

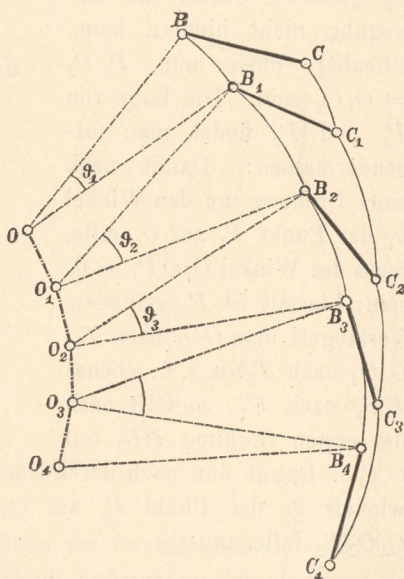
3. Endliche Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene. Rollbewegung der Polbahnen.

Sind BC , B_1C_1 , B_2C_2 , B_3C_3 , B_4C_4 verschiedene Lagen der beweglichen Geraden BC (Fig. 21) in einer Ebene, u. zw. einstweilen in endlichen Abständen von einander, so lässt sich nach S. 13 die Überführung aus der Lage BC

in die Lage B_1C_1 bewirken durch Drehung um einen Punkt O ; der Winkelweg dieser Drehung $BOB_1 = COC_1$ sei ϑ_1 ; alle Punkte der beweglichen Figur beschreiben bei ihr Kreisbögen um O . Zu dem Übergange von B_1C_1 nach B_2C_2 gehöre der Drehpunkt O_1 mit dem Drehungswinkel ϑ_2 , u. s. f. Die Verbindung der Drehpunkte durch Gerade liefert dann den Linienzug $OO_1O_2O_3O_4 \dots$. Nun stelle man sich vor, die bewegliche Figur BC sei auf einer grösseren Scheibe S aufgezeichnet, welche auf einer festen Tafel T liege. Die Punkte O gehören zur festen

Tafel T ; auf ihr sei der Linienzug $OO_1O_2O_3O_4$ gezeichnet. Während die Drehung um O erfolgt, möge ein Punkt P der beweglichen Scheibe S mit O zusammenfallen; diese beiden Punkte verschieben sich während der Drehung nicht gegen einander; man kann sich deshalb während der ersten Drehung durch P und O eine Nadel gesteckt denken; es wird hierdurch die Drehung nicht gehindert werden. Sobald aber BC in der zweiten Lage B_1C_1 angelangt ist, hört der Punkt O auf, Drehpunkt zu sein; es tritt dafür O_1 an die Stelle, und es wird während der zweiten Drehung ein Punkt P_1 (Fig. 22) der Scheibe S mit O_1 zusammenfallen. Da in

Fig. 21.



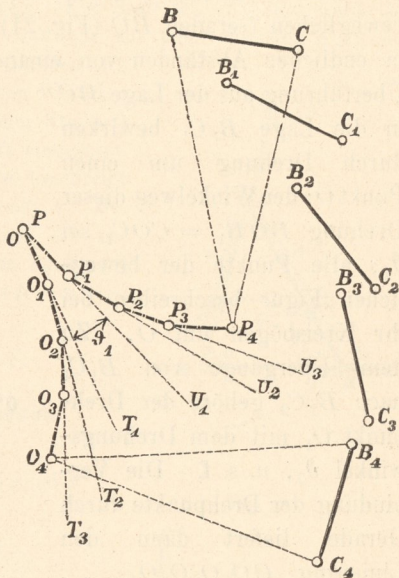
dem Augenblicke, wo BC in der Lage B_1C_1 sich befindet, P noch mit O zusammenfällt, so muss P_1 , welches gleichzeitig mit O_1 sich deckt, um die Länge $PP_1 = OO_1$ von P entfernt sein. Ebenso wird während der Drehung um O_2 ein Punkt P_2 der beweglichen Scheibe mit O_2 in Berührung sein, so dass wiederum eine durch P_2 und O_2 gesteckte Nadel die Bewegung nicht hindern kann. Offenbar muss nun $P_1P_2 = O_1O_2$ sein. Die Lage von P_1 und P_2 findet man folgendermassen: Damit nach einer Drehung um den Winkel ϑ_1 der Punkt P_1 auf O_1 falle, muss der Winkel $O_1OP_1 = \vartheta_1$ sein; hiermit ist P_1 gefunden. Verlängert man OO_1 nach T_1 , O_1O_2 nach T_2 , u. s. f.; ebenso PP_1 nach U_1 , so fällt nach der ersten Drehung PU_1 auf OT_1 . Damit nun nach der Zurücklegung eines weiteren Drehungswinkels ϑ_2 der Punkt P_2 auf O_2 , d. h. die Gerade $P_1P_2U_2$ auf $O_1O_2T_2$ falle, muss

$$U_1P_1U_2 + T_1O_1T_2 = \vartheta_2, \text{ also}$$

$$U_1P_1U_2 = \vartheta_2 - T_1O_1T_2$$

gemacht werden. Hiernach steht mit $P_1P_2 = O_1O_2$ der Punkt P_2 fest. In derselben Weise findet man $P_3, P_4, P_5 \dots$. Wenn nun die Punkte P der beweglichen Scheibe der Reihe nach mit den Punkten O der festen Tafel T in der beschriebenen Weise zusammenfallen, so führt das Vieleck $PP_1P_2 \dots$ offenbar eine Rollbewegung (ohne Gleiten) auf dem Vieleck $OO_1O_2 \dots$ aus. Die Folge dieser Rollbewegung ist dann, dass die bewegliche Figur BC der Reihe nach die vorgeschriebenen Lagen B_1C_1, B_2C_2 u. s. f. einnimmt. Solange die bewegliche Figur BC ihre Anfangslage innehat, liegt

Fig. 22.



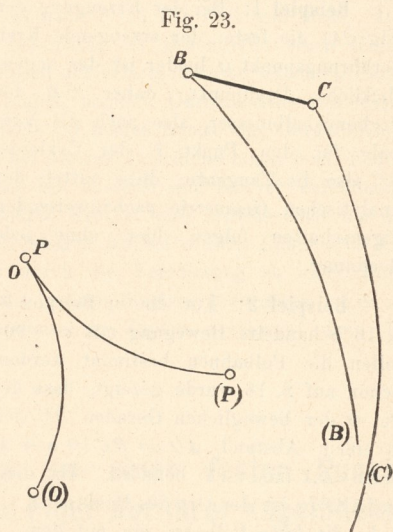
der Punkt, der demnächst mit O_4 zusammenfällt, in P_4 ; wenn aber BC die Lage B_4C_4 hat, so fällt P_4 mit O_4 zusammen; daher muss P_4 gegen BC ebenso liegen, wie O_4 gegen B_4C_4 , d. h.

$$P_4BC \cong O_4B_4C_4, \text{ ebenso ist}$$

$$P_1BC \cong O_1B_1C_1 \text{ u. s. f.}$$

Im Vorstehenden waren nur einzelne bestimmte Lagen der beweglichen Figur als gegeben angenommen und die Vielecke $OO_1O_2 \dots$, sowie $PP_1P_2 \dots$

so gezeichnet, dass die bewegliche Figur BC der Reihe nach die verschiedenen Lagen B_1C_1 , $B_2C_2 \dots$ durchschritt, wobei die Punkte B und C jedesmal Kreisbögen von den Mittelpunktswinkeln $\vartheta_1, \vartheta_2 \dots$ beschrieben. Sind aber ausser der Anfangslage BC noch die Bahnlinien $B(B)$ bzw. $C(C)$ der Punkte B und C (Fig. 23) gegeben, wodurch die Bewegung der Figur BC völlig bestimmt ist, so entspricht jeder unendlich kleinen Verrückung der Figur ein augenblicklicher Drehpunkt O



auf der festen Tafel, sowie im Sinne der vorstehenden Entwicklung ein Punkt P der beweglichen Scheibe S , auf welcher sich die Figur BC gezeichnet befindet. Statt des Vielecks $OO_1O_2 \dots$ erhält man dann eine Kurve $O(O)$ als geometrischen Ort der augenblicklichen Drehpunkte O der festen Tafel T , sowie statt des Vielecks $PP_1P_2 \dots$ eine Kurve $P(P)$ als geometrischen Ort derjenigen Punkte P der beweglichen Scheibe, welche nach und nach mit den Punkten O zusammenfallen. Die Kurven $O(O)$ und $P(P)$ heissen die feste bzw. die bewegliche Polbahn, und bei der gegebenen Bewegung erfolgt eine Rollbewegung der beweglichen Polbahn auf der festen Polbahn.

Hiernach ist jede Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene gleichwerthig mit dem Rollen einer mit

der Figur verbundenen Polbahn auf einer festen Polbahn. Dementsprechend ist die ebene Bewegung eines Körpers gleichwerthig mit dem Rollen einer mit dem Körper verbundenen Cylinderfläche P auf einer festen Cylinderfläche O ; die Leitlinien dieser Cylinderflächen sind die vorstehend behandelten Polbahnen; die Erzeugenden stehen rechtwinklig zu den Ebenen, in denen die Körperpunkte sich bewegen.

Beispiel 1: Bei der Erzeugung der gemeinen Cycloide ist die Gerade AO (Fig. 24) die feste, der erzeugende Kreis OBC die bewegliche Polbahn. Der Berührungspunkt O beider ist der augenblickliche Drehpunkt, daher OB der Drehungshalbmesser, also auch die Normale für den Punkt B der Cycloide, BC also die Tangente; diese mittels der Analytischen Geometrie nachzuweisenden Eigenschaften folgen hier ohne jede Rechnung.

Beispiel 2: Für die in Beispiel 3, S. 16 behandelte Bewegung mit $\alpha = 90^\circ$ sollen die Polbahnen bestimmt werden. Schon auf S. 16 wurde gezeigt, dass der Pol O der beweglichen Geraden BC sich in einem Abstand $AO = BC = a + b$ von dem Schnittpunkt A der Leitlinien AX und AY befindet. Da dieser Abstand keine veränderliche Grösse enthält, so ist der Ort des Punktes O , d. h. die feste Polbahn, ein mit dem Halbmesser $R = AO = BC$ aus dem Mittelpunkt A beschriebener Kreis (Fig. 25).

Für eine andere Lage B_1C_1 der beweglichen Figur ist O_1 der Pol, wobei $B_1O_1C_1$ ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypothenuse B_1C_1 . Um nun den zu dem Punkte O_1 der festen Polbahn gehörigen Punkt P_1 der beweglichen Polbahn zu finden, haben wir über BC als Hypothenuse ein zu $B_1O_1C_1$ kongruentes Dreieck BP_1C zu zeichnen, dann ist P_1 der gesuchte Punkt. Der Ort der Rechtwinkelpunkte aller über der Hypothenuse BC gezeichneten rechtwinkligen Dreiecke ist aber bekanntlich ein Kreis mit dem Durchmesser $BC = R = 2r$; dieser muss mithin die bewegliche Polbahn P sein. Die gegebene Bewegung also, bei

Fig. 24.

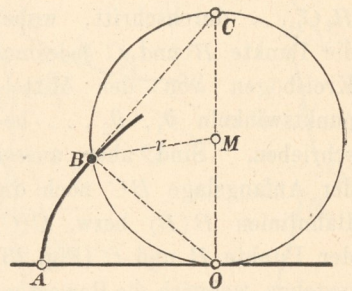
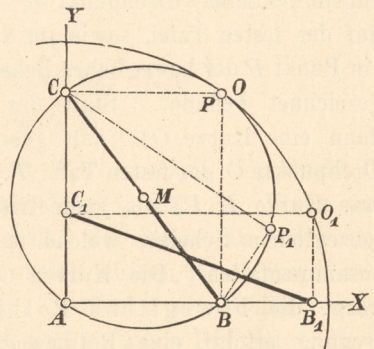


Fig. 25.



welcher der Stab BC mit den Punkten B und C den Achsen AX bzw. AY folgt, kann auch bewirkt werden durch eine Rollbewegung des kleineren Kreises mit dem Durchmesser $BC = R = 2r$ auf dem inneren Umfange des grösseren Kreises vom Halbmesser $R = BC$. Wenn ein Kreis auf dem inneren Umfange eines grösseren Kreises rollt, so beschreibt jeder Punkt des Umfanges des ersteren eine Hypocykloide. Ist das Verhältnis der Halbmesser r und R der beiden Kreise aber $1 : 2$, so geht die Hypocykloide bekanntlich in eine Gerade, einen Durchmesser des grossen Kreises über, zu denen beispielsweise die Achsen AX und AY als Bahnen der Kreispunkte B und C gehören. — Jeder Punkt im Inneren des kleinen Kreises beschreibt allgemein eine verkürzte Hypocykloide, die aber für das Verhältnis $1 : 2$ der Halbmesser beider Kreise mit einer Ellipse übereinstimmt, wie es nach S. 16 der Fall sein muss. Der Mittelpunkt des beweglichen Kreises beschreibt im Besonderen einen Kreis; die übrigen Punkte bewegen sich in Ellipsen der verschiedensten Excentricitäten, die Punkte des Umfanges in geraden Linien, nämlich Durchmessern des festen Kreises. Aus diesem Grunde kann mittels der beiden Kreise eine Geradföhrung hergestellt werden, wie man sie wohl bei älteren Druckmaschinen noch findet. Zu dem Zwecke sind die beiden Kreise mit äusserer und innerer Verzahnung versehen; der Mittelpunkt M des kleineren Kreises wird mittels einer um die Achse A (rechtwinklig zur Bildebene) drehbaren Kurbel von der Länge $r = AM$ im Kreise herumgeföhrt und hierbei durch die Verzahnung zu einer Rollbewegung auf dem inneren Umfange des grossen Kreises gezwungen. Ein an der Stelle B des kleineren Rades angebrachter Zapfen beschreibt dann die Gerade ABX .

4. Drehung eines Körpers um einen festen Punkt; Bewegung einer sphärischen Figur auf ihrer Kugelfläche.

Während die Drehung eines Körpers um eine feste Achse durch Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung völlig bestimmt ist, also nur wenig Mannigfaltigkeit besitzt, ist die Drehung eines Körpers um einen festen Punkt noch in demselben Grade mannigfaltig wie die allgemeine ebene Bewegung.

Schneidet man einen um einen festen Punkt M drehbaren Körper durch eine Kugelfläche vom Halbmesser r , so entsteht eine sphärische Schnittfigur, deren Punkte bei der Bewegung des Körpers stets in dem Abstand r von dem Punkt M , d. h. in ihrer Kugelfläche verbleiben werden. Durch die Bewegung der Schnittfigur ist die Drehung des Körpers völlig bestimmt, und umgekehrt. Für die Bewegung der Figur auf der Kugel und demgemäss für die Drehung des Körpers um den festen Punkt lassen sich nun ähnliche