Für $\frac{y_1}{t} = 3$ oder $y_1 = 0{,}192$ wird

$$0{,}023 \cdot x_1 = 0{,}216 - 0{,}192 - 0{,}224\,(0{,}9384 - 0{,}9334)$$

mit $x_1 = 1$ m.

Für $\frac{y_2}{t} = 2{,}5$ oder $y_2 = 0{,}16$ m wird

$$0{,}023\, x_2 = 0{,}216 - 0{,}16 - 0{,}224\,(0{,}9482 - 0{,}9334)$$

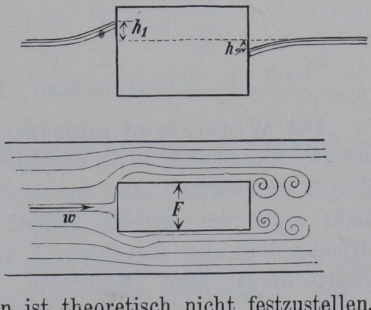
mit $x_2 = 2{,}3$ m.

Dieser Wassersprung ist in Fig. 332, S. 318 gezeichnet; die Längen sind in 1 : 100, die Höhen in 1 : 20 dargestellt.

4. Druck strömenden Wassers gegen feste Körper; Widerstand des Wassers gegen bewegte Körper.

Bei scheinbarer (relativer) Ruhe des Wassers gegen einen in denselben eingetauchten festen Körper heben sich die wagerechten Seitenkräfte des Wasserdrucks gegen den Körper auf. Strömt aber das Wasser mit einer Geschwindigkeit w gegen den ruhenden Körper, so werden die einzelnen, ohne Anwesenheit des Körpers parallel verlaufenden Stromfäden gezwungen, den Körper zu umfliessen, sich in gekrümmten Bahnen zu bewegen, wozu Kräfte erforderlich sind; das Wasser staut sich an der Vorderseite auf, während an der Rückseite eine Vertiefung entsteht (Fig. 335). Es erfolgt daher auf der Vorderseite eine Vergrösserung, auf der Rückseite eine Verminderung des Druckes gegenüber dem Ruhezustande um P_1 bezw. P_2. Die Gesammtwirkung der Strömung besteht daher in einer Kraft D im Sinne der Geschwindigkeit w, und zwar ist

Fig. 335.



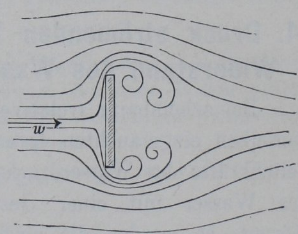
1) $\quad D = P_1 + P_2.$

Der Verlauf der Stromfäden ist theoretisch nicht festzustellen. In Anlehnung aber an die Formel für den Druck eines Wasserstrahls gegen einen fremden Körper (S. 269) darf man mit einiger Wahrscheinlichkeit setzen:

2) $$P_1 = \zeta_1 \gamma F \frac{w^2}{2g}; \quad P_2 = \zeta_2 \gamma F \frac{w^2}{2g},$$

wenn γ die Dichte der Flüssigkeit, F der grösste Querschnitt des eingetauchten Theiles des festen Körpers, rechtwinklig zur Geschwindigkeit w gemessen. Für ein Prisma mit ebenen, rechtwinklig zu w stehenden Endflächen kann mit einiger Wahrscheinlichkeit $\zeta_1 = 1$ gesetzt, d. h. angenommen werden, dass die Druckvermehrung P_1 an der Vorderseite einer Druckhöhe $h_1 = \frac{w^2}{2g}$ entspricht, während ζ_2 von der Länge des Prismas abhängig ist. Bei einer dünnen Platte (Fig. 336) ist die Druckverminderung an der Rückseite am stärksten; man setze, wenn l die Länge des Prismas in der Stromrichtung, für

Fig. 336.



$$\frac{l}{\sqrt{F}} = 0{,}03 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 6$$

$$\zeta_2 = 0{,}86 \quad 0{,}46 \quad 0{,}35 \quad 0{,}33 \quad 0{,}34$$

Die Gesammtwirkung der Strömung auf den Körper ist

$$D = \zeta \gamma F \frac{w^2}{2g} \tag{3}$$

mit $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2$, dann wird für

$$\frac{l}{\sqrt{F}} = 0{,}03 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 6$$

$$\zeta = 1{,}86 \quad 1{,}46 \quad 1{,}35 \quad 1{,}33 \quad 1{,}34.$$

Der Widerstand ruhenden Wassers gegen prismatische, mit der Geschwindigkeit w in der Richtung der Prismenachse bewegte Körper ist ebenfalls nach den Gl. 1 — 3 zu beurtheilen. Es wären dafür sogar die gleichen Ziffern zu erwarten; aus unbekannten Gründen sind aber die Ziffern ζ_2 kleiner, während ζ_1 ebenfalls $= 1$ gesetzt werden kann. Es ist für

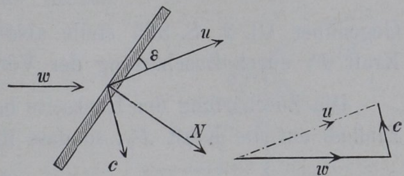
$$\frac{l}{\sqrt{F}} = 0{,}03 \quad 1 \quad 3 \quad 6$$

$$\zeta_2 = 0{,}43 \quad 0{,}17 \quad 0{,}10 \quad 0{,}10$$

$$\zeta = 1{,}43 \quad 1{,}17 \quad 1{,}10 \quad 1{,}10.$$

Hat die vom Wasser getroffene Platte selbst eine Geschwindigkeit c, so kommt für den Druck N gegen die Platte, der bei Vernachlässigung von Reibung und Adhäsion nur rechtwinklig zur Platte sein kann, die scheinbare (relative) Geschwindigkeit u des Wassers gegen die Platte in Frage. Bildet diese mit der Platte den Winkel ε, so hat die Seitengeschwindigkeit $u \cos \varepsilon$ des Wassers parallel zur Platte keinen Einfluss; es wird der Druck N nur durch die Seitengeschwindigkeit $u \sin \varepsilon$ rechtwinklig zur Platte bedingt. Ist wiederum F die Grösse der Platte, γ die Dichte der Flüssigkeit, so wird auf Grund von Gl. 3 (S. 326)

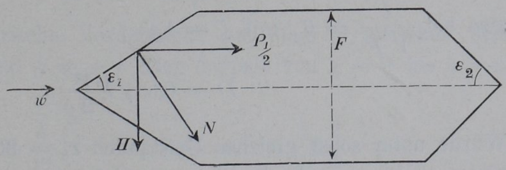
Fig. 337.



4)
$$\boldsymbol{N} = \zeta \gamma \boldsymbol{F} \frac{\boldsymbol{u}^2 \sin^2 \varepsilon}{2 \boldsymbol{g}}.$$

Ist ein prismatischer Körper vorn und hinten durch je einen Keil mit lothrechten Seitenebenen und den halben Keilwinkeln ε_1 bezw. ε_2 zugeschärft (Fig. 338), so wird, weil die eine Fläche des Vorderkeils die Grösse $\dfrac{F}{2 \sin \varepsilon_1}$ hat, der Normaldruck gegen diese

Fig. 338.



$$N = \zeta_1 \gamma \cdot \frac{F}{2 \sin \varepsilon_1} \frac{w^2}{2g} \sin^2 \varepsilon_1 .$$

Diese Kraft kann man zerlegen in eine Querkraft H, die durch eine entgegengesetzte, von der anderen Keilfläche herrührende, aufgehoben wird, und eine Längskraft

$$N \sin \varepsilon_1 = \zeta_1 \gamma \frac{F}{2} \frac{w^2}{2g} \sin^2 \varepsilon_1 ,$$

die $= {}^1\!/\!_2 P_1$ zu setzen ist, weil die zweite Fläche des Vorderkeils eine ebenso grosse, gleichgerichtete Kraft liefert und beide zusammen die Druckvergrösserung P_1 der Vorderseite (in Folge der Strömung) bilden. Sonach ist

5) $$P_1 = \zeta_1 \gamma F \frac{w^2}{2g} \sin^2 \varepsilon_1 .$$

Gegenüber Gl. 2, S. 325 stellt also $\sin^2 \varepsilon_1$ die Verminderung der Kraft P_1 durch Zuschärfung der Vorderseite aus.

Die Zuschärfung der Rückseite hat einen ähnlich verkleinernden Einfluss auf die Kraft P_2, so dass man

6) $$P_2 = \zeta_2 \gamma F \frac{w^2}{2g} \sin^2 \varepsilon_2 ,$$

mithin den Gesammtdruck des bewegten Wassers gegen den Körper

7) $$D = (\zeta_1 \sin^2 \varepsilon_2 + \zeta_2 \sin^2 \varepsilon_2) \gamma F \frac{w^2}{2g}$$

setzen kann.

Für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 45^0$ wird z. B.

$$D = \frac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta_2) \gamma F \frac{w^2}{2g} = \frac{1}{2} \zeta \gamma F \frac{w^2}{2g},$$

also bei $\frac{l}{\sqrt{F}} = 6$, mit $\zeta = 1{,}1$:

$$D = 0{,}55 \gamma F \frac{w^2}{2g} .$$

Würde unter sonst gleichen Umständen $\varepsilon_2 = 90^0$, der Körper also hinten nicht zugeschärft sein, so erhielte man

$$D = (0{,}5 + 0{,}1) \gamma F \frac{w^2}{2g} = 0{,}6 \gamma F \frac{w^2}{2g},$$

während $\varepsilon_1 = 90^0$, $\varepsilon_2 = 45^0$, d. h. Zuschärfung nur am hinteren Ende,

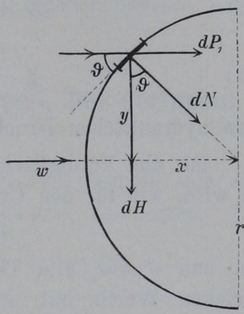
$$D = (1 + 0{,}055) \gamma F \frac{w^2}{2g} = 1{,}055 \gamma F \frac{w^2}{2g}$$

liefern würde.

Sind Vorder- und Hinterfläche des Körpers gekrümmt, so wendet man die vorstehenden Rechnungen auf ein als eben betrachtetes Flächentheilchen an und findet den Gesammtdruck D durch Integration.

Ist die Vorderfläche eine Cylinderfläche vom Halbmesser r und der Höhe h, so wird (Fig. 339) für ein Flächentheilchen $dF = ds \cdot h$ derselben, welches mit w den Winkel ϑ bildet und die Mittelpunkts-Koordinaten x und y hat:

Fig. 339.



8) $$dN = \zeta_1 \gamma dF \frac{w^2 \sin^2\vartheta}{2g},$$

oder, wenn man zur Abkürzung

9) $$\zeta_1 \gamma \frac{w^2}{2g} = \mathfrak{p}_1 \quad \text{setzt:}$$

10) $$dN = \mathfrak{p}_1 dF \sin^2\vartheta.$$

Die Seitenkraft in der Richtung von w wird dann:

$$dP_1 = \mathfrak{p}_1 dF \sin^3\vartheta,$$

während die andere Seitenkraft dH ohne Bedeutung ist. Weil nun $dF = h \cdot ds$, $\sin\vartheta = \frac{x}{r} = \frac{dy}{ds}$ und $x^2 = r^2 - y^2$, so wird

$$dP_1 = \mathfrak{p}_1 h \frac{x^2}{r^2} dy = \mathfrak{p}_1 \frac{h}{r^2}(r^2 - y^2)\, dy.$$

Für die halbcylindrische Vorderfläche hat man y zwischen den Grenzen $y = -r$ und $y = +r$ oder doppelt von $y = 0$ bis $y = r$ zu nehmen, mithin

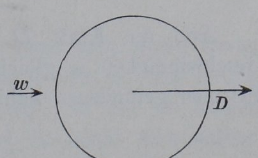
$$P_1 = 2\mathfrak{p}_1 \frac{h}{r^2}\int_0^r (r^2 - y^2)\, dy = 2\mathfrak{p}_1 \frac{h}{r^2} \frac{2}{3} r^3.$$

Da nun die Querschnittsfläche des Körpers $F = 2rh$, so wird

$$P_1 = {}^2/_3\, \mathfrak{p}_1 F,$$

d. h. es wird in Folge der halbcylindrischen Abrundung der Überdruck P_1 gegenüber dem auf eine ebene Fläche F auf $^2/_3$ verkleinert. Für einen **Vollcylinder** ist dann an der Rückseite ebenso der Minderdruck

Fig. 340.



$$P_2 = \frac{2}{3}\mathfrak{p}_2 F, \quad \text{wenn}$$

$$\mathfrak{p}_2 = \zeta_2 \gamma \frac{w^2}{2g} \quad \text{bedeutet,}$$

daher der gesammte Druck

$$11)\qquad D = \frac{2}{3}\zeta\gamma F\frac{w^2}{2g} \quad \text{oder auch}$$

$$12)\qquad D = \frac{2}{3}\mathfrak{p}F, \quad \text{wenn}$$

$$13)\qquad \mathfrak{p} = \zeta\gamma\frac{w^2}{2g}$$

den hydraulischen Druck für 1^{qm} ebene Fläche bedeutet.

Ist die Vorderfläche des Körpers eine Halbkugelfläche, so wird, wie für den Cylinder

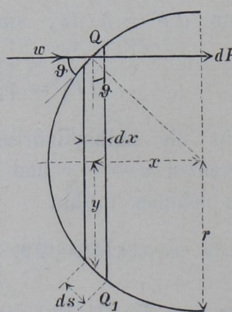
$$dP_1 = \mathfrak{p}_1 dF\sin^3\vartheta.$$

Da nun ϑ für alle Theile der Kugelzone QQ_1 (Fig. 341) den gleichen Werth hat, so kann als dF sogleich die ganze Zone

$$dF = 2\pi y\,ds = 2r\pi\,dx$$

eingeführt werden. Dann wird mit

Fig. 341.



$$\sin\vartheta = \frac{x}{r}:$$

$$dP_1 = \mathfrak{p}_1\frac{2r\pi}{r^3}x^3dx.$$

Dies giebt, für die Halbkugel zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = r$ integrirt:

$$P_1 = \mathfrak{p}_1\cdot\frac{2\pi}{r^2}\int_0^r x^3dx = \frac{1}{2}\mathfrak{p}_1 r^2\pi = \frac{1}{2}\mathfrak{p}_1 F.$$

Die halbkugelförmige Abrundung vermindert also den Überdruck P_1 gegenüber dem für eine ebene Fläche auf die Hälfte. Für eine **Kugel** ist dann an der Rückseite ebenso $P_2 = {}^1/_2\mathfrak{p}_2 F$, daher der gesammte Druck

$$14)\qquad D = \frac{1}{2}\mathfrak{p}F = \frac{1}{2}\zeta\gamma F\frac{w^2}{2g}.$$

Soll die Kraft D die Kugel in ruhendem Wasser mit der Geschwindigkeit w gleichmässig bewegen, so ist, wenn man die für Prismen gefundenen Zahlen auch hier anwendet, nach S. 326, mit

$$\frac{l}{\sqrt{F}} = \frac{2r}{r\sqrt{\pi}} = 1{,}128,$$

$\zeta = 1{,}16$ zu wählen. Hiernach wird dann

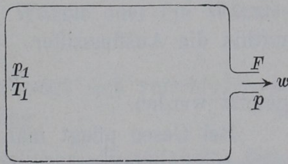
$$D = 0{,}58 \gamma F \frac{w^2}{2g},$$

während Versuche im Mittel die Ziffer 0,54 ergeben haben.

5. Ausfluss der Gase aus Gefässen, bei geringem Überdruck.

Innerhalb eines grossen Gefässes (Fig. 342) befinde sich ein Gas unter dem Drucke p_1 und der absoluten Temperatur T_1, wonach dann auf Grund der Zustandsgleichung (Gl. 5, S. 210) auch die Dichte

Fig. 342.



1) $$\gamma_1 = \frac{1}{v_1} = \frac{p_1}{RT_1}$$

bestimmt ist. Ausserhalb des Gefässes herrsche der Druck p. Dann kann man, falls $p_1 : p$ nicht viel grösser als 1 ist, annehmen, dass das aus einer kleinen Öffnung F strömende Gas beim Ausströmen den Druck p annimmt. Mit dieser Druckverminderung ist nicht allein eine Verminderung der Dichte, sondern auch eine Verminderung der Temperatur verbunden. Bei nur geringem Unterschiede der Drücke p und p_1 möge aber die Dichte-Verminderung einstweilen unberücksichtigt bleiben, also angenommen werden, dass das Gas mit der Dichte γ_1 auch zum Ausflusse gelange. Unter dieser Annahme verschwindet der wesentliche Unterschied zwischen Gasen und tropfbar-flüssigen Körpern, und es kann nun die Gleichung für den Ausfluss des Wassers (Gl. 4, S. 232) auch auf Gase angewandt werden, d. h. (für kleine Öffnung)

$$w = \sqrt{2g\left(h + \frac{p_1 - p}{\gamma_1}\right)}.$$

Der Druck p_1 nimmt im Gefässe von oben nach unten etwas zu, jedoch sehr unbedeutend. Bezeichnet man mit p_1 den Druck des Gases in der Höhe der Ausflussöffnung, so ist in obiger Gleichung $h = 0$ zu setzen. Sodann muss die nicht unmittelbar zu messende Dichte γ_1 nach Gl. 1 eingeführt, endlich auch, ebenso