welcher der Stab BC mit den Punkten B und C den Achsen AX bezw. AY folgt, kann auch bewirkt werden durch eine Rollbewegung des kleineren Kreises mit dem Durchmesser $BC = R = 2r$ auf dem inneren Umfange des grösseren Kreises vom Halbmesser $R = BC$. Wenn ein Kreis auf dem inneren Umfange eines grösseren Kreises rollt, so beschreibt jeder Punkt des Umfanges des ersteren eine Hypocykloide. Ist das Verhältnis der Halbmesser r und R der beiden Kreise aber 1 : 2, so geht die Hypocykloide bekanntlich in eine Gerade, einen Durchmesser des grossen Kreises über, zu denen beispielsweise die Achsen AX und AY als Bahnen der Kreispunkte B und C gehören. — Jeder Punkt im Inneren des kleinen Kreises beschreibt allgemein eine verkürzte Hypocykloide, die aber für das Verhältnis 1 : 2 der Halbmesser beider Kreise mit einer Ellipse übereinstimmt, wie es nach S. 16 der Fall sein muss. Der Mittelpunkt des beweglichen Kreises beschreibt im Besonderen einen Kreis; die übrigen Punkte bewegen sich in Ellipsen der verschiedensten Excentricitäten, die Punkte des Umfanges in geraden Linien, nämlich Durchmessern des festen Kreises. Aus diesem Grunde kann mittels der beiden Kreise eine Geradführung hergestellt werden, wie man sie wohl bei älteren Druckmaschinen noch findet. Zu dem Zwecke sind die beiden Kreise mit äusserer und innerer Verzahnung versehen; der Mittelpunkt M des kleineren Kreises wird mittels einer um die Achse A (rechtwinklig zur Bildebene) drehbaren Kurbel von der Länge $r = AM$ im Kreise herumgeführt und hierbei durch die Verzahnung zu einer Rollbewegung auf dem inneren Umfange des grossen Kreises gezwungen. Ein an der Stelle B des kleineren Rades angebrachter Zapfen beschreibt dann die Gerade ABX.

4. Drehung eines Körpers um einen festen Punkt; Bewegung einer sphärischen Figur auf ihrer Kugelfläche.

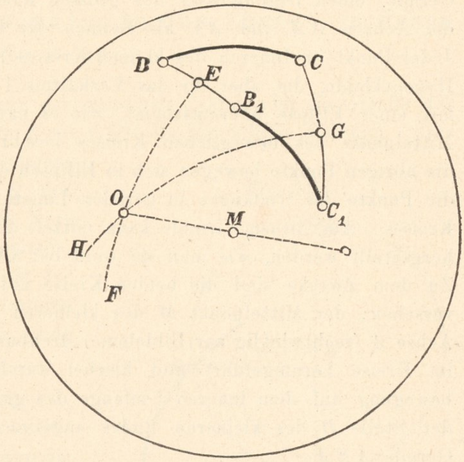
Während die Drehung eines Körpers um eine feste Achse durch Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung völlig bestimmt ist, also nur wenig Mannigfaltigkeit besitzt, ist die Drehung eines Körpers um einen festen Punkt noch in demselben Grade mannigfaltig wie die allgemeine ebene Bewegung.

Schneidet man einen um einen festen Punkt M drehbaren Körper durch eine Kugelfläche vom Halbmesser r, so entsteht eine sphärische Schnittfigur, deren Punkte bei der Bewegung des Körpers stets in dem Abstand r von dem Punkt M, d. h. in ihrer Kugelfläche verbleiben werden. Durch die Bewegung der Schnittfigur ist die Drehung des Körpers völlig bestimmt, und umgekehrt. Für die Bewegung der Figur auf der Kugel und demgemäss für die Drehung des Körpers um den festen Punkt lassen sich nun ähnliche

Beziehungen finden, wie vorstehend für die ebene Bewegung entwickelt wurden.

Die Lage einer sphärischen Figur auf ihrer Kugel ist schon durch die Lage zweier Punkte bestimmt, u. zw. sind dazu nur drei Koordinaten erforderlich. Es genügt daher die Beobachtung der Bewegung einer Seite BC einer sphärischen Figur (Fig. 26).

Fig. 26.



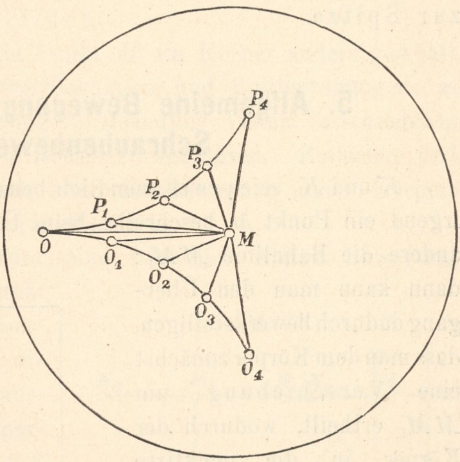
Die Überführung der Seite aus der Anfangslage BC in eine andere Lage B_1C_1 lässt sich durch Drehung um einen Punkt O der Kugelfläche bewirken. Man findet O nach demselben Gedankengange wie bei der ebenen Bewegung auf S. 13; wo aber dort von geraden Linien die Rede war, treten jetzt Grösstkreise der Kugel an ihre Stelle. Zieht man durch B und B_1 einen Grösstkreis und zu ihm durch die Mitte E des Bogens BB_1 einen dazu rechtwinkligen Grösstkreis EF, so haben alle Punkte des letzteren gleichen Abstand von B und B_1; durch Drehung um irgend einen Punkt des Grösstkreises EF würde daher B in die neue Lage B_1 gelangen. Dasselbe gilt bezüglich der Punkte C und C_1 von jedem Punkte des Grösstkreises GH, welcher in der Mitte G von CC_1 rechtwinklig zu CC_1 gezogen ist. Wird nun der Schnittpunkt O von EF und GH zum Drehpunkte gewählt, so gelangt dadurch B nach B_1 und, weil $OBC \cong OB_1C_1$, gleichzeitig C nach C_1, d. h. die Seite BC in ihre zweite Lage B_1C_1. Eine Drehung der BC um den Punkt O ist auch gleichbedeutend mit der Drehung um den Kugelhalbmesser OM als Achse.

Sind BC und B_1C_1 zwei Lagen von unendlich kleinem Abstand, und legt man durch B und C Grösstkreise rechtwinklig zu den Bahnlinien BB_1 und CC_1, so schneiden sich diese in dem Pol oder augenblicklichen Drehpunkt O, dem ein Halbmesser OM der Kugel als augenblickliche Drehachse entspricht. Also:

Die Bewegung einer Figur auf der Kugelfläche kann man in jedem Augenblick auffassen als Drehung um einen Pol O auf der Kugelfläche oder um einen Halbmesser OM der Kugel als augenblickliche Drehachse. Der Pol O und die entsprechende Drehachse OM sind bestimmt durch die augenblicklichen Bewegungsrichtungen zweier Punkte der Figur. Dementsprechend kann man die Drehung eines Körpers um einen festen Punkt M in jedem Augenblick auffassen als Drehung um eine durch M gehende Achse; die Richtung der Drehachse ist bestimmt durch die augenblicklichen Bewegungsrichtungen zweier Punkte.

Bei einer gegebenen Bewegung entspricht jeder Lage der beweglichen Figur ein besonderer Pol O und eine besondere augenblickliche Drehachse OM. Der Ort der Pole ist die sphärische Polbahn (O), der Ort der augenblicklichen Drehachsen die Kegelfläche (OM) mit der Spitze im Mittelpunkt M der Kugel. Denkt man sich nnn die feste Kugel mit einem ihr genau aufgepassten Überzuge versehen und auf letzteren die Figur BC gezeichnet, so wird bei der Bewegung der Figur der ganze Überzug auf der festen Kugel gleiten.

Fig. 27.



Dort wo der augenblickliche Pol O liegt, wird man Kugel und Überzug durch eine Nadel gegen einander feststellen können, ohne dass dadurch die vorgeschriebene Bewegung des Überzuges mit der aufgezeichneten Figur gehindert wird. Nennt man P den Punkt des Überzuges, der mit dem Pol O der festen Kugel zusammenfällt, so wird ebenso wie bei der ebenen Bewegung (S. 19) jedem Punkt O ein bestimmter Punkt P entsprechen. Der Ort der Punkte P ist eine sphärische Kurve des Überzuges, d. h. mit der beweglichen Figur verbunden, und heisst die bewegliche Polbahn. Sie ist die Leitlinie einer Kegelfläche (PM) mit der Spitze im Mittelpunkt M der Kugel. Die bewegliche Polbahn (P) hat mit der festen Polbahn (O) stets einen Punkt gemeinsam, der auf beiden Bahnen stets um gleiche Bogenlängen sich verschiebt; die bewegliche Polbahn rollt auf der festen Polbahn, oder auch: die bewegliche, mit der Figur verbundene Kegelfläche (PM) rollt auf der festen Kegelfläche. Also:

Jede Bewegung einer sphärischen Figur auf ihrer Kugelfläche kann man auffassen als das Rollen einer mit der Figur verbundenen sphärischen Polbahn auf einer festen sphärischen Polbahn. Dementsprechend ist die Drehung eines Körpers um einen festen Punkt M gleichwerthig mit dem Rollen einer mit dem Körper verbundenen Kegelfläche auf einer festen Kegelfläche; die Kegel haben den festen Drehpunkt M gemeinsam zur Spitze.

5. Allgemeine Bewegung eines Körpers; Schraubenbewegung.

K und K_1 seien zwei unendlich benachbarte Lagen eines Körpers; irgend ein Punkt M beschreibe beim Übergang aus der einen in die andere die Bahnlinie MM_1; dann kann man den Übergang dadurch bewerkstelligen, dass man dem Körper zunächst eine Verschiebung um MM_1 ertheilt, wodurch der Körper in die punktirte Zwischenlage gelangt, und ihn sodann noch um den Punkt M_1 dreht. Diese unendlich kleine Drehung um den Punkt M_1 ist nach S. 23 zurückzuführen auf eine Drehung um eine durch M_1 gehende Achse AX.

Fig. 28.