 von drei bestimmten Punkten B , C und D des Körpers liegen also drei Grössen mehr vor, als für die Ermittlung der augenblicklichen Schraubenbewegung erforderlich sind. Es hängt dies damit zusammen, dass nach S. 11

Fig. 32.



zur Bestimmung der Lage eines Körpers nicht neun, sondern nur sechs Stücke erforderlich sind.

Sämmtliche Punkte der Schraubenachse haben Geschwindigkeiten von der übereinstimmenden Grösse c , deren Richtungen sämmtlich in diese Achse fallen, weil die Drehungshalbmesser r Null sind. Legt man durch den Körper irgend eine Gerade, welche der Schraubenachse parallel ist, so haben deren Punkte wohl auch Geschwindigkeiten gleicher Grösse und Richtung, doch bildet letztere mit der Schraubenachse einen Winkel α , für den $\operatorname{tg} \alpha = \frac{r\omega}{c}$, der also von Null verschieden ist. Legt man aber

durch den Körper eine Gerade, die mit der Schraubenachse nicht parallel ist, deren Punkte also verschiedene Abstände von der Schraubenachse haben, so sind die Geschwindigkeiten dieser Punkte nach Grösse und Richtung verschieden. Hiernach kommt die kennzeichnende Eigenschaft der Schraubenachse, dass die Geschwindigkeiten aller ihrer Punkte in der Richtung der Achse liegen, nur der einen Geraden zu. Während also der augenblickliche Bewegungszustand eines Körpers (nach S. 25) in unendlich vielen verschiedenen Weisen auf eine Verschiebung und eine Drehung zurückgeführt werden kann, ist die Zurückführung auf eine Schraubebewegung nur in einer Weise möglich. Daher hat man den Satz:

Jede Bewegung eines Körpers kann für einen Augenblick, und zwar nur in einer Weise, auf eine Schraubebewegung zurückgeführt werden.

C. Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen eines Körpers.

I. Drehung und Verschiebung.

Ein Körper habe eine Drehung um eine Achse A mit einer Winkelgeschwindigkeit ω und erleide gleichzeitig eine Verschiebung in einer Richtung, rechtwinklig zu der Achse, mit der Geschwindigkeit c (Fig. 33). Dieser Fall kommt z. B. vor, wenn sich ein