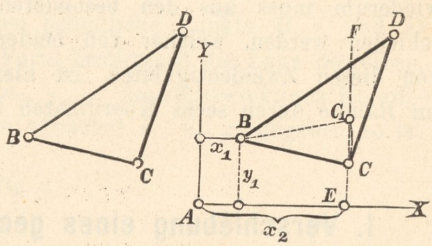
2. Ebene Bewegung eines Körpers; Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene.

Sind die Bahnlinien dreier Punkte eines Körpers, welche nicht in derselben Geraden liegen, einer gegebenen Ebene parallel, so bewegen sich sämmtliche Punkte des Körpers parallel der gegebenen Ebene, und jeder zu dieser letzteren parallel geführte Schnitt des Körpers bewegt sich in seiner Ebene. Eine derartige Bewegung des Körpers heisst eine ebene Bewegung, und zu ihrer Kenntnis genügt die Kenntnis der Bewegung einer solchen ebenen Schnittfigur in ihrer Ebene.

Die Lage einer Figur in einer Ebene ist schon durch die Lage zweier Punkte B und C bestimmt, sobald ein Umklappen der Figur in eine symmetrische Lage ausgeschlossen ist. Um z. B. das Dreieck BCD (Fig. 11) gegen ein ebenes Achsenkreuz XAY festzulegen, mögen für den Punkt B die beiden Koordinaten x_1 und y_1 gegeben sein. Für einen zweiten Punkt C sind dann nicht mehr zwei Koordinaten erforderlich, sondern nur eine derselben, etwa x_2, weil der gegebene Abstand BC der beiden Punkte die Ordinate y_2 ersetzt.

Fig. 11.

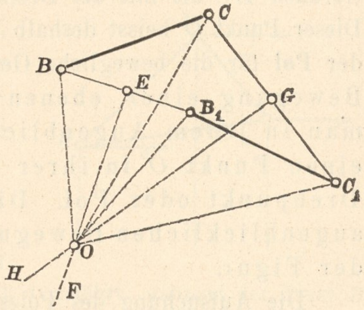


Auf der zur y-Achse parallelen, durch die Abscisse x_2 bestimmten Geraden EF liegen freilich im Allgemeinen zwei Punkte C und C_1, die von B den gegebenen Abstand BC haben; aus den besonderen Umständen des Falles muss dann hervorgehen, welcher von beiden in Frage kommt. Hiervon abgesehen, ist also die Lage einer ebenen Figur in ihrer Ebene durch drei Koordinaten bestimmt.

Ist nun BC (Fig. 12) die Verbindungsgerade zweier Punkte, deren Lage die Lage einer ebenen Figur bestimmt, und ist B_1C_1 eine zweite Lage derselben Geraden in der Ebene der Figur, so lässt sich die Überführung der Geraden aus der Anfangslage BC in die andere Lage B_1C_1 durch Drehung um einen in der Ebene befindlichen Punkt O bewirken. Zieht man die Verbindungsgerade

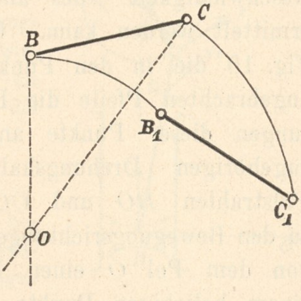
BB_1 und zu ihr in ihrem Mittelpunkt E eine Winkelrechte EF, so haben alle Punkte der EF gleichen Abstand von B und B_1; durch Drehung um irgend einen Punkt der EF würde daher B in die neue Lage B_1 gelangen. Dasselbe gilt bezüglich der Punkte C und C_1 von jedem Punkte der Geraden GH, welche in der Mitte von CC_1 rechtwinklig zu CC_1 gezogen ist. Wird nun die Drehung um den Schnittpunkt O von EF und GH ausgeführt, so gelangt dadurch B nach B_1 und, weil $OBC \cong OB_1C_1$, gleichzeitig C nach C_1, d. h. die bewegliche Gerade BC in ihre zweite Lage B_1C_1.

Fig. 12.



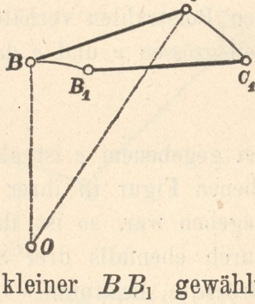
Bei dieser Drehung um O beschreiben B und C Kreisbögen um O als Mittelpunkt (Fig. 13). Die Drehungshalbmesser BO und CO der Anfangslage sind rechtwinklig zu den kreisförmigen Bahnlinien BB_1 und CC_1.

Fig. 13.



Sind ausser der beweglichen Geraden BC noch bestimmte Bahnlinien der Punkte B und C gegeben (Fig. 14) und wählt man auf der Bahnlinie des Punktes B einen sehr nahe bei B gelegenen Punkt B_1, so findet man den zugehörigen Punkt C_1 leicht durch Abtragen der Länge BC, so dass $B_1C_1 = BC$ ist. Dann ist B_1C_1 eine der Anfangslage BC der beweglichen Geraden benachbarte Lage. Konstruirt man nun in B eine Normale zu der Kurve BB_1, in C eine solche zu CC_1, so mögen sich beide in dem Punkt O schneiden. Bei einer Drehung der beweglichen Geraden um O werden die von B und C beschriebenen Kreise um so mehr mit den wahren Bahnlinien BB_1 und CC_1 zusammenfallen, je kleiner BB_1 gewählt

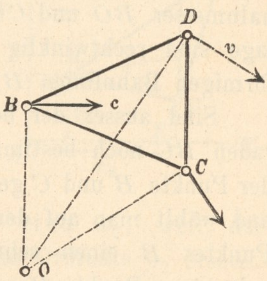
Fig. 14.



wurde. Denkt man sich BB_1 unendlich klein, BC und B_1C_1 als zwei unendlich wenig von einander abweichende Lagen der beweglichen Geraden, so kann man die unendlich kleine Bewegung der Geraden BC als mit der Drehung um O übereinstimmend ansehen. Dieser Punkt O heisst deshalb der **augenblickliche Drehpunkt** oder der **Pol** für die bewegliche Gerade in der Lage BC. Also: Die Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene kann man in jedem Augenblick auffassen als Drehung um einen Punkt O in ihrer Ebene, den augenblicklichen Drehpunkt oder Pol. Dieser ist bestimmt durch die augenblicklichen Bewegungsrichtungen zweier Punkte der Figur.

Die Aufsuchung des Poles O für die Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene bietet den Vortheil, dass aus den Bewegungs- oder Geschwindigkeits-Richtungen zweier Punkte und der Geschwindigkeitsgrösse eines Punktes die Grösse und Richtung der Geschwindigkeit jedes anderen Punktes ermittelt werden kann. Geben z. B. in Fig. 15 die in den Punkten B und C angebrachten Pfeile die Bewegungsrichtungen dieser Punkte an, so sind die zugehörigen Drehungshalbmesser oder Polstrahlen BO und CO rechtwinklig zu den Bewegungsrichtungen. Zieht man von dem Pol O einen Polstrahl nach einem beliebigen Punkte D der Figur, so ist die Richtung der Geschwindigkeit dieses Punktes rechtwinklig zu OD. Da nun bei einer Drehung die Umfangsgeschwindigkeiten den Drehungshalbmessern, hier also den Polstrahlen verhältnisgleich sind, so gilt für die Geschwindigkeitsgrössen v und c der Punkte B und D die Gleichung

Fig. 15.

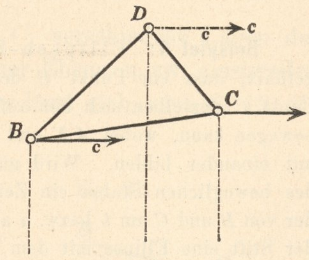


$$v = c\frac{OD}{OB};$$

bei gegebenem c ist also v bestimmt. Ebenso wie die Lage einer ebenen Figur in ihrer Ebene nach S. 12 durch drei Koordinaten gegeben war, so ist ihr augenblicklicher Geschwindigkeits-Zustand durch ebenfalls drei Stücke, nämlich zwei Richtungen und eine Grösse c, bestimmt.

Sind die Bewegungsrichtungen zweier Punkte einander parallel (Fig. 16) so liegt der Pol O in unendlicher Ferne; in Folge dessen haben alle Punkte der Figur Geschwindigkeiten, die nach Richtung, Grösse und Sinn übereinstimmen, d. h. die Bewegung ist in dem betreffenden Augenblick eine **Verschiebung** (oder eine rein fortschreitende Bewegung).

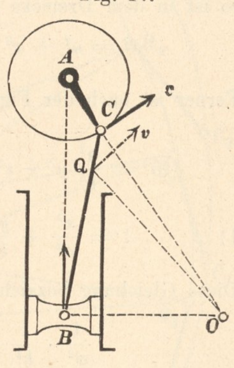
Fig. 16.



Beispiel 1: Bewegung einer Kurbelstange. Der Punkt C der Kurbelstange BC (Fig. 17) wird durch die Kurbel AC in einem Kreise mit dem Mittelpunkt A geführt, während der Punkt B vermöge der Geradführung gezwungen ist, sich längs einer Geraden AB zu bewegen. Die Winkelrechte zu der Bewegungsrichtung des Punktes C ist die Verlängerung der Kurbel AC, während der zu dem Punkte B gehörige Polstrahl BO rechtwinklig zu AB steht. Hierdurch ist der Pol O der Kurbelstange in der Lage BC bestimmt. Ist nun c die Geschwindigkeit des Kurbelzapfens C, so ergiebt sich die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes Q der Stange zu

$$v = c \cdot \frac{OQ}{OC}.$$

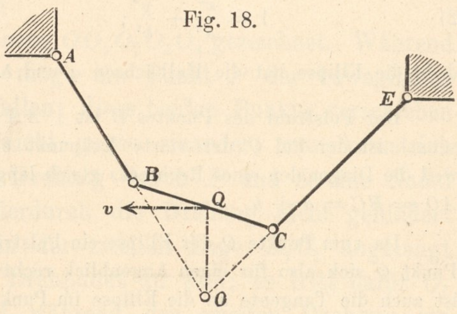
Fig. 17.



Diese Beziehung wird benutzt, wenn man behufs Ermittelung des erforderlichen Schwungrad-Gewichtes einer Dampfmaschine das Arbeitsvermögen der Kurbelstange berechnen will.

Beispiel 2: Pol einer Gelenkstange. Ist $ABCE$ eine an den Widerlager-Gelenken A und E aufgehängte Gelenkstangen-Verbindung, so kann der Punkt B sich nur rechtwinklig zu AB, der Punkt C sich nur rechtwinklig zu EC bewegen. Für die mittlere Stange BC sind daher ABO und ECO zwei Polstrahlen, die den Pol O bestimmen. Mit Hülfe des Poles lässt sich leicht derjenige Punkt der Stange BC angeben, der bei einer unendlich kleinen Verrückung der Stangenverbindung sich wagerecht

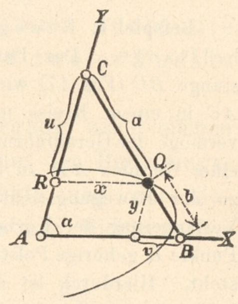
Fig. 18.



bewegen wird; es ist dies derjenige Punkt Q, dessen Polstrahl OQ lothrecht steht. Wie weiter unten gezeigt werden wird, hängt diese Eigenschaft des Punktes Q damit zusammen, dass die Figur $ABCE$ die Gleichgewichtsform ist für eine bei Q an der sonst unbelastet gedachten Stangenverbindung aufgehängte lothrechte Last (vgl. 1. Theil, S. 178 und Fig. 219).

Beispiel 3: Ellipsen-Zeichner. Ein Stab BC (Fig. 19) werde so geführt, dass ein Punkt B derselben sich nur auf einer Geraden AX, ein Punkt C derselben sich nur auf einer Geraden AY bewegen kann, wobei AX und AY einen Winkel α mit einander bilden. Wird nun an einer Stelle Q des beweglichen Stabes ein Zeichenstift eingesetzt, der von B und C um b bezw. a absteht, so beschreibt der Stift eine Ellipse mit dem Mittelpunkt A. Bezeichnet man nämlich die auf AX und AY bezogenen schiefwinkligen Koordinaten des Punktes Q mit x und y; setzt $AC - y = u$ und $AB - x = v$, so ist in dem Dreiecke CQR:

Fig. 19.



$$a^2 = u^2 + x^2 - 2\cos\alpha \cdot u \cdot x .$$

Ferner ist nach der Figur $\frac{u}{y} = \frac{a}{b}$, mithin

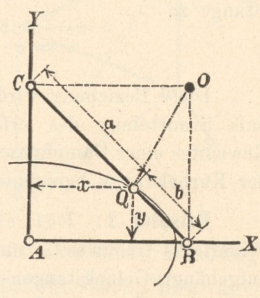
$$a^2 = \frac{a^2}{b^2} y^2 + x^2 - 2\cos\alpha \cdot \frac{a}{b} y x \quad \text{oder}$$

$$1) \qquad 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2\cos\alpha}{ab} xy .$$

Diese Gleichung bezeichnet eine Ellipse, weil

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} - \frac{\cos^2\alpha}{a^2 b^2} > 0 \quad \text{ist.}$$

Fig. 20.



Wird im Besonderen $\alpha = 90^0$ (Fig. 20), so geht Gl. 1 über in

$$2) \qquad 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2};$$

d. h. die Ellipse hat die Halbachsen a und b.

Der Polstrahl des Punktes B ist $\perp AX$, derjenige des Punktes $C \perp AY$; sonach ist der Pol O der vierte Eckpunkt eines Rechtecks $ABOC$ und hat, weil die Diagonalen eines Rechtecks gleich lang sind, vom Punkt A den Abstand $AO = BC = a + b$.

Da zum Punkte Q der Ellipse ein Polstrahl OQ gehört, der beschreibende Punkt Q sich also für einen Augenblick rechtwinklig zu OQ bewegen muss, so ist auch die Tangente an die Ellipse im Punkte Q rechtwinklig zu OQ, d. h. es ist der Polstrahl OQ eine Normale an die Ellipse im Punkte Q.