Bezeichnet aber ρ den ersten Krümmungshalbmesser der Schraubenlinie, so muss nach Gl. 13, S. 7 und Gl. 20 auch

$$p_n = p = \frac{v^2}{\rho} = \frac{c^2}{r}$$

sein, also wird $\rho = r\frac{v^2}{c^2}$, oder nach Gl. 19

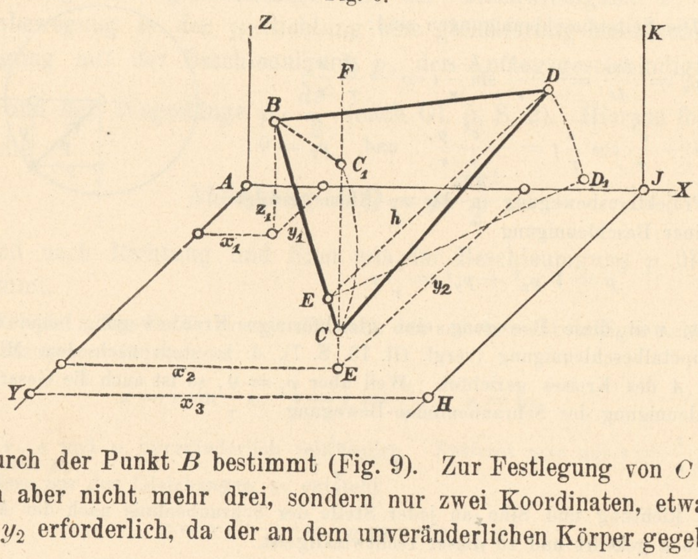
21) $$\rho = r \sec^2\alpha .$$

Die entsprechenden Krümmungs-Mittelpunkte liegen auf den Richtungen von p, jedoch um $\rho - r = r \operatorname{tg}^2\alpha$ jenseits der Achse. Ihr geometrischer Ort ist also eine Schraubenlinie vom Halbmesser $r \operatorname{tg}^2\alpha$ und der Ganghöhe h.

B. Bewegung eines geometrischen Körpers.

Drei nicht in einer Geraden befindliche Punkte B, C und D eines Körpers unveränderlicher Form bestimmen die Lage desselben. Es seien x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 die rechtwinkligen Koordinaten der drei Punkte; sind nun zunächst x_1, y_1, z_1 gegeben, so ist

Fig. 9.



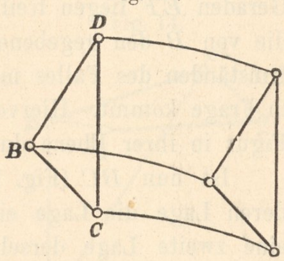
dadurch der Punkt B bestimmt (Fig. 9). Zur Festlegung von C sind dann aber nicht mehr drei, sondern nur zwei Koordinaten, etwa x_2 und y_2 erforderlich, da der an dem unveränderlichen Körper gegebene

Abstand von B und C die dritte Koordinate ersetzt. Auf der zur z-Achse parallelen, durch die Koordinaten x_2 und y_2 bestimmten Geraden EF liegen freilich im Allgemeinen zwei Punkte C und C_1, die von B den gegebenen Abstand BC haben; aus den besonderen Umständen des Falles muss dann hervorgehen, welcher von beiden in Frage kommt. Zur Festlegung des Punktes D ist nur noch eine der Koordinaten erforderlich, etwa x_3, weil die Abstände dieses Punktes von B und C die anderen beiden ersetzen. Nach der gegenseitigen Lage der Punkte B, C, D im Körper hat die von D auf BC gefällte Winkelrechte eine bestimmte Länge h und trifft die BC in einem bestimmten Punkte E, der nun im Raume schon eine bestimmte Lage hat. Beschreibt man um E als Mittelpunkt und mit h als Halbmesser einen Kreis, dessen Ebene rechtwinklig zu BC steht, so schneidet dieser Kreis die zu YAZ parallele, durch die Abscisse x_3 gegebene Ebene HJK in zwei Punkten, welche mögliche Lagen des Punktes D im Raume sind; wiederum muss aus den besonderen Umständen des Falles entschieden werden, welcher von beiden der richtige ist. Abgesehen von diesen Zweideutigkeiten, ist hiernach die Lage eines Körpers im Raume durch sechs Koordinaten bestimmt.

I. Verschiebung eines geometrischen Körpers.

Die Bewegung eines Körpers heisst eine Verschiebung (oder fortschreitende Bewegung), wenn alle Punkte desselben kongruente und parallel zu einander liegende Bahnen beschreiben, so dass alle Theile des Körpers ihrer Anfangslage parallel bleiben. In Figur 10 sind die Bahnlinien dreier Punkte B, C, D des sich verschiebenden Körpers dargestellt. In diesem Falle genügt offenbar schon die Kenntnis der Bewegung eines einzigen Punktes zur Bestimmung der Bewegung des ganzen Körpers, sodass die vorstehenden Lehren über die Bewegung eines Punktes auch auf die Verschiebung eines Körpers unmittelbare Anwendung finden.

Fig. 10.

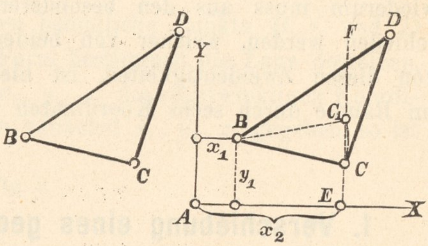


2. Ebene Bewegung eines Körpers; Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene.

Sind die Bahnlinien dreier Punkte eines Körpers, welche nicht in derselben Geraden liegen, einer gegebenen Ebene parallel, so bewegen sich sämmtliche Punkte des Körpers parallel der gegebenen Ebene, und jeder zu dieser letzteren parallel geführte Schnitt des Körpers bewegt sich in seiner Ebene. Eine derartige Bewegung des Körpers heisst eine ebene Bewegung, und zu ihrer Kenntnis genügt die Kenntnis der Bewegung einer solchen ebenen Schnittfigur in ihrer Ebene.

Die Lage einer Figur in einer Ebene ist schon durch die Lage zweier Punkte B und C bestimmt, sobald ein Umklappen der Figur in eine symmetrische Lage ausgeschlossen ist. Um z. B. das Dreieck BCD (Fig. 11) gegen ein ebenes Achsenkreuz XAY festzulegen, mögen für den Punkt B die beiden Koordinaten x_1 und y_1 gegeben sein. Für einen zweiten Punkt C sind dann nicht mehr zwei Koordinaten erforderlich, sondern nur eine derselben, etwa x_2, weil der gegebene Abstand BC der beiden Punkte die Ordinate y_2 ersetzt.

Fig. 11.

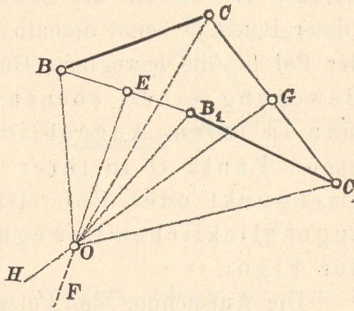


Auf der zur y-Achse parallelen, durch die Abscisse x_2 bestimmten Geraden EF liegen freilich im Allgemeinen zwei Punkte C und C_1, die von B den gegebenen Abstand BC haben; aus den besonderen Umständen des Falles muss dann hervorgehen, welcher von beiden in Frage kommt. Hiervon abgesehen, ist also die Lage einer ebenen Figur in ihrer Ebene durch drei Koordinaten bestimmt.

Ist nun BC (Fig. 12) die Verbindungsgerade zweier Punkte, deren Lage die Lage einer ebenen Figur bestimmt, und ist B_1C_1 eine zweite Lage derselben Geraden in der Ebene der Figur, so lässt sich die Überführung der Geraden aus der Anfangslage BC in die andere Lage B_1C_1 durch Drehung um einen in der Ebene befindlichen Punkt O bewirken. Zieht man die Verbindungsgerade

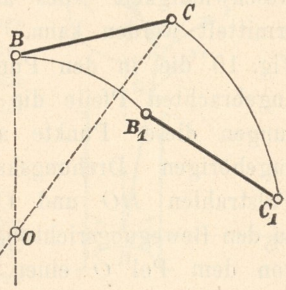
BB_1 und zu ihr in ihrem Mittelpunkt E eine Winkelrechte EF, so haben alle Punkte der EF gleichen Abstand von B und B_1; durch Drehung um irgend einen Punkt der EF würde daher B in die neue Lage B_1 gelangen. Dasselbe gilt bezüglich der Punkte C und C_1 von jedem Punkte der Geraden GH, welche in der Mitte von CC_1 rechtwinklig zu CC_1 gezogen ist. Wird nun die Drehung um den Schnittpunkt O von EF und GH ausgeführt, so gelangt dadurch B nach B_1 und, weil $OBC \cong OB_1C_1$, gleichzeitig C nach C_1, d. h. die bewegliche Gerade BC in ihre zweite Lage B_1C_1.

Fig. 12.



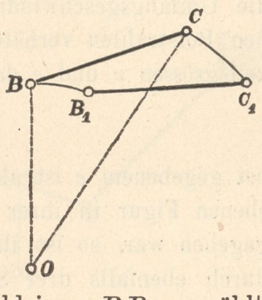
Bei dieser Drehung um O beschreiben B und C Kreisbögen um O als Mittelpunkt (Fig. 13). Die Drehungshalbmesser BO und CO der Anfangslage sind rechtwinklig zu den kreisförmigen Bahnlinien BB_1 und CC_1.

Fig. 13.



Sind ausser der beweglichen Geraden BC noch bestimmte Bahnlinien der Punkte B und C gegeben (Fig. 14) und wählt man auf der Bahnlinie des Punktes B einen sehr nahe bei B gelegenen Punkt B_1, so findet man den zugehörigen Punkt C_1 leicht durch Abtragen der Länge BC, so dass $B_1C_1 = BC$ ist. Dann ist B_1C_1 eine der Anfangslage BC der beweglichen Geraden benachbarte Lage. Konstruirt man nun in B eine Normale zu der Kurve BB_1, in C eine solche zu CC_1, so mögen sich beide in dem Punkt O schneiden. Bei einer Drehung der beweglichen Geraden um O werden die von B und C beschriebenen Kreise um so mehr mit den wahren Bahnlinien BB_1 und CC_1 zusammenfallen, je kleiner BB_1 gewählt

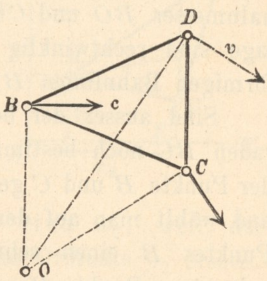
Fig. 14.



wurde. Denkt man sich BB_1 unendlich klein, BC und B_1C_1 als zwei unendlich wenig von einander abweichende Lagen der beweglichen Geraden, so kann man die unendlich kleine Bewegung der Geraden BC als mit der Drehung um O übereinstimmend ansehen. Dieser Punkt O heisst deshalb der **augenblickliche Drehpunkt** oder der **Pol** für die bewegliche Gerade in der Lage BC. Also: Die Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene kann man in jedem Augenblick auffassen als Drehung um einen Punkt O in ihrer Ebene, den augenblicklichen Drehpunkt oder Pol. Dieser ist bestimmt durch die augenblicklichen Bewegungsrichtungen zweier Punkte der Figur.

Die Aufsuchung des Poles O für die Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene bietet den Vortheil, dass aus den Bewegungs- oder Geschwindigkeits-Richtungen zweier Punkte und der Geschwindigkeitsgrösse eines Punktes die Grösse und Richtung der Geschwindigkeit jedes anderen Punktes ermittelt werden kann. Geben z. B. in Fig. 15 die in den Punkten B und C angebrachten Pfeile die Bewegungsrichtungen dieser Punkte an, so sind die zugehörigen Drehungshalbmesser oder Polstrahlen BO und CO rechtwinklig zu den Bewegungsrichtungen. Zieht man von dem Pol O einen Polstrahl nach einem beliebigen Punkte D der Figur, so ist die Richtung der Geschwindigkeit dieses Punktes rechtwinklig zu OD. Da nun bei einer Drehung die Umfangsgeschwindigkeiten den Drehungshalbmessern, hier also den Polstrahlen verhältnisgleich sind, so gilt für die Geschwindigkeitsgrössen v und c der Punkte B und D die Gleichung

Fig. 15.

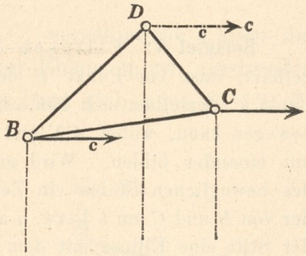


$$v = c\frac{OD}{OB};$$

bei gegebenem c ist also v bestimmt. Ebenso wie die Lage einer ebenen Figur in ihrer Ebene nach S. 12 durch drei Koordinaten gegeben war, so ist ihr augenblicklicher Geschwindigkeits-Zustand durch ebenfalls drei Stücke, nämlich zwei Richtungen und eine Grösse c, bestimmt.

Sind die Bewegungsrichtungen zweier Punkte einander parallel (Fig. 16) so liegt der Pol O in unendlicher Ferne; in Folge dessen haben alle Punkte der Figur Geschwindigkeiten, die nach Richtung, Grösse und Sinn übereinstimmen, d. h. die Bewegung ist in dem betreffenden Augenblick eine **Verschiebung** (oder eine rein fortschreitende Bewegung).

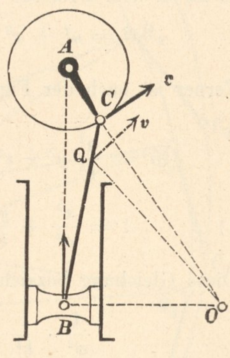
Fig. 16.



Beispiel 1: Bewegung einer Kurbelstange. Der Punkt C der Kurbelstange BC (Fig. 17) wird durch die Kurbel AC in einem Kreise mit dem Mittelpunkt A geführt, während der Punkt B vermöge der Geradführung gezwungen ist, sich längs einer Geraden AB zu bewegen. Die Winkelrechte zu der Bewegungsrichtung des Punktes C ist die Verlängerung der Kurbel AC, während der zu dem Punkte B gehörige Polstrahl BO rechtwinklig zu AB steht. Hierdurch ist der Pol O der Kurbelstange in der Lage BC bestimmt. Ist nun c die Geschwindigkeit des Kurbelzapfens C, so ergiebt sich die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes Q der Stange zu

$$v = c \cdot \frac{OQ}{OC}.$$

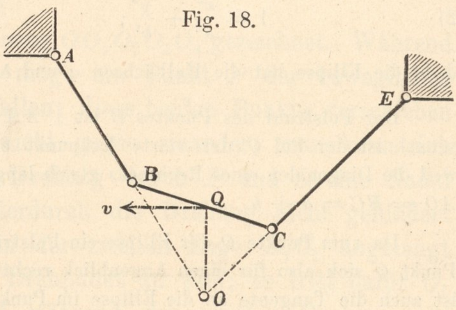
Fig. 17.



Diese Beziehung wird benutzt, wenn man behufs Ermittelung des erforderlichen Schwungrad-Gewichtes einer Dampfmaschine das Arbeitsvermögen der Kurbelstange berechnen will.

Beispiel 2: Pol einer Gelenkstange. Ist $ABCE$ eine an den Widerlager-Gelenken A und E aufgehängte Gelenkstangen-Verbindung, so kann der Punkt B sich nur rechtwinklig zu AB, der Punkt C sich nur rechtwinklig zu EC bewegen. Für die mittlere Stange BC sind daher ABO und ECO zwei Polstrahlen, die den Pol O bestimmen. Mit Hülfe des Poles lässt sich leicht derjenige Punkt der Stange BC angeben, der bei einer unendlich kleinen Verrückung der Stangenverbindung sich wagerecht

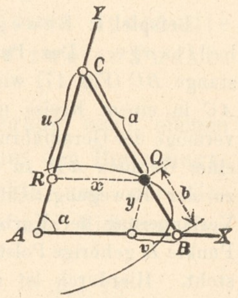
Fig. 18.



bewegen wird; es ist dies derjenige Punkt Q, dessen Polstrahl OQ lothrecht steht. Wie weiter unten gezeigt werden wird, hängt diese Eigenschaft des Punktes Q damit zusammen, dass die Figur $ABCE$ die Gleichgewichtsform ist für eine bei Q an der sonst unbelastet gedachten Stangenverbindung aufgehängte lothrechte Last (vgl. 1. Theil, S. 178 und Fig. 219).

Beispiel 3: Ellipsen-Zeichner. Ein Stab BC (Fig. 19) werde so geführt, dass ein Punkt B derselben sich nur auf einer Geraden AX, ein Punkt C derselben sich nur auf einer Geraden AY bewegen kann, wobei AX und AY einen Winkel α mit einander bilden. Wird nun an einer Stelle Q des beweglichen Stabes ein Zeichenstift eingesetzt, der von B und C um b bezw. a absteht, so beschreibt der Stift eine Ellipse mit dem Mittelpunkt A. Bezeichnet man nämlich die auf AX und AY bezogenen schiefwinkligen Koordinaten des Punktes Q mit x und y; setzt $AC - y = u$ und $AB - x = v$, so ist in dem Dreiecke CQR:

Fig. 19.



$$a^2 = u^2 + x^2 - 2\cos\alpha \cdot u \cdot x .$$

Ferner ist nach der Figur $\frac{u}{y} = \frac{a}{b}$, mithin

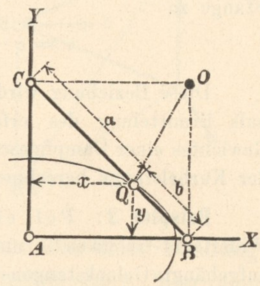
$$a^2 = \frac{a^2}{b^2} y^2 + x^2 - 2\cos\alpha \cdot \frac{a}{b} y x \quad \text{oder}$$

$$1) \qquad 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2\cos\alpha}{ab} xy .$$

Diese Gleichung bezeichnet eine Ellipse, weil

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} - \frac{\cos^2\alpha}{a^2 b^2} > 0 \quad \text{ist.}$$

Fig. 20.



Wird im Besonderen $\alpha = 90^0$ (Fig. 20), so geht Gl. 1 über in

$$2) \qquad 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2};$$

d. h. die Ellipse hat die Halbachsen a und b.

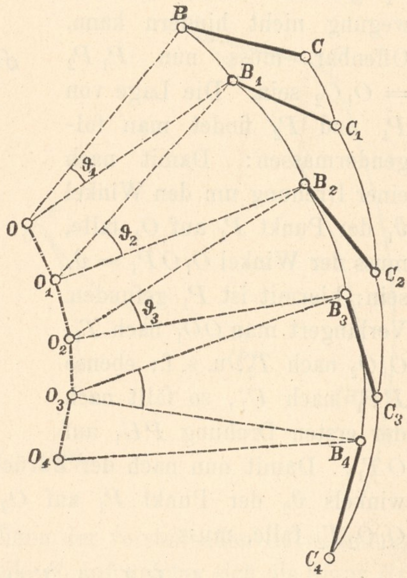
Der Polstrahl des Punktes B ist $\perp AX$, derjenige des Punktes $C \perp AY$; sonach ist der Pol O der vierte Eckpunkt eines Rechtecks $ABOC$ und hat, weil die Diagonalen eines Rechtecks gleich lang sind, vom Punkt A den Abstand $AO = BC = a + b$.

Da zum Punkte Q der Ellipse ein Polstrahl OQ gehört, der beschreibende Punkt Q sich also für einen Augenblick rechtwinklig zu OQ bewegen muss, so ist auch die Tangente an die Ellipse im Punkte Q rechtwinklig zu OQ, d. h. es ist der Polstrahl OQ eine Normale an die Ellipse im Punkte Q.

3. Endliche Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene. Rollbewegung der Polbahnen.

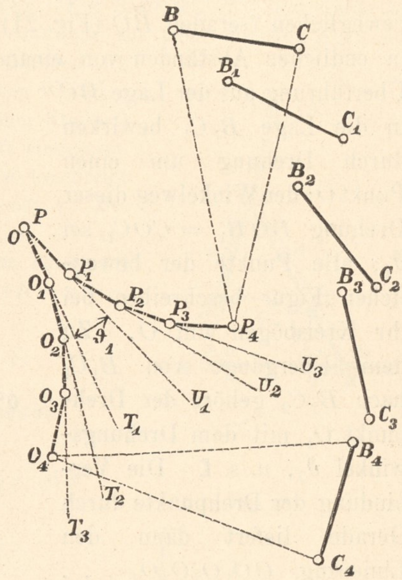
Sind BC, B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3, B_4C_4 verschiedene Lagen der beweglichen Geraden BC (Fig. 21) in einer Ebene, u. zw. einstweilen in endlichen Abständen von einander, so lässt sich nach S. 13 die Überführung aus der Lage BC in die Lage B_1C_1 bewirken durch Drehung um einen Punkt O; der Winkelweg dieser Drehung $BOB_1 = COC_1$ sei ϑ_1; alle Punkte der beweglichen Figur beschreiben bei ihr Kreisbögen um O. Zu dem Übergange von B_1C_1 nach B_2C_2 gehöre der Drehpunkt O_1 mit dem Drehungswinkel ϑ_2, u. s. f. Die Verbindung der Drehpunkte durch Gerade liefert dann den Linienzug $OO_1O_2O_3O_4$ . . . Nun stelle man sich vor, die bewegliche Figur BC sei auf einer grösseren Scheibe S aufgezeichnet, welche auf einer festen Tafel T liege. Die Punkte O gehören zur festen Tafel T; auf ihr sei der Linienzug $OO_1O_2O_3O_4$ gezeichnet. Während die Drehung um O erfolgt, möge ein Punkt P der beweglichen Scheibe S mit O zusammenfallen; diese beiden Punkte verschieben sich während der Drehung nicht gegen einander; man kann sich deshalb während der ersten Drehung durch P und O eine Nadel gesteckt denken; es wird hierdurch die Drehung nicht gehindert werden. Sobald aber BC in der zweiten Lage B_1C_1 angelangt ist, hört der Punkt O auf, Drehpunkt zu sein; es tritt dafür O_1 an die Stelle, und es wird während der zweiten Drehung ein Punkt P_1 (Fig. 22) der Scheibe S mit O_1 zusammenfallen. Da in

Fig. 21.



dem Augenblicke, wo BC in der Lage $B_1 C_1$ sich befindet, P noch mit O zusammenfällt, so muss P_1, welches gleichzeitig mit O_1 sich deckt, um die Länge $PP_1 = OO_1$ von P entfernt sein. Ebenso wird während der Drehung um O_2 ein Punkt P_2 der beweglichen Scheibe mit O_2 in Berührung sein, so dass wiederum eine durch P_2 und O_2 gesteckte Nadel die Bewegung nicht hindern kann. Offenbar muss nun $P_1 P_2 = O_1 O_2$ sein. Die Lage von P_1 und P_2 findet man folgendermassen: Damit nach einer Drehung um den Winkel ϑ_1 der Punkt P_1 auf O_1 falle, muss der Winkel $O_1 O P_1 = \vartheta_1$ sein; hiermit ist P_1 gefunden. Verlängert man OO_1 nach T_1, $O_1 O_2$ nach T_2, u. s. f.; ebenso PP_1 nach U_1, so fällt nach der ersten Drehung PU_1 auf OT_1. Damit nun nach der Zurücklegung eines weiteren Drehungswinkels ϑ_2 der Punkt P_2 auf O_2, d. h. die Gerade $P_1 P_2 U_2$ auf $O_1 O_2 T_2$ falle, muss

Fig. 22.



$$U_1 P_1 U_2 + T_1 O_1 T_2 = \vartheta_2, \quad \text{also}$$

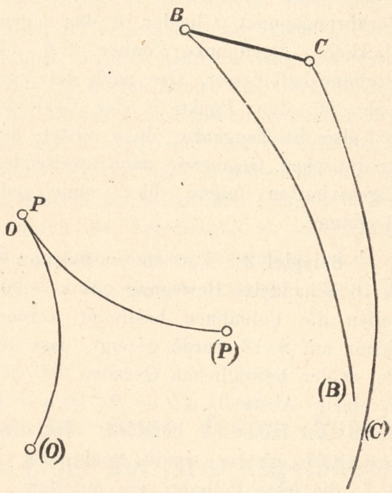
$$U_1 P_1 U_2 = \vartheta_2 - T_1 O_1 T_2$$

gemacht werden. Hiernach steht mit $P_1 P_2 = O_1 O_2$ der Punkt P_2 fest. In derselben Weise findet man P_3, P_4, P_5 . . . Wenn nun die Punkte P der beweglichen Scheibe der Reihe nach mit den Punkten O der festen Tafel T in der beschriebenen Weise zusammenfallen, so führt das Vieleck $PP_1 P_2$ . . . offenbar eine Rollbewegung (ohne Gleiten) auf dem Vieleck $OO_1 O_2$ . . . aus. Die Folge dieser Rollbewegung ist dann, dass die bewegliche Figur BC der Reihe nach die vorgeschriebenen Lagen $B_1 C_1$, $B_2 C_2$ u. s. f. einnimmt. Solange die bewegliche Figur BC ihre Anfangslage innehat, liegt der Punkt, der demnächst mit O_4 zusammenfällt, in P_4; wenn aber BC die Lage B_4C_4 hat, so fällt P_4 mit O_4 zusammen; daher muss P_4 gegen BC ebenso liegen, wie O_4 gegen B_4C_4, d. h.

$$P_4BC \cong O_4B_4C_4, \quad \text{ebenso ist}$$
$$P_1BC \cong O_1B_1C_1 \quad \text{u. s. f.}$$

Im Vorstehenden waren nur einzelne bestimmte Lagen der beweglichen Figur als gegeben angenommen und die Vielecke $OO_1O_2\ldots$, sowie $PP_1P_2\ldots$ so gezeichnet, dass die bewegliche Figur BC der Reihe nach die verschiedenen Lagen B_1C_1, $B_2C_2\ldots$ durchschritt, wobei die Punkte B und C jedesmal Kreisbögen von den Mittelpunktswinkeln ϑ_1, $\vartheta_2\ldots$ beschrieben. Sind aber ausser der Anfangslage BC noch die Bahnlinien $B(B)$ bezw. $C(C)$ der Punkte B und C (Fig. 23) gegeben, wodurch die Bewegung der Figur BC völlig bestimmt ist, so entspricht jeder unendlich kleinen Verrückung der Figur ein augenblicklicher Drehpunkt O auf der festen Tafel, sowie im Sinne der vorstehenden Entwickelung ein Punkt P der beweglichen Scheibe S, auf welcher sich die Figur BC gezeichnet befindet. Statt des Vielecks $OO_1O_2\ldots$ erhält man dann eine Kurve $O(O)$ als geometrischen Ort der augenblicklichen Drehpunkte O der festen Tafel T, sowie statt des Vielecks $PP_1P_2\ldots$ eine Kurve $P(P)$ als geometrischen Ort derjenigen Punkte P der beweglichen Scheibe, welche nach und nach mit den Punkten O zusammenfallen. Die Kurven $O(O)$ und $P(P)$ heissen die **feste** bezw. die **bewegliche Polbahn**, und bei der gegebenen Bewegung erfolgt eine Rollbewegung der beweglichen Polbahn auf der festen Polbahn.

Fig. 23.

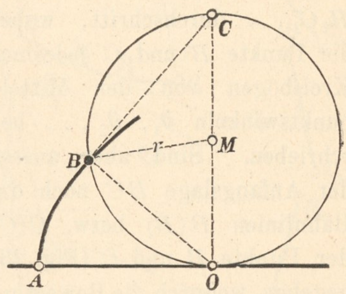


Hiernach ist jede Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene gleichwerthig mit dem Rollen einer mit

der Figur verbundenen Polbahn auf einer festen Polbahn. Dementsprechend ist die ebene Bewegung eines Körpers gleichwerthig mit dem Rollen einer mit dem Körper verbundenen Cylinderfläche P auf einer festen Cylinderfläche O; die Leitlinien dieser Cylinderflächen sind die vorstehend behandelten Polbahnen; die Erzeugenden stehen rechtwinklig zu den Ebenen, in denen die Körperpunkte sich bewegen.

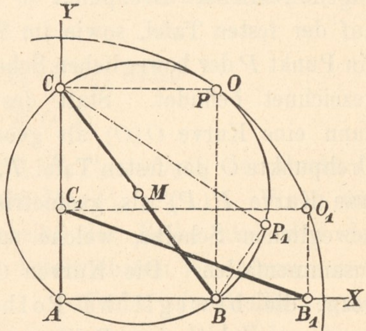
Beispiel 1: Bei der Erzeugung der gemeinen Cykloide ist die Gerade AO (Fig. 24) die feste, der erzeugende Kreis OBC die bewegliche Polbahn. Der Berührungspunkt O beider ist der augenblickliche Drehpunkt, daher OB der Drehungshalbmesser, also auch die Normale für den Punkt B der Cykloide, BC also die Tangente; diese mittels der Analytischen Geometrie nachzuweisenden Eigenschaften folgen hier ohne jede Rechnung.

Fig. 24.



Beispiel 2: Für die in Beispiel 3, S. 16 behandelte Bewegung mit $\alpha = 90^0$ sollen die Polbahnen bestimmt werden. Schon auf S. 16 wurde gezeigt, dass der Pol O der beweglichen Geraden BC sich in einem Abstand $AO = BC = a + b$ von dem Schnittpunkt A der Leitlinien AX und AY befindet. Da dieser Abstand keine veränderliche Grösse enthält, so ist der Ort des Punktes O, d. h. die feste Polbahn, ein mit dem Halbmesser $R = AO = BC$ aus dem Mittelpunkt A beschriebener Kreis (Fig. 25). Für eine andere Lage $B_1 C_1$ der beweglichen Figur ist O_1 der Pol, wobei $B_1 O_1 C_1$ ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypothenuse $B_1 C_1$. Um nun den zu dem Punkte O_1 der festen Polbahn gehörigen Punkt P_1 der beweglichen Polbahn zu finden, haben wir über BC als Hypothenuse ein zu $B_1 O_1 C_1$ kongruentes Dreieck $BP_1 C$ zu zeichnen, dann ist P_1 der gesuchte Punkt. Der Ort der Rechtwinkelpunkte aller über der Hypothenuse BC gezeichneten rechtwinkligen Dreiecke ist aber bekanntlich ein Kreis mit dem Durchmesser $BC = R = 2r$; dieser muss mithin die bewegliche Polbahn P sein. Die gegebene Bewegung also, bei

Fig. 25.



welcher der Stab BC mit den Punkten B und C den Achsen AX bezw. AY folgt, kann auch bewirkt werden durch eine Rollbewegung des kleineren Kreises mit dem Durchmesser $BC = R = 2r$ auf dem inneren Umfange des grösseren Kreises vom Halbmesser $R = BC$. Wenn ein Kreis auf dem inneren Umfange eines grösseren Kreises rollt, so beschreibt jeder Punkt des Umfanges des ersteren eine Hypocykloide. Ist das Verhältnis der Halbmesser r und R der beiden Kreise aber 1 : 2, so geht die Hypocykloide bekanntlich in eine Gerade, einen Durchmesser des grossen Kreises über, zu denen beispielsweise die Achsen AX und AY als Bahnen der Kreispunkte B und C gehören. — Jeder Punkt im Inneren des kleinen Kreises beschreibt allgemein eine verkürzte Hypocykloide, die aber für das Verhältnis 1 : 2 der Halbmesser beider Kreise mit einer Ellipse übereinstimmt, wie es nach S. 16 der Fall sein muss. Der Mittelpunkt des beweglichen Kreises beschreibt im Besonderen einen Kreis; die übrigen Punkte bewegen sich in Ellipsen der verschiedensten Excentricitäten, die Punkte des Umfanges in geraden Linien, nämlich Durchmessern des festen Kreises. Aus diesem Grunde kann mittels der beiden Kreise eine Geradführung hergestellt werden, wie man sie wohl bei älteren Druckmaschinen noch findet. Zu dem Zwecke sind die beiden Kreise mit äusserer und innerer Verzahnung versehen; der Mittelpunkt M des kleineren Kreises wird mittels einer um die Achse A (rechtwinklig zur Bildebene) drehbaren Kurbel von der Länge $r = AM$ im Kreise herumgeführt und hierbei durch die Verzahnung zu einer Rollbewegung auf dem inneren Umfange des grossen Kreises gezwungen. Ein an der Stelle B des kleineren Rades angebrachter Zapfen beschreibt dann die Gerade ABX.

4. Drehung eines Körpers um einen festen Punkt; Bewegung einer sphärischen Figur auf ihrer Kugelfläche.

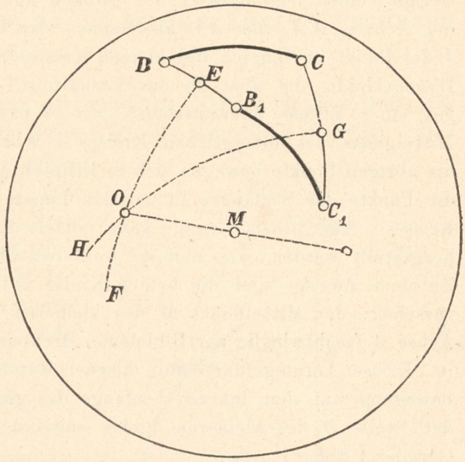
Während die Drehung eines Körpers um eine feste Achse durch Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung völlig bestimmt ist, also nur wenig Mannigfaltigkeit besitzt, ist die Drehung eines Körpers um einen festen Punkt noch in demselben Grade mannigfaltig wie die allgemeine ebene Bewegung.

Schneidet man einen um einen festen Punkt M drehbaren Körper durch eine Kugelfläche vom Halbmesser r, so entsteht eine sphärische Schnittfigur, deren Punkte bei der Bewegung des Körpers stets in dem Abstand r von dem Punkt M, d. h. in ihrer Kugelfläche verbleiben werden. Durch die Bewegung der Schnittfigur ist die Drehung des Körpers völlig bestimmt, und umgekehrt. Für die Bewegung der Figur auf der Kugel und demgemäss für die Drehung des Körpers um den festen Punkt lassen sich nun ähnliche

Beziehungen finden, wie vorstehend für die ebene Bewegung entwickelt wurden.

Die Lage einer sphärischen Figur auf ihrer Kugel ist schon durch die Lage zweier Punkte bestimmt, u. zw. sind dazu nur drei Koordinaten erforderlich. Es genügt daher die Beobachtung der Bewegung einer Seite BC einer sphärischen Figur (Fig. 26).

Fig. 26.



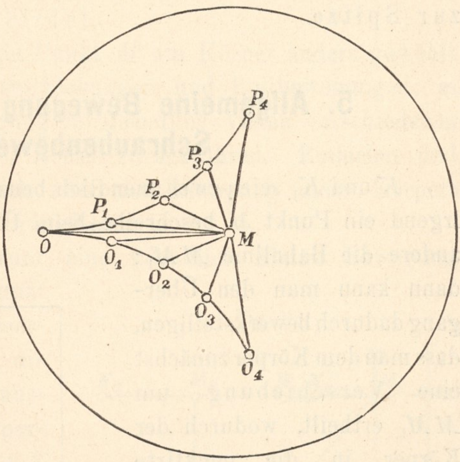
Die Überführung der Seite aus der Anfangslage BC in eine andere Lage B_1C_1 lässt sich durch Drehung um einen Punkt O der Kugelfläche bewirken. Man findet O nach demselben Gedankengange wie bei der ebenen Bewegung auf S. 13; wo aber dort von geraden Linien die Rede war, treten jetzt Grösstkreise der Kugel an ihre Stelle. Zieht man durch B und B_1 einen Grösstkreis und zu ihm durch die Mitte E des Bogens BB_1 einen dazu rechtwinkligen Grösstkreis EF, so haben alle Punkte des letzteren gleichen Abstand von B und B_1; durch Drehung um irgend einen Punkt des Grösstkreises EF würde daher B in die neue Lage B_1 gelangen. Dasselbe gilt bezüglich der Punkte C und C_1 von jedem Punkte des Grösstkreises GH, welcher in der Mitte G von CC_1 rechtwinklig zu CC_1 gezogen ist. Wird nun der Schnittpunkt O von EF und GH zum Drehpunkte gewählt, so gelangt dadurch B nach B_1 und, weil $OBC \cong OB_1C_1$, gleichzeitig C nach C_1, d. h. die Seite BC in ihre zweite Lage B_1C_1. Eine Drehung der BC um den Punkt O ist auch gleichbedeutend mit der Drehung um den Kugelhalbmesser OM als Achse.

Sind BC und B_1C_1 zwei Lagen von unendlich kleinem Abstand, und legt man durch B und C Grösstkreise rechtwinklig zu den Bahnlinien BB_1 und CC_1, so schneiden sich diese in dem Pol oder augenblicklichen Drehpunkt O, dem ein Halbmesser OM der Kugel als augenblickliche Drehachse entspricht. Also:

Die Bewegung einer Figur auf der Kugelfläche kann man in jedem Augenblick auffassen als Drehung um einen Pol O auf der Kugelfläche oder um einen Halbmesser OM der Kugel als augenblickliche Drehachse. Der Pol O und die entsprechende Drehachse OM sind bestimmt durch die augenblicklichen Bewegungsrichtungen zweier Punkte der Figur. Dementsprechend kann man die Drehung eines Körpers um einen festen Punkt M in jedem Augenblick auffassen als Drehung um eine durch M gehende Achse; die Richtung der Drehachse ist bestimmt durch die augenblicklichen Bewegungsrichtungen zweier Punkte.

Bei einer gegebenen Bewegung entspricht jeder Lage der beweglichen Figur ein besonderer Pol O und eine besondere augenblickliche Drehachse OM.

Fig. 27.



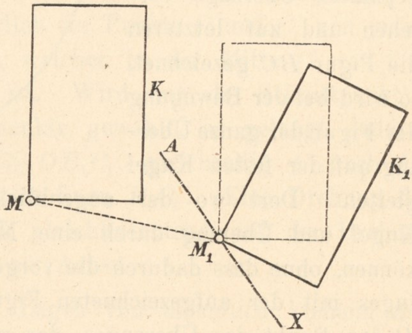
Der Ort der Pole ist die sphärische Polbahn (O), der Ort der augenblicklichen Drehachsen die Kegelfläche (OM) mit der Spitze im Mittelpunkt M der Kugel. Denkt man sich nnn die feste Kugel mit einem ihr genau aufgepassten Überzuge versehen und auf letzteren die Figur BC gezeichnet, so wird bei der Bewegung der Figur der ganze Überzug auf der festen Kugel gleiten. Dort wo der augenblickliche Pol O liegt, wird man Kugel und Überzug durch eine Nadel gegen einander feststellen können, ohne dass dadurch die vorgeschriebene Bewegung des Überzuges mit der aufgezeichneten Figur gehindert wird. Nennt man P den Punkt des Überzuges, der mit dem Pol O der festen Kugel zusammenfällt, so wird ebenso wie bei der ebenen Bewegung (S. 19) jedem Punkt O ein bestimmter Punkt P entsprechen. Der Ort der Punkte P ist eine sphärische Kurve des Überzuges, d. h. mit der beweglichen Figur verbunden, und heisst die bewegliche Polbahn. Sie ist die Leitlinie einer Kegelfläche (PM) mit der Spitze im Mittelpunkt M der Kugel. Die bewegliche Polbahn (P) hat mit der festen Polbahn (O) stets einen Punkt gemeinsam, der auf beiden Bahnen stets um gleiche Bogenlängen sich verschiebt; die bewegliche Polbahn rollt auf der festen Polbahn, oder auch: die bewegliche, mit der Figur verbundene Kegelfläche (PM) rollt auf der festen Kegelfläche. Also:

Jede Bewegung einer sphärischen Figur auf ihrer Kugelfläche kann man auffassen als das Rollen einer mit der Figur verbundenen sphärischen Polbahn auf einer festen sphärischen Polbahn. Dementsprechend ist die Drehung eines Körpers um einen festen Punkt M gleichwerthig mit dem Rollen einer mit dem Körper verbundenen Kegelfläche auf einer festen Kegelfläche; die Kegel haben den festen Drehpunkt M gemeinsam zur Spitze.

5. Allgemeine Bewegung eines Körpers; Schraubenbewegung.

K und K_1 seien zwei unendlich benachbarte Lagen eines Körpers; irgend ein Punkt M beschreibe beim Übergang aus der einen in die andere die Bahnlinie MM_1; dann kann man den Übergang dadurch bewerkstelligen, dass man dem Körper zunächst eine Verschiebung um MM_1 ertheilt, wodurch der Körper in die punktirte Zwischenlage gelangt, und ihn sodann noch um den Punkt M_1 dreht. Diese unendlich kleine Drehung um den Punkt M_1 ist nach S. 23 zurückzuführen auf eine Drehung um eine durch M_1 gehende Achse AX.

Fig. 28.



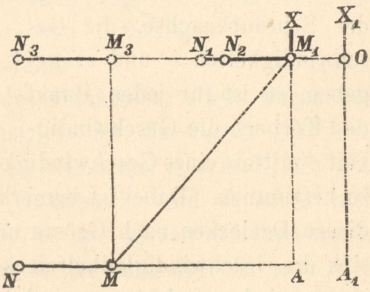
Also: Jede Bewegung eines Körpers kann für einen Augenblick aufgefasst werden als zusammengesetzt aus einer Verschiebung und einer Drehung um eine augenblickliche Drehachse.

Befinden sich die beiden Lagen K und K_1 aber in endlichem Abstande, so muss man, wenn der eine Punkt des Körpers in der gegebenen Bahnlinie MM_1 geführt wird, dem Körper, damit er eine gegebene Bewegung ausführe, gleichzeitig eine Drehung um den richtig geführten Punkt M ertheilen, welche nach S. 24 gleichwerthig ist dem Rollen einer mit dem Körper verbundenen Kegelfläche auf einer anderen Kegelfläche, die mit dem richtig geführten Punkt M parallel verschoben wird. Die Kegel haben den Punkt M gemeinsam zur Spitze. Also:

Die beliebige Bewegung eines Körpers ist gleichwerthig dem Rollen eines mit dem Körper verbundenen Kegels auf einem zweiten Kegel, der eine Verschiebung erleidet. Die Verschiebung stimmt überein mit der Bahnlinie desjenigen Körperpunktes, der die gemeinsame Spitze der Kegel bildet.

Je nachdem der führende Punkt M am Körper anders gewählt wird, ergeben sich andere Verschiebungen und Rollbewegungen; es lässt sich daher eine Bewegung in unendlich vielen verschiedenen Weisen auf Verschiebung und Rollen zurückführen. Einfacher und zugleich bestimmter lässt sich aber die Bewegung eines Körpers auf **Schraubenbewegungen** zurückführen.

Fig. 29.

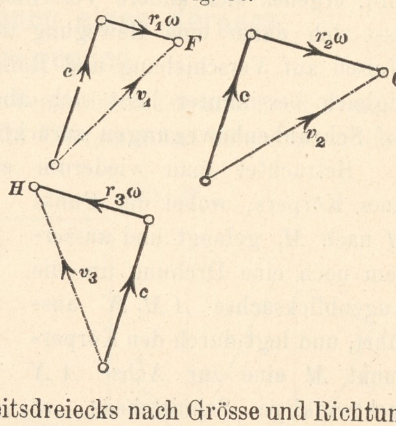


Betrachtet man wiederum eine unendlich kleine Bewegung eines Kŏrpers, wobei der Punkt M nach M_1 gelangt und ausserdem noch eine Drehung um die Augenblicksachse AM_1X ausführt, und legt durch den Körperpunkt M eine zur Achse AX rechtwinklige Schnittebene, so möge eine Schnittfigur MN (Fig. 29) entstehen. Bei der Verschiebung gelangt diese in die Lage M_1N_1, dann ist aber noch eine Drehung um AX erforderlich, durch welche die

Figur in die Endlage $M_1 N_2$ gelangen möge. Enthält die Schnittfigur mindestens drei nicht in dieselbe Gerade fallende Punkte, so bestimmt sie (nach S. 10) die Bewegung des Körpers vollständig. Man verschiebe nun die Schnittfigur MN zunächst rechtwinklig zu ihrer Ebene in ihre neue, durch M_1 gehende Parallelebene, in der sie die Zwischenlage $M_3 N_3$ einnehmen möge; dann ist nur noch eine Überführung in die derselben Ebene angehörende Lage $M_1 N_2$ erforderlich. Diese Bewegung kann man aber nach S. 14 durch Drehung um einen in der Ebene liegenden Pol O oder um eine zur Ebene rechtwinklige Achse $A_1 O X_1$ ausführen. Diese letztere Achse fällt im Allgemeinen nicht mit AX zusammen, ist aber dazu parallel. Hiermit ist die Bewegung der Schnittfigur MN und damit diejenige des Körpers zurückgeführt auf eine Verschiebung und eine Drehung um eine zur Verschiebungsrichtung parallele Achse; eine solche Bewegung aber (Drehung um eine Achse und Verschiebung parallel oder längs derselben) nennt man nach dem 1. Theile, S. 309 eine Schraubenbewegung.

Ist c die Verschiebungsgeschwindigkeit längs der Achse und ω die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um die Schraubenachse, so sind die Geschwindigkeiten v_1, v_2 und v_3 dreier Punkte in den Abständen r_1, r_2 und r_3 von der Achse der Grösse nach dargestellt als Hypothenusen über den Katheten c und $r_1 \omega$, c und $r_2 \omega$ und c und $r_3 \omega$ (Fig. 30). Sind für einen Augenblick die Lage der Schraubenachse, die Geschwindigkeiten c und ω gegeben, so ist für jeden Punkt des Körpers die Geschwindigkeit v mittels eines Geschwindigkeitsdreiecks nach Grösse und Richtung zu bestimmen. Dabei ist bemerkenswerth, dass die Kathete c bei allen diesen Dreiecken nach Grösse und Richtung dieselbe ist. Denkt man sich die Geschwindigkeitsdreiecke nicht wie in Fig. 30 in die Zeichenebene niedergeschlagen, sondern mit den wahren Richtungen im Raume konstruirt und mit den Katheten c aneinander gelegt, so

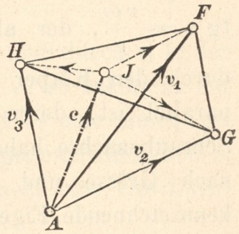
Fig. 30.



bilden die Umfangsgeschwindigkeiten der Drehung $r_1 \omega$, $r_2 \omega$ und $r_3 \omega$ Strahlen, die zu c rechtwinklig stehen, d. h. in einer zu c rechtwinkligen Ebene liegen. In dieser Ebene befinden sich also auch die Endpunkte F, G, H der wahren Geschwindigkeiten v_1, v_2 und v_3.

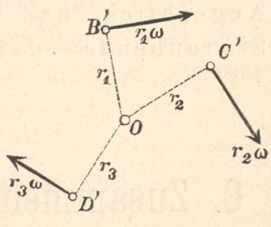
Hierauf gründet sich die zeichnerische Festlegung der Schraubenachse $X_1 X_1$, wenn von drei Punkten B, C und D des Körpers die wahren Geschwindigkeiten v_1, v_2 und v_3 nach Grösse und Richtung gegeben sind. Man trägt nämlich diese drei Geschwindigkeiten von einem Punkt A aus nach Grösse und Richtung auf (Fig. 31), legt durch deren Endpunkte F, G und H eine Ebene E und zieht von A aus eine Rechtwinklige AJ zur Ebene, so ist $AJ = c$ die Verschiebungsgeschwindigkeit der Schraubenbewegung. Zugleich ist nach Grösse und Richtung $JF = r_1 \omega$; $JG = r_2 \omega$; $JH = r_3 \omega$.

Fig. 31.



Projicirt man nun die Punkte B, C und D des Körpers auf eine zu c rechtwinklige Ebene mit den Projektionen B', C' und D' (Fig. 32) und trägt an diesen Projektionen die Umfangsgeschwindigkeiten $r_1 \omega$, $r_2 \omega$ und $r_3 \omega$ auf, so müssen Gerade, die man durch B', C' und D' in dieser Ebene rechtwinklig zu jenen Umfangsgeschwindigkeiten zieht, sich in der Projektion O der Schraubenachse schneiden. Hiermit stehen dann auch die Drehungshalbmesser r_1, r_2 und r_3 fest und somit auch die Winkelgeschwindigkeit ω. Da die Lage des Punktes O schon durch zwei Gerade $B'O$ und $C'O$ bestimmt ist, so ist die Gerade $D'O$ zur Bestimmung überflüssig. Auch ist ω schon aus $r_1 \omega$ und $OB' = r_1$ gefunden, mithin sind hierzu die Grössen r_2 und r_3 nicht mehr nöthig. In den Geschwindigkeiten v_1, v_2 und v_3 von drei bestimmten Punkten B, C und D des Körpers liegen also drei Grössen mehr vor, als für die Ermittelung der augenblicklichen Schraubenbewegung erforderlich sind. Es hängt dies damit zusammen, dass nach S. 11

Fig. 32.



zur Bestimmung der Lage eines Körpers nicht neun, sondern nur sechs Stücke erforderlich sind.

Sämmtliche Punkte der Schraubenachse haben Geschwindigkeiten von der übereinstimmenden Grösse c, deren Richtungen sämmtlich in diese Achse fallen, weil die Drehungshalbmesser r Null sind. Legt man durch den Körper irgend eine Gerade, welche der Schraubenachse parallel ist, so haben deren Punkte wohl auch Geschwindigkeiten gleicher Grösse und Richtung, doch bildet letztere mit der Schraubenachse einen Winkel α, für den $\operatorname{tg} \alpha = \frac{r\omega}{c}$, der also von Null verschieden ist. Legt man aber durch den Körper eine Gerade, die mit der Schraubenachse nicht parallel ist, deren Punkte also verschiedene Abstände von der Schraubenachse haben, so sind die Geschwindigkeiten dieser Punkte nach Grösse und Richtung verschieden. Hiernach kommt die kennzeichnende Eigenschaft der Schraubenachse, dass die Geschwindigkeiten aller ihrer Punkte in der Richtung der Achse liegen, nur der einen Geraden zu. Während also der augenblickliche Bewegungszustand eines Körpers (nach S. 25) in unendlich vielen verschiedenen Weisen auf eine Verschiebung und eine Drehung zurückgeführt werden kann, ist die Zurückführung auf eine Schraubenbewegung nur in einer Weise möglich. Daher hat man den Satz:

Jede Bewegung eines Körpers kann für einen Augenblick, und zwar nur in einer Weise, auf eine Schraubenbewegung zurückgeführt werden.

C. Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen eines Körpers.

I. Drehung und Verschiebung.

Ein Körper habe eine Drehung um eine Achse A mit einer Winkelgeschwindigkeit ω und erleide gleichzeitig eine Verschiebung in einer Richtung, rechtwinklig zu der Achse, mit der Geschwindigkeit c (Fig. 33). Dieser Fall kommt z. B. vor, wenn sich ein