Erste Abtheilung.

Geometrische Bewegungslehre.

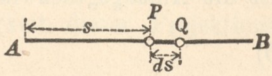
Die geometrische Bewegungslehre verfolgt nicht das Ziel, die Bewegung eines Körpers aus der Wirkung gegebener Kräfte herzuleiten; vielmehr setzt sie die Bewegung als gegeben voraus und untersucht nur ihre Eigenschaften und kennzeichnenden Merkmale. Da nun in dieser Bewegungslehre die Kräfte nicht vorkommen, so braucht auch die Masse der Körper nicht berücksichtigt zu werden, vielmehr erscheinen letztere nur als geometrische Körper.

A. Bewegung eines geometrischen Punktes.

I. Geradlinige Bewegung eines Punktes.

Bewegt sich ein Punkt auf einer geraden Linie AB (Fig. 1), so ist die Bewegung völlig gegeben, wenn für jeden Zeitwerth (Zeitpunkt) t der Abstand s des beweglichen Punktes P von einem auf der Bahnlinie AB befindlichen Festpunkt A bekannt ist, etwa durch die Gleichung

Fig. 1.



1) $$s = f(t).$$

Ändert sich während des Zeittheilchens dt der Abstand s um $PQ = ds$, so ist ds die während der Zeit dt zurückgelegte Wegeslänge, und das Verhältnis

2) $$v = \frac{ds}{dt} = f'(t)$$

heisst die Geschwindigkeit des beweglichen Punktes in dem Zeitpunkte t. Misst man die Wegeslänge nach Metern, die Zeit nach Sekunden, so bedeutet die Geschwindigkeit Meter in der Sekunde ($^m/_s$., s. 1. Theil, S. 7). Richtung und Sinn (Pfeilrichtung) der Geschwindigkeit stimmen mit derjenigen der Bewegung überein.

Die nach Gl. 2 berechnete Geschwindigkeit v ist im Allgemeinen mit der Zeit t veränderlich; erfährt sie während der Zeit dt einen Zuwachs um dv, so nennt man das Verhältnis

3) $$p = \frac{dv}{dt} = f''(t)$$

die Beschleunigung des Punktes im Zeitpunkte t, und zwar mit der Bedeutung Meter in der Quadratsekunde ($^m/_{s^2}$, s. 1. Theil, S. 13). Die Richtung der Beschleunigung p stimmt bei geradliniger Bewegung mit deren Richtung überein; bei positivem $\frac{dv}{dt}$ hat p mit v gleichen Sinn, bei negativem Werth entgegengesetzten Sinn.

Bekommt ein Punkt, der sich zu Anfang, d. h. für den Zeitpunkt $t = 0$, im Festpunkt A befindet und die anfängliche Geschwindigkeit c hat, eine Bewegung mit gleichbleibender Beschleunigung p, so wird nach Gl. 3

$$dv = p \cdot dt, \text{ also } v = pt + C,$$

worin, weil für $t = 0$ $v = c$ sein soll, $C = c$; aus Gl. 2 folgt dann $ds = v \cdot dt = (c + pt)\,dt$, also durch Integration

$$s = ct + \frac{pt^2}{2} + C_1,$$

oder, weil für $t = 0$ auch $s = 0$ sein soll, $C_1 = 0$, daher

4) $$s = ct + \frac{pt^2}{2}.$$

Ist die Anfangsgeschwindigkeit $c = 0$, so wird die Wegeslänge

5) $$s = \frac{pt^2}{2}.$$

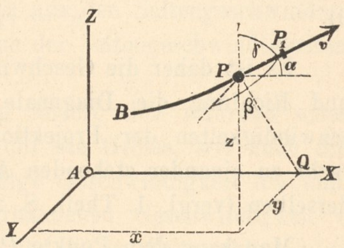
2. Krummlinige Bewegung.

Bewegt sich ein Punkt in einer räumlichen Kurve, so kann man den augenblicklichen Ort P desselben mittels der Koordinaten x, y und z auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz beziehen. Sowohl die Bahnlinie, wie auch die Bewegung in derselben sind völlig bestimmt durch die 3 Gleichungen

6) $$x = f(t); \quad y = F(t); \quad z = \varphi(t);$$

denn auf Grund dieser Gleichungen kann man für jeden Zeitpunkt t den Ort P des beweglichen Punktes berechnen. Entfernt man t aus den Gleichungen, so ergeben sich zwei Gleichungen zwischen x, y und z als die Gleichungen der Bahnlinie. Bewegt sich der Punkt während der Zeit dt von P nach P_1 (Fig. 2), also um die Wegeslänge $ds = PP_1$, so versteht man auch bei der krummlinigen Bewegung unter

Fig. 2.



7) $$v = \frac{ds}{dt}$$

die Geschwindigkeit des Punktes im Zeitpunkte t und bezeichnet auch Richtung und Sinn derselben als mit denen der Bewegung übereinstimmend. Die Richtung der Geschwindigkeit ist also tangential zur Bahnlinie, in so fern die unendlich kleine Sehne PP_1 mit der Tangente an P zusammenfällt. Nennt man α, β und γ die Neigungswinkel der im Punkte P gezogenen Bahnlinien-Tangente gegen die drei Achsen, so sind

$$ds \cdot \cos\alpha, \quad ds \cdot \cos\beta, \quad \text{und} \quad ds \cdot \cos\gamma$$

die Projektionen von ds auf die Achsen. In Fig. 2 ist aber die projicirende Gerade PQ rechtwinklig zur AX, der Punkt Q also die Projektion des Punktes P auf die AX und somit die Gleichung $x = f(t)$ das Gesetz, nach welchen sich die Projektion des Punktes P längs der AX bewegt. Die Geschwindigkeit dieser Projektions-Bewegung ist nach Gl. 6 und Gl. 2

$$v_x = f'(t) = \frac{dx}{dt}.$$

Weil aber dx auch die Projektion von ds auf die AX ist, so wird $dx = ds \cdot \cos\alpha$ und

8) $$v_x = \frac{ds}{dt}\cos\alpha = v \cdot \cos\alpha$$

(nach Gl. 7), d. h. die Geschwindigkeit der Projektion des Punktes P ist gleich der Projektion der Geschwindigkeit v der wahren Bewegung des Punktes P. Das gleiche gilt für die Projektionen auf AY und AZ.

Da nun $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, so wird

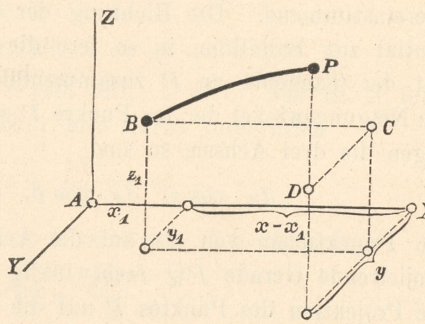
$$\frac{v_x^2}{v^2} + \frac{v_y^2}{v^2} + \frac{v_z^2}{v^2} = 1, \quad \text{oder}$$

9) $$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2.$$

Es ist daher die Geschwindigkeit v des Punktes P nach Grösse und Richtung die Diagonale eines Parallelepipeds aus den Geschwindigkeiten der Projektions-Bewegungen längs dreier, winkelrecht zu einander stehenden Achsen, oder die geometrische Summe derselben (vergl. 1. Theil, S. 20).

Man kann dem Punkte P seine Bewegung längs der räumlichen Bahnlinie BP auch dadurch ertheilen, dass man ihn von dem Punkte B aus (dessen Koordinaten x_1, y_1, z_1) nach dem Gesetz $x = f(t)$ parallel der x-Achse um $BC = x - x_1$ bewegt (Fig. 3), gleichzeitig der Geraden BC eine Parallelverschiebung um CD, parallel der y-Richtung, ertheilt, so dass jeder Punkt der BC der Gleichung $y = F(t)$ folgt und auch noch zu derselben Zeit der Ebene BCD eine Parallelverschiebung um DP im Sinne der z-Achse nach dem Gesetze $z = \varphi(t)$ giebt. Vermöge dieser drei gleichzeitigen Bewegungen um BC, CD, DP gelangt der Punkt von B nach P, und weil die einzelnen Bewegungen den Gleichungen 6 folgen, so gelangt der bewegliche Punkt auch in jedem Zwischenzeitpunkt an die richtige Stelle seiner Bahnlinie BP. Die drei Einzelbewegungen heissen die Seiten-Bewegungen der wahren oder Mittel-Bewegung BP. Die Projektionen der wahren

Fig. 3.



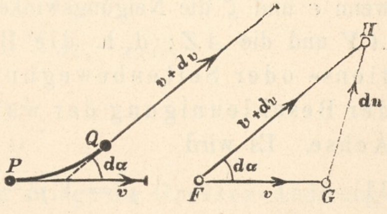
Geschwindigkeit v auf die drei Achsen sind zugleich die Geschwindigkeiten der drei Seitenbewegungen oder die Seitengeschwindigkeiten.

Die vorstehenden Entwickelungen gelten in ihren Hauptzügen auch für ein schiefwinkliges Achsenkreuz, nur bekommen dann die Gl. 8 und 9 eine etwas andere Form. Das Ergebnis dreier gleichzeitigen Geschwindigkeiten ist also stets eine wahre oder Mittelgeschwindigkeit v, welche sich nach Grösse, Richtung und Sinn als die Diagonale eines Parallelepipeds aus den Seitengeschwindigkeiten oder als die geometrische Summe der Seitengeschwindigkeiten ergiebt.

Bei der krummlinigen Bewegung ändert sich während eines Zeittheilchens dt im Allgemeinen sowohl die Grösse, wie auch die Richtung der Geschwindigkeit; diejenige Geschwindigkeit du nun, welche mit der im Zeitpunkte t vorhandenen Geschwindigkeit v zusammengesetzt werden muss, um mit ihr die im Zeitpunkte $t + dt$ geltende Geschwindigkeit $v + dv$ nach Grösse, Richtung und Sinn zu ergeben, heisst die Elementarbeschleunigung und liefert, durch dt getheilt, die **Beschleunigung** p der krummlinigen Bewegung im Zeitpunkte t nach Grösse Richtung und Sinn.

Ist (Fig. 4) PQ ein Bewegungs-Theilchen ds und bilden die an den Stellen P und Q der Bahnlinie vorhandenen Geschwindigkeiten v und $v + dv$ den Winkel $d\alpha$ mit einander, so trage man $v = FG$ und $v + dv = FH$ von einem Punkt F aus nach Grösse, Richtung und Sinn auf; dann ist $GH = du = p \cdot dt$ die Elementarbeschleunigung, und die Beschleunigung $p = du : dt$ stimmt nach Richtung und Sinn mit GH überein.

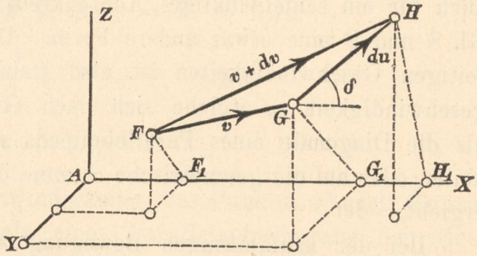
Fig. 4.



Bei krummliniger Bewegung weicht hiernach die Richtung der Beschleunigung p von der Richtung der Geschwindigkeit v ab. Da $v + dv$ die geometrische Summe von v und du ist, so kann die Elementarbeschleunigung als geometrische Differenz von $v + dv$ und v, oder, weil sie unendlich klein ist, als das geometrische Differential von v, die Beschleunigung als die geometrische Abgeleitete von v bezeichnet werden.

Projicirt man das beliebig im Raume liegende Geschwindigkeits-Dreieck FGH (Fig. 5) auf die Achse AX, so ist F_1G_1 die Projektion von v, also nach S. 5 die Seitengeschwindigkeit v_x in der x-Richtung im Zeitpunkte t, F_1H_1 die Projektion von $v + dv$, d. h. die Seitengeschwindigkeit $v_x + dv_x$ im Zeitpunkte $t + dt$. Somit ist $G_1H_1 = dv_x$ die Elementarbeschleunigung der Seitenbewegung in der x-Richtung. Zugleich ist aber G_1H_1 auch die Projektion der Elementarbeschleunigung GH der krummlinigen Bewegung, d. h. wenn $du = GH$ mit der x-Achse den Winkel δ bildet, $dv_x = du \cdot \cos\delta$. Sonach wird, wenn man mit $p_x = \frac{dv_x}{dt}$ die Beschleunigung der Seitenbewegung oder die Seitenbeschleunigung in der x-Richtung bezeichnet,

Fig 5.



10)
$$\left\{\begin{array}{l} p_x = p \cdot \cos\delta; \text{ ebenso} \\ p_y = p \cdot \cos\varepsilon; \\ p_z = p \cdot \cos\zeta, \end{array}\right.$$

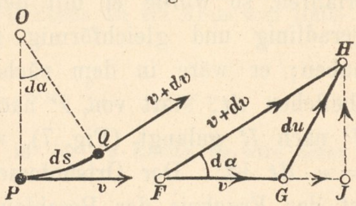
wenn ε und ζ die Neigungswinkel der Beschleunigung p gegen die AY und die AZ; d. h. die Beschleunigung der Projektions- oder Seitenbewegung ist gleich der Projektion der Beschleunigung der wahren Bewegung auf dieselbe Achse. Es wird

11)
$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}.$$

Also ist die Beschleunigung p des Punktes P nach Grösse und Richtung die Diagonale eines Parallelepipeds aus den Seitenbeschleunigungen längs dreier, rechtwinklig zu einander stehenden Achsen, oder die geometrische Summe derselben. Auch wenn die drei Achsen schief zu einander stehen, bleibt p die Diagonale des Parallelepipeds aus p_x, p_y und p_z; nur ändern sich dann die Gleichungen 10 und 11.

Das Geschwindigkeits-Dreieck FGH (Fig. 6) liegt in der durch zwei auf einander folgende Tangenten bestimmten Ebene, der sog. Krümmungsebene des Bahntheilchens PQ. In dieser Ebene liegt also auch du und die Beschleunigung $p = du : dt$. Die Elementar-Beschleunigung du lässt sich zerlegen in GJ und JH, von denen GJ in die Richtung der Tangente an die Bahnlinie, JH in die Richtung der in der Krümmungsebene liegenden Normalen zur Bahnlinie, der sog. Hauptnormalen fällt. Entsprechendes gilt von der wahren Beschleunigung p, insofern man dieselbe in die Tangential-Beschleunigung $p_t = \overline{GJ} : dt$ und die Normal-Beschleunigung $p_n = \overline{JH} : dt$ zerlegen kann. Nach der Figur 6 ist

Fig. 6



$$GJ = (v + dv) \cos d\alpha - v = dv$$

(wegen $\cos d\alpha = 1$), also

$$p_t = \frac{dv}{dt}. \tag{12}$$

$$JH = (v + dv) \sin d\alpha = v \cdot d\alpha$$

(weil $\sin d\alpha = d\alpha$ und $dv \cdot d\alpha$ unendlich klein zweiter Ordnung). Weil ferner $d\alpha = ds : \varrho$ ($\varrho = OP$ der erste Krümmungshalbmesser) und $ds = v \cdot dt$, so wird

$$JH = v \cdot \frac{v}{\varrho} dt = \frac{v^2}{\varrho} dt, \quad \text{also}$$

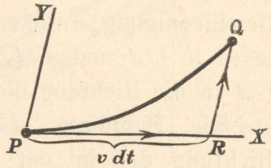
$$p_n = \frac{v^2}{\varrho}. \tag{13}$$

Die **Tangential-Beschleunigung** bringt die Grössen-Änderung der Geschwindigkeit zum Ausdruck, während die **Normal-Beschleunigung** die Richtungs-Änderung der Geschwindigkeit darstellt. Die Normal-Beschleunigung wird noch bestimmter **Centripetal-Beschleunigung** genannt, weil ihr Sinn nach dem ersten Krümmungs-Mittelpunkte der Bahnlinie gerichtet ist.

Die vorstehenden Lehren finden sich dem Wesen nach schon im 1. Theil, S. 3—30 eingehend behandelt und sind hier nur des Zusammenhanges wegen noch einmal kurz wiederholt.

Ablenkung (Deviation). Hätte der Punkt, der in Wirklichkeit eine ungleichförmige, krummlinige Bewegung mit der Gesammt-Beschleunigung p ausführt, vom Zeitpunkte t an keine Beschleunigung erfahren, so würde er mit der damaligen Geschwindigkeit v sich geradlinig und gleichförmig fortbewegt haben; er wäre in dem nächsten Zeittheilchen dt, statt von P nach Q, von P nach R gelangt (Fig. 7), worin $PR = v \cdot dt$ ist. Der Ortsunterschied RQ ist das Ergebnis der Beschleunigung p. Er heisst die Ablenkung oder Deviation (nämlich von der geradlinig-gleichförmigen Bewegung).

Fig. 7.



Zerlegt man die wahre Bewegung PQ in zwei Seitenbewegungen, von denen die eine in die Richtung PX der im Punkte P an die Bahnlinie gelegten Tangente, die andere in die Richtung PY der im Punkte P vorhandenen Beschleunigung fällt, so ist im Zeitpunkte t die Seitengeschwindigkeit in der x-Richtung $v_x = v$, in der y-Richtung $v_y = 0$, weil die wahre Geschwindigkeit v in der x-Richtung liegt; es ist die Seitenbeschleunigung in der x-Richtung Null, in der y-Richtung $p_y = p$, weil die wahre Beschleunigung in der y-Richtung liegt. Daher ist die Seitenbewegung in der x-Richtung eine gleichförmige mit der Geschwindigkeit v, die Seitenbewegung in der y-Richtung eine gleichförmig-beschleunigte Bewegung mit der Beschleunigung p, der Anfangsgeschwindigkeit Null und der Wegeslänge $p \cdot \frac{dt^2}{2}$ (nach Gl. 5, S. 2). Hieraus folgt, dass die

14) $$\textbf{Ablenkung } RQ = p\frac{dt^2}{2}$$

ist und nach Richtung und Sinn mit der Beschleunigung p übereinstimmt.

Beispiel: Ein Punkt bewege sich nach den auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz bezogenen Gleichungen:

15) $$x = r \sin \frac{c}{r} t; \quad y = r \cos \frac{c}{r} t; \quad z = ut,$$

worin r, c und u unveränderlich sein sollen. Entfernt man mit $t = \frac{z}{u}$ die Zeitgrösse aus den Gleichungen, so entsteht

16) $$x = r \sin \frac{c}{ru} z; \quad y = r \cos \frac{c}{ru} z$$

als die beideu Gleichungen der räumlichen Bahnlinie. Es bezeichnet dies eine c y l i n d r i s c h e S c h r a u b e n l i n i e. Quadrirung und Addition der Gl. 16 liefern nämlich

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

d. h. die Projektion der Bahnlinie auf die xy-Ebene ist ein Kreis vom Halbmesser r. Die Seitengeschwindigkeiten sind

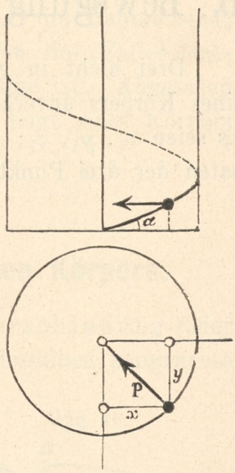
$$v_x = \frac{dx}{dt} = c \cos \frac{c}{r} t; \quad v_y = -c \sin \frac{c}{r} t; \quad v_z = u.$$

Betrachtet man nur die Seitenbewegungen in der xy-Ebene, so wird deren Geschwindigkeit

17) $$w = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = c,$$

d. h. der Kreis vom Halbmesser r wird von der Projektion des Punktes auf die xy-Ebene gleichförmig durchlaufen, und da der Punkt in der z-Richtung eine ebenfalls gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit u hat, so beschreibt er gleichmässig eine cylindrische Schraubenlinie (Fig. 8) von dem Halbmesser r und dem Ansteigungs-Verhältnisse

Fig. 8.



18) $$\operatorname{tg} \alpha = \frac{u}{c},$$

der Ganghöhe $h = 2 r \pi \frac{u}{c}$

mit der Geschwindigkeit

19) $$v = \sqrt{c^2 + u^2} = c \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = c \sec \alpha.$$

Die Seitenbeschleunigungen sind:

$$p_x = \frac{dv_x}{dt} = -\frac{c^2}{r} \sin \frac{c}{r} t = -\frac{c^2}{r} \frac{x}{r};$$

$$p_y = -\frac{c^2}{r} \cos \frac{c}{r} t = -\frac{c^2}{r} \frac{y}{r} \quad \text{und} \quad p_z = 0.$$

Die Projektionsbewegung in der xy-Ebene erfolgt mit einer Beschleunigung

20) $$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = \frac{c^2}{r};$$

sie ist, weil diese Bewegung eine gleichförmige Kreisbewegung, eine reine Centripetalbeschleunigung (vergl. Gl. 13, S. 7), d. h. stets nach dem Mittelpunkt A des Kreises gerichtet. Weil aber $p_z = 0$, so ist auch die Gesammt-Beschleunigung der Schraubenlinien-Bewegung

$$p = \frac{c^2}{r},$$

deren Richtung und Sinn an jeder Stelle der Schraubenlinie nach der Achse derselben gekehrt und zu dieser rechtwinklig ist.

Bezeichnet aber ρ den ersten Krümmungshalbmesser der Schraubenlinie, so muss nach Gl. 13, S. 7 und Gl. 20 auch

$$p_n = p = \frac{v^2}{\rho} = \frac{c^2}{r}$$

sein, also wird $\rho = r\frac{v^2}{c^2}$, oder nach Gl. 19

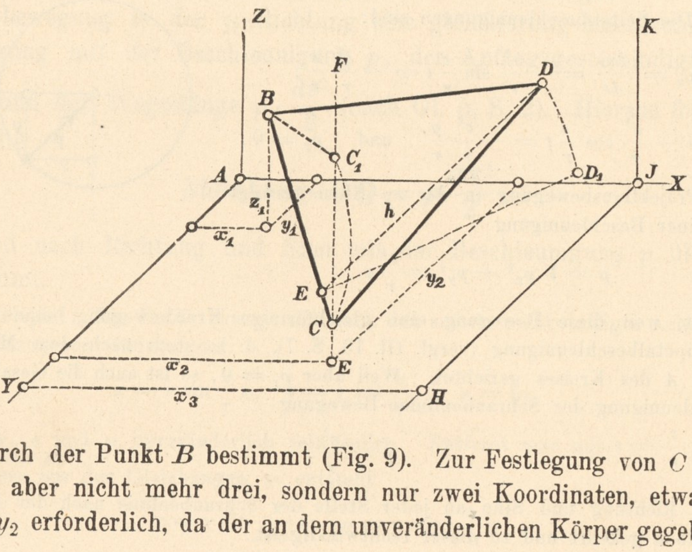
21) $$\rho = r \sec^2 \alpha .$$

Die entsprechenden Krümmungs-Mittelpunkte liegen auf den Richtungen von p, jedoch um $\rho - r = r \operatorname{tg}^2 \alpha$ jenseits der Achse. Ihr geometrischer Ort ist also eine Schraubenlinie vom Halbmesser $r \operatorname{tg}^2 \alpha$ und der Ganghöhe h.

B. Bewegung eines geometrischen Körpers.

Drei nicht in einer Geraden befindliche Punkte B, C und D eines Körpers unveränderlicher Form bestimmen die Lage desselben. Es seien x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 die rechtwinkligen Koordinaten der drei Punkte; sind nun zunächst x_1, y_1, z_1 gegeben, so ist

Fig. 9.



dadurch der Punkt B bestimmt (Fig. 9). Zur Festlegung von C sind dann aber nicht mehr drei, sondern nur zwei Koordinaten, etwa x_2 und y_2 erforderlich, da der an dem unveränderlichen Körper gegebene