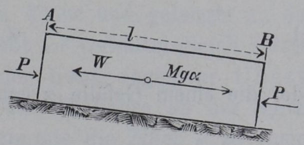
3. Bewegung des Wassers in Kanälen und Flüssen.

a) Gleichförmige Bewegung des Wassers in Kanälen.

Soll die beständige (d. h. im Beharrungszustande begriffene) Wasserbewegung gleichförmig, soll die Geschwindigkeit w in allen Querschnitten von gleicher Grösse sein, so muss auch der vom Wasser erfüllte Querschnitt F überall dieselbe Grösse haben. Bei überall gleicher Querschnittsform des Kanalbettes giebt sich also eine gleichförmige Bewegung durch überall gleiche Tiefe in einem Längenschnitte zu erkennen.

In einer ganz von Wasser erfüllten Röhre ist die Gleichfömigkeit oder Ungleichförmigkeit der Bewegung allein dadurch bedingt, ob der Röhrenquerschnitt überall gleich ist oder nicht; ein oben offenes Kanalbett aber kann vom Wasser auf verschiedene Höhe erfüllt werden, und nur unter bestimmten Bedingungen wird die Bewegung gleichförmig erfolgen.

Fig. 313.



Nehmen wir den Widerstand W, den das Wasser bei seiner Fortbewegung zu überwinden hat, einstweilen wieder, wie bei den Röhren, proportional mit der Berührungsfläche und mit der Geschwindigkeitshöhe an, so ergiebt sich, wenn man (Fig. 313) einen Wasserkörper vom Querschnitt F und der Länge l betrachtet, und u der benetzte Umfang des Querschnitts ist (Gl. 1, S. 277)

$$1)\qquad W = \varkappa u l \frac{w^2}{2g}.$$

Da nun die Druckkräfte P an den beiden Querschnitten A und B sich offenbar aufheben, so muss, wenn man wegen der Kleinheit des Neigungswinkels α dessen Sinus gleich dem Bogen setzt, die Seitenkraft der Schwere

$$Mg\alpha = W, \quad \text{d. h.}$$

$$\gamma F l \alpha = \varkappa u l \frac{w^2}{2g},$$

also, wenn man, wie auf S. 277, $\varkappa = \gamma \beta$ setzt,

2) $$\alpha = \beta \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g}$$

sein, mit β als Widerstandsziffer für Wasser in dem Kanale. Bei einem Querschnitte von sehr grosser Breite b im Verhältnisse zur Tiefe ist annähernd $u = b$ und $\frac{F}{u}$ gleich der mittleren Tiefe. Wegen der massgebenden Bedeutung dieses Quotienten $F : u$ in Gl. 2 nennt man daher allgemein

3) $$\frac{F}{u} = r$$

die mittlere hydraulische Tiefe oder den mittleren Radius; hiermit wird das für gleichmässige Bewegung nöthige Gefällverhältnis

4) $$\alpha = \frac{\beta}{r} \frac{w^2}{2g},$$

oder die einem Gefälle α entsprechende Geschwindigkeit

$$w = \sqrt{\frac{2g\alpha r}{\beta}},$$ wofür man mit

5) $$\sqrt{\frac{2g}{\beta}} = k$$ zu setzen pflegt

6) $$w = k\sqrt{\alpha r}.$$

Ebenso wie bei der Bewegung in Röhren (S. 278) ist aber auch hier die einfache Annahme für W (Gl. 1) nicht genau zutreffend und deshalb auch β und das daraus folgende k keine völlig konstante oder etwa nur von der Regelmässigkeit des Bettes abhängige Grösse.

Bei der Berechnung von Röhrenweiten hatte die Veränderlichkeit von $\lambda = 4\beta$ keine sehr grosse Wichtigkeit. Man musste sich nur hüten, die Widerstände zu unterschätzen, während eine Überschätzung nur eine etwas reichliche Weite lieferte, deren Einfluss auf die Kosten meist nicht erheblich war, die Leistungsfähigkeit der Röhrenleitung aber für eine um so längere Zeit sicherte. Bei einer Röhrenleitung hat man das Wasser mittels

Abstellvorrichtungen stets in der Gewalt, bei einem oben offenen Kanal oder Fluss aber nicht.

Ist bei einem Kanal oder Flusse das Gefällverhältnis α zu gross, so entsteht eine Geschwindigkeit, die grösser ist, als beabsichtigt oder erwartet war. In Folge dessen kann möglicherweise das Kanalbett beschädigt und auch die Wassertiefe vielleicht für etwaige Schifffahrt oder für Rücksichten der Landwirthschaft zu klein werden, während der entgegengesetzte Fall eine Überschwemmung herbeiführen kann. Während man eine Wasserleitung mit Gewalt im Zaume hält, kann man Kanäle und Flüsse nur durch die Mittel der Wissenschaft beherrschen. Aus diesem Grunde hat man seit etwa 150 Jahren mit Aufwendung grosser Kosten sich bemüht, für die Ziffer k befriedigende Gesetze aufzufinden.

Der ostfriesische Baubeamte Brahms erkannte zuerst 1753, wie es möglich sei, dass das Wasser beim Abwärtsfliessen eine gleichförmige Bewegung ausführen könne und gelangte zu der Formel 6, indem er den Widerstand mit w^2 verhältnisgleich setzte. Zu gleichem Ergebnisse kam 1775 der franz. Ingenieur Chézy. Eytelwein (geb. 1764, gest. 1848), der 21 Jahre an der Spitze des preussischen Bauwesens stand, bestimmte die Ziffer k zu einem Werthe, der, auf Metermaſs umgerechnet, zu

$$k = 50$$

abgerundet werden kann.

Mit bedeutenden Mitteln wurden dann 1850—60 in Nordamerika unter Leitung der Ingenieure Humphreys und Abbot umfassende Versuche am Mississippi und seinen Nebenflüssen angestellt. Diese Flüsse verursachten nämlich fast alljährlich verheerende Überschwemmungen, und zur Verbesserung der Wasserläufe bedurfte man vor Allem der Kenntnis der Bewegungsgesetze. Die von den amerikanischen Ingenieuren aufgestellte Formel ist sehr verwickelt, sie lautet

$$7)\qquad w = \left\{\sqrt{0{,}0025\, m + \sqrt{68{,}72\, r_1 \sqrt{\alpha}}} - 0{,}05 \sqrt{m}\right\}^2$$

$$\text{mit}\quad m = \frac{0{,}933}{\sqrt{r + 0{,}457}};\quad r_1 = \frac{F}{u + b},$$

wenn b die Breite des Wasserspiegels bedeutet. Humphreys und Abbot glaubten nämlich auch einen verzögernden Einfluss der über dem Wasserspiegel befindlichen Luft annehmen zu sollen, weshalb in der Hülfsgrösse r_1 der Gesammtumfang $u + b$ vorkommt.

Sehr umfassende Versuche wurden auch im Auftrage der französischen Regierung in den Jahren 1856—64 unter der Leitung von Darcy und nach dessen Tode von Bazin angestellt. Diese Versuche erstreckten sich auf Gerinne, Kanäle und Flüsse der verschiedensten Art. Bazin fasste die Ergebnisse in die Formel zusammen:

8) $$w = \sqrt{\frac{r a}{m + \frac{n}{r}}},$$

oder, wenn man die Grundform der Gl. 6 beibehält, also $w = k\sqrt{ra}$ setzt:

9) $$k = \frac{1}{\sqrt{m + \frac{n}{r}}}$$

und wegen Gl. 5 die Widerstandsziffer

10) $$\beta = \frac{2g}{k^2} = 2g\left(m + \frac{n}{r}\right).$$

Hierin bedeuten m und n Ziffern, die von der Beschaffenheit der Kanalwand, bezw. des Flussbettes abhängen. Es gelten:

1. für Kanäle aus gehobeltem Holz oder aus Cement:

$$m = 0{,}000\,15;\; n = 0{,}000\,004\,5;$$

2. für Kanäle aus ungehobeltem Holz, aus Quadern oder Ziegeln:

$$m = 0{,}000\,19;\; n = 0{,}000\,013\,3;$$

3. für Kanäle aus Bruchsteinmauerwerk:

$$m = 0{,}000\,24;\; n = 0{,}000\,06;$$

4. für Kanäle in Erde:

$$m = 0{,}000\,28;\; n = 0{,}000\,35.$$

Diese Formeln sagen aus, der Widerstand sei wohl mit dem Quadrate der Geschwindigkeit verhältnisgleich, nicht aber einfach mit der Grösse der Berührungsfläche, sondern stehe zu dieser in einer verwickelbaren Beziehung, im wesentlichen übereinstimmend mit der Darcy'schen Formel für λ bei Röhren (Gl. 7, S. 278).

Die Formeln von Humphreys und Abbot und die von Bazin ergänzen sich und schliessen sich auch gegenseitig aus. Erstere ist aus den Messungen an grossen Strömen gewonnen, in denen sich das Wasser trotz geringen Gefälles wegen grosser Tiefe r mit grosser Geschwindigkeit bewegt und passt auch nur für solche, während dagegen Bazin's Formel für kleinere Gewässer ($r < 6^{\mathrm{m}}$) mit stärkerem Gefälle geeignet ist.

Im Jahre 1869 haben sich nun die schweizerischen Ingenieure Ganguillet und Kutter mit gutem Erfolge der schwierigen Aufgabe unterzogen, die Ergebnisse der Messungen in Nordamerika und in Frankreich in eine einzige Formel von allgemeiner Gültigkeit zusammenzufassen. Danach ist, wenn man die Form $w = k\sqrt{r\alpha}$ beibehält,

11) $$k = \frac{23 + \frac{1}{n} + \frac{0{,}00155}{\alpha}}{1 + \left(23 + \frac{0{,}00155}{\alpha}\right)\frac{n}{\sqrt{r}}}.$$

Hierin ist n von der Rauhigkeit des Bettes abhängig; man hat zu setzen:

1. für Kanäle aus gehobeltem Holz oder aus Cement: $n = 0{,}010$;
2. für Kanäle aus ungehobeltem Holz: $n = 0{,}012$;
3. für Kanäle aus Quadern oder Ziegeln: $n = 0{,}0013$;
4. für Kanäle aus Bruchsteinen: $n = 0{,}0017$;
5. für Kanäle in Erde: $n = 0.025$;
6. für Gewässer mit gröberen Geschieben oder mit Wasserpflanzen: $n = 0{,}030$.

Bazin selbst hat sich in anerkennendster Weise über die Formel von Ganguillet und Kutter ausgesprochen, und sie kann als die beste allgemeine Formel bezeichnet werden.

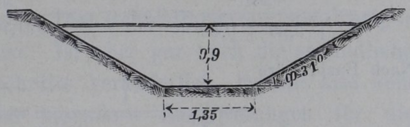
Bei den meisten einschlägigen Aufgaben des Wasserbaues handelt es sich (besonders in Deutschland) um kleinere und mittlere Wasserläufe, d. h. auf Fälle des Anwendungsgebietes der Bazin'schen Formel; da nun letztere einfacher ist als die schweizerische, so ist für diese Fälle die Bazin'sche Formel zu empfehlen. Für Kanäle in Erde ergeben sich für verschiedene Grössen r die Werthe k und $\beta = 2g : k^2$, wie folgende Tabelle zeigt:

Werthe k und β nach der Bazin'schen Formel für Kanäle in Erde.

r	k	β
0,1	16,3	0,0742
0,2	22,2	0,0397
0,3	26,3	0,0284
0,4	29,4	0,0226
0,5	31,9	0,0192
0,6	34,0	0,0169
0,7	35,8	0,0153
0,8	37,3	0,0141
0,9	38,7	0,0131
1,0	39,8	0,0124
1,1	40,9	0,0117
1,2	41,8	0,0112
1,3	42,7	0,0108
1,4	43,4	0,0104
1,5	44,1	0,0101
1,6	44,3	0,0098
1,7	45,4	0,0095
1,8	45,9	0,0093
1,9	46,4	0,0091
2,0	46,9	0,0089
2,5	48,8	0,0082
3,0	50,2	0,0078
4,0	52,2	0,0072
5,0	53,5	0,0069
6,0	54,4	0,0066

Beispiel 1: Ein Graben von einem Querschnitte nach Fig. 314 habe ein Gefällverhältnis $\alpha = 0{,}000\,441$ Bei dem Böschungswinkel $\varphi = 31^0$ ist $\operatorname{tg} \varphi = 0{,}6$, $\sec \varphi = 1{,}17$, $\sin \varphi = 0{,}515$, $\operatorname{cosec} \varphi = 1{,}942$. Dann ist die mittlere Breite

Fig. 314.



$$1{,}35 + \frac{0{,}9}{0{,}6} = 2{,}85\ ^{\mathrm{m}},$$

der Querschnitt

$$F = 2{,}85 \cdot 0{,}9 = 2{,}565\ ^{\mathrm{qm}};$$

der benetzte Umfang $u = 1{,}35 + 2 \cdot 0{,}9 \cdot \operatorname{cosec} \varphi = 4{,}85\ ^{\mathrm{m}}$, daher $r = 2{,}565 : 4{,}85 = 0{,}529\ ^{\mathrm{m}}$. Nach Messungs-Ergebnissen war die wirkliche Geschwindigkeit $w = 0{,}467\ ^{\mathrm{m}}$. Es sollen damit die Ergebnisse der vorstehenden Formeln verglichen werden. Es ist

$$\sqrt{r\alpha} = \sqrt{0{,}529 \cdot 0{,}000\,441} = 0{,}015\,27\,.$$

Nach Eytelwein wäre

$$k = 50; \quad w = 0{,}763\,.$$

Nach Humphreys und Abbot:

$$m = \frac{0{,}933}{\sqrt{0{,}529} + 0{,}457} = 0{,}94; \quad r_1 = \frac{2{,}565}{4{,}85 + 4{,}35} = 0{,}279; \quad w = 0{,}563\,.$$

Nach Bazin wäre

$$k = \frac{1}{\sqrt{0{,}000\,28 + \dfrac{0{,}000\,35}{0{,}528}}} = 32{,}57 \quad \text{und } w = 0{,}497\,.$$

Nach Ganguillet und Kutter wäre

$$k = \frac{23 + 40 + \dfrac{0{,}001\,55}{0{,}000\,441}}{1 + \left(23 + \dfrac{0{,}001\,55}{0{,}000\,441}\right) \dfrac{0{,}025}{\sqrt{0{,}529}}} = 34{,}80 \quad \text{und } w = 0{,}531\,.$$

Hiernach geben die Formeln sämmtlich zu grosse Werthe für die Geschwindigkeit; die Bazin'sche schliesst sich dem Ergebnisse der Messung am besten an, dann folgt die schweizerische, dann die amerikanische Formel, während die Eytelwein'sche Formel am meisten abweicht.

Beispiel 2: Die Elbe hatte bei Altengamm oberhalb Hamburg bei Hochwasser im März 1881 eine Wasserspiegelbreite $b = 587{,}4\ ^{\mathrm{m}}$, einen benetzten Umfang $u = 591{,}4\ ^{\mathrm{m}}$, einen Flächeninhalt $F = 3132{,}7\ ^{\mathrm{qm}}$, mithin $r = 5{,}297\ ^{\mathrm{m}}$. Das Gefällverhältnis betrug $\alpha = 0{,}000\,152$. Die Geschwindigkeit wurde zu $w = 1{,}17\ ^{\mathrm{m}}$ gemessen. Es ist

$$\sqrt{r\alpha} = \sqrt{5{,}297 \cdot 0{,}000\,152} = 0{,}028\,38\,.$$

Nach Eytelwein wäre

$$k = 50; \quad w = 1{,}42\,\mathrm{m}.$$

Nach Humphreys und Abbot wäre

$$m = \frac{0{,}933}{\sqrt{5{,}297 + 0{,}457}} = 0{,}389; \quad r_1 = \frac{3132{,}7}{591{,}4 + 587{,}4} = 2{,}658\,\mathrm{m}; \quad w = 1{,}42.$$

Nach Bazin wäre

$$k = \frac{1}{\sqrt{0{,}000\,28 + \frac{0{,}000\,35}{5{,}297}}} = 53{,}8; \quad w = 1{,}53.$$

Nach Ganguillet und Kutter wäre

$$k = \frac{23 + 40 + \frac{0{,}001\,55}{0{,}000\,152}}{1 + \left(23 + \frac{0{,}001\,55}{0{,}000\,152}\right)\frac{0{,}025}{\sqrt{5{,}297}}} = 53{,}8; \quad w = 1{,}53.$$

Auch in diesem Falle liefern die Formeln sämmtlich zu grosse Werthe; die amerikanische und die Eytelwein'sche stimmen überein und schliessen sich der Messung am nächsten an, während die Bazin'sche und die schweizerische Formel am meisten, und zwar ebenfalls um gleich viel abweichen.

In beiden Fällen stimmen die Ergebnisse der Messung mit denen der Formeln, selbst der am besten passenden, nicht sehr befriedigend überein. Es hat eben jeder Bach, jeder Kanal, jeder grössere Theil eines langgestreckten Flusses seine besondere Eigenthümlichkeit, seinen besonderen Rauhigkeitsgrad, d. h. seine besonderen Ziffern m und n (nach Bazin) bezw. n (nach Ganguillet und Kutter), die der Wasserbaubeamte, der sich mit dem Gewässer zu beschäftigen hat, entweder durch Messungen feststellen oder nach dem Augenschein auf Grund genauerer Kenntnis anderer Wasserläufe abschätzen muss. Die Eigenthümlichkeiten eines Flusses lassen sich nicht wohl in allgemeine Formeln zwängen. Wenn man dies erwägt, wird man sich bezüglich allgemeiner Formeln mit dem bisher Erreichten begnügen können. Auch ist zu bedenken, dass Unregelmässigkeiten in der Bewegung des Wassers, Wirbel u. dgl. häufig die Messung erschweren und ihre Richtigkeit beeinträchtigen, so dass zuweilen auch deren Ergebnisse von der Wirklichkeit nicht unerheblich abweichen können. Schliesslich aber muss betont werden, dass die vorstehenden Formeln sich nur auf eine **gleichförmige** Bewegung beziehen, d. h. an die Bedingung geknüpft sind, dass der vom Wasser eingenommene Querschnitt F sich auf eine gewisse Länge des Flusses nicht erheblich ändere. Diese Bedingung wird sehr häufig nicht erfüllt sein, und manche Abweichung zwischen Messung und Formel wird man auf diesen Umstand zurückführen können. Die Behandlung ungleichförmiger Bewegung erfolgt weiter unten. Ist aber gar noch die sekundliche Wassermenge Q eines Querschnitts veränderlich, besteht also kein Beharrungszustand, so treten besondere Erschwerungen für die Berechnung ein, weshalb solche Fälle hier nicht behandelt werden können.

b) Querschnittsform kleinsten Widerstandes.

Hat ein Kanal den Zweck, einer Wasserkraftmaschine (Wasserrad oder Turbine) das Betriebswasser zuzuführen, so kann es darauf ankommen, von dem ganzen zur Verfügung stehenden Gefälle für den Zuleitungskanal möglichst wenig zu verbrauchen, damit für die Kraftmaschine möglichst viel übrig bleibe. Da nun nach Gl. 4, S. 292 das erforderliche Gefällverhältnis mit $r = F : u$ umgekehrt proportional ist, so wird diejenige Form des vom Wasser erfüllten Kanalquerschnitts am günstigsten sein, bei welcher r möglichst gross, d. h. bei gegebener Querschnittsfläche F der vom Wasser benetzte Umfang u möglichst klein ist.

Da von allen Figuren gegebenen Flächeninhalts der Kreis den geringsten Gesammtumfang hat, so wird, weil bei einem Kanale nur der vom Wasser benetzte Umfang in Frage kommt, der Halbkreis die Kanalform kleinsten Widerstandes sein (Fig. 315), welche annähernd für den unteren Theil des Querschnitts gemauerter Entwässerungskanäle Anwendung findet.

Fig. 315.

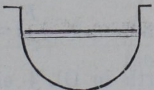
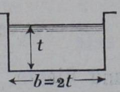


Fig. 316.

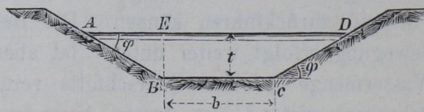


Für rechteckig zu formende Holzgerinne liefert das halbe Quadrat (Fig. 316) den kleinsten Widerstand, da das ganze Quadrat von allen Rechtecken gegebener Fläche den kleinsten Umfang hat.

Für Kanäle in Erde ist der Böschungswinkel φ der Seitenwände durch die Beschaffenheit des Erdreichs bedingt; Bodenbreite b

und Wassertiefe t sind so zu wählen, dass bei gegebener Fläche F der benetzte Umfang u möglichst klein werde. Da nun (Fig. 317) der Grundriss AE der Seitenwand AB die Grösse $t \cdot \cot\varphi$ hat, so ist die mittlere Breite $b + t \cdot \cot\varphi$, daher

Fig. 317.



1) $F = t(b + t\cot\varphi)$

und, weil $AB = t : \sin\varphi$, der benetzte Umfang

2) $$u = b + \frac{2t}{\sin\varphi}.$$

Durch Gl. 1 ist die Bodenbreite bedingt zu

$$b = \frac{F}{t} - t\cot\varphi;\ \text{hiermit wird}$$

3) $$u = \frac{F}{t} - t\cot\varphi + \frac{2t}{\sin\varphi} = \frac{F}{t} + t\,\frac{2 - \cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Damit nun u als $f(t)$ ein Minimum werde, muss

4) $$\frac{du}{dt} = -\frac{F}{t^2} + \frac{2 - \cos\varphi}{\sin\varphi} = 0,\ \text{d. h.}$$

5) $$t = \sqrt{\frac{F\sin\varphi}{2 - \cos\varphi}}$$

sein. Dass dieser Werth u zu einem Minimum und nicht zu einem Maximum macht, ist unmittelbar daraus ersichtlich, dass für $t = 0$ der Umfang u nach Gl. 3 unendlich gross wird.

Ein einfaches Verhältnis zwischen Bodenbreite b und Wassertiefe t ergiebt sich, wenn man aus Gl. 1 bildet

$$\frac{F}{t^2} = \frac{b}{t} + \cot\varphi$$

und diesen Werth in Gl. 4 einsetzt; dann wird

$$\frac{b}{t} + \cot\varphi = \frac{2 - \cos\varphi}{\sin\varphi} \quad \text{oder}$$

$$\frac{b}{t} = 2 \cdot \frac{1 - \cos\varphi}{\sin\varphi} = 2\,\frac{2\sin^2(1/2\,\varphi)}{2\sin 1/2\,\varphi \cdot \cos 1/2\,\varphi},\ \text{d. h.}$$

6) $$\frac{b}{t} = 2\,\mathrm{tg}\,(1/2\,\varphi).$$

Diese Gleichung bedeutet, dass der vom Wasser erfüllte Querschnitt ein einem Halbkreise vom Halbmesser t umschriebenes Trapez sein muss. Denn bei einem solchen (Fig. 318) ist

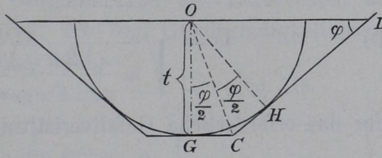
$$\sphericalangle\, GOH = \varphi,$$

$$\sphericalangle\, GOC = {}^1\!/_2\, \varphi, \text{ d. h.}$$

$$\frac{{}^1\!/_2\, b}{t} = \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right),$$

übereinstimmend mit Gl. 6.

Fig. 318.



Für $\varphi = 90^0$ entsteht wieder das halbe Quadrat. Die Rechnung führt also darauf, dass man sich der überhaupt günstigsten Halbkreisform so weit zu nähern habe, wie die vorhandenen Bedingungen es zulassen.

Aus Gl. 5 ergiebt sich:

7) $$\frac{F}{t^2} = \frac{2 - \cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Setzt man aber in Gl. 2 für b den Werth $2\,t\operatorname{tg}({}^1\!/_2\,\varphi)$ nach Gl. 6 ein, so entsteht

$$u = 2\,t \cdot \operatorname{tg}({}^1\!/_2\,\varphi) + \frac{2\,t}{\sin\varphi} \quad \text{oder}$$

$$\frac{u}{2\,t} = \frac{\sin({}^1\!/_2\,\varphi)}{\cos({}^1\!/_2\,\varphi)} + \frac{1}{\sin\varphi}$$

$$= \frac{2\sin^2({}^1\!/_2\,\varphi)\cos({}^1\!/_2\,\varphi) + \cos({}^1\!/_2\,\varphi)}{\cos({}^1\!/_2\,\varphi)\sin\varphi}$$

$$= \frac{2\sin^2({}^1\!/_2\,\varphi) + 1}{\sin\varphi} = \frac{1 - \cos\varphi + 1}{\sin\varphi} \quad \text{also}$$

8) $$\frac{u}{2\,t} = \frac{2 - \cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Aus Gl. 7 und 8 folgt:

$$\frac{F}{t^2} = \frac{u}{2\,t} \quad \text{oder} \quad \frac{F}{u} = \frac{t}{2}.$$

Also ist bei der günstigsten Kanalform die mittlere hydraulische Tiefe

$$9)\qquad r = \frac{F}{u} = \frac{t}{2}$$

unabhängig von φ. Somit wird nach der Bazin'schen Formel

$$10)\qquad w = \sqrt{\frac{{}^1\!/_2\, \alpha t}{m + \frac{2n}{t}}} = \frac{t}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{{}^1\!/_2\, m t + n}}$$

oder das erforderliche Gefällverhältnis

$$11)\qquad \alpha = w^2\left(\frac{2m}{t} + \frac{4n}{t^2}\right) = w^2\left(\frac{m}{r} + \frac{n}{r^2}\right).$$

Beispiel: Ein Zuleitungskanal soll in der Sekunde $Q = 2^{\mathrm{cbm}}$ Wasser liefern; die Geschwindigkeit werde, damit einerseits keine Beschädigung der Kanalwände, andererseits keine Absetzung von Sinkstoffen erfolge, zu $w = 0{,}5^{\mathrm{m}}$ gewählt, so dass $F = 4^{\mathrm{qm}}$ werden muss. Es soll hiernach die Querschnittsform kleinsten Widerstandes bestimmt werden unter Annahme eines Böschungswinkels $\varphi = 30^0$.

Gl. 6 bestimmt $\frac{b}{t} = 2 \cdot \mathrm{tg}\, 15^0 = 0{,}536$. — Nach Gl. 5 wird

$$b = \sqrt{\frac{4 \cdot \sin 30^0}{2 - \cos 30^0}} = 1{,}33^{\mathrm{m}}, \quad \text{also}$$

$$t = 0{,}536 \cdot 1{,}33 = 0{,}71^{\mathrm{m}}.$$

Nach Gl. 9 ist dann $r = 0{,}355$ und nach Gl. 11 das erforderliche Gefällverhältnis

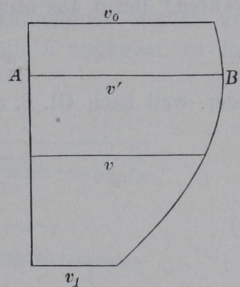
$$\alpha = 0{,}25\left(\frac{0{,}000\,28}{0{,}355} + \frac{0{,}000\,35}{0{,}355^2}\right) = 0{,}000\,891 = 1 : 1122.$$

Grosser Werth ist dieser Rechnung nicht beizulegen, da in Wirklichkeit auch die ebenfalls von Breite und Tiefe abhängigen Kosten des Kanals mit in Frage kommen.

c) Geschwindigkeiten in den verschiedenen Punkten eines Querschnitts.

Im Vorstehenden wurde die Bewegung des Wassers in einem Kanale so aufgefasst, als ob die Wassermasse wie ein starrer prismatischer Körper in dem Kanal abwärts glitte, als ob alle Theile dieses Körpers die gleiche Geschwindigkeit w hätten. In Wirklichkeit ist dies nicht der Fall, vielmehr ist die Geschwindigkeit der Wassertheilchen an verschiedenen Stellen des Querschnitts eine verschiedene. In Folge der Reibung werden die nahe den Kanalwandungen befindlichen Wassertheilchen zurückgehalten und fliessen langsamer als die entfernteren. Im Wasserspiegel giebt sich bei Messungen ein sog. Stromstrich zu erkennen, wo die Geschwindigkeit grösser ist als zu beiden Seiten. In einer Lothrechten sind die Geschwindigkeiten ebenfalls von Punkt zu Punkt verschieden. Stellt man diese durch wagerechte Ordinaten von der Lothrechten aus dar, so ergiebt sich eine Kurve, die sog. Geschwindigkeitskurve, (Fig. 319). Diese ist mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit eine Parabel mit wagerechter Achse. Würde am Wasserspiegel gar kein Widerstand auftreten, so müsste die Achse AB der Parabel wohl im Wasserspiegel liegen. Bei ruhiger Luft bietet diese aber dem Wasser einen, wenn auch geringen, Widerstand, der bewirkt, dass die grösste Geschwindigkeit v' einer Lothrechten sich etwas unter Wasser findet. Stromaufwärts wehender Wind schiebt die Achse der Parabel nach unten, und umgekehrt. Die Höhenlage der Achse ist daher schwankend. Kennt man die Geschwindigkeit v an drei verschiedenen Stellen einer Lothrechten, so ist damit die Parabel bestimmt, weil man aus diesen den Parameter der Parabel, die Höhenlage ihrer Achse und den Abstand $AB = v'$ ihres Scheitels von der Lothrechten berechnen kann.

Fig. 319.



Ist dF ein Theilchen der Querschnittsfläche, v die zugehörige Geschwindigkeit, so ist $dQ = dF \cdot v$ die zugehörige sekundliche Wassermenge, dargestellt durch ein wagerechtes Prisma vom Querschnitte dF und der Länge v. Denkt man sich zu allen Flächentheilchen die entsprechende Geschwindigkeit rechtwinklig aufgetragen, so entsteht ein Körper, dessen lothrechte in der Stromrichtung geführte Schnitte die Geschwindigkeitsflächen (Fig. 319) sind und dessen Inhalt die sekundliche Gesammtwassermenge Q darstellt. Verwandelt man diesen Körper in ein gerade abgeschnittenes Prisma vom Querschnitt F, so ist seine Länge

1) $$w = \frac{Q}{F}$$

die mittlere Geschwindigkeit des Querschnitts, auf welche sich die Erörterungen S. 291 bis 302 durchweg beziehen.

Werthvoll ist die Beziehung zwischen der grössten Oberflächengeschwindigkeit $v_{0\,max}$ im Stromstrich und der mittleren Geschwindigkeit w des ganzen Querschnittes, weil sie gestattet, aus der alleinigen Messung von $v_{0\,max}$ die ganze Wassermenge Q, wenn auch nur roh, zu bestimmen. Die einfachste, wenn auch sehr unverlässliche Formel ist

2) $$w = {}^3/_4\, v_{0\,max},$$

während Bazin aus seinen Versuchen abgeleitet hat

3) $$w = v_{0\,max} - 14\sqrt{r\alpha},$$

oder, weil nach Gl. 6, S. 292, $k\sqrt{r\alpha} = w$,

$$w = v_{0\,max} - 14\frac{w}{k}, \quad \text{d. h.}$$

4) $$w = \frac{v_{0\,max}}{1 + \frac{14}{k}} = v_{0\,max}\frac{k}{k + 14}.$$

Für Kanäle in Erde gilt für verschiedene Werthe von r:

r (Meter)	$\frac{w}{v_{0\,max}}$	r (Meter)	$\frac{w}{v_{0\,max}}$
0,1	0,537	1,2	0,749
0,2	0,613	1,3	0,753
0,3	0,653	1,4	0,756
0,4	0,678	1,6	0,762
0.5	0,695	1,8	0,766
0,6	0,709	2,0	0,770
0,7	0.719	2,5	0.777
0,8	0,727	3,0	0.782
0,9	0,734	4,0	0,788
1,0	0,740	5,0	0,792
1,1	0,745	6,0	0,795

Beispiel: In dem ersten Beispiel auf S. 297 war $r = 0{,}528$, k nach Bazin $= 32{,}57$, daher wird

$$w : v_{0\,max} = \frac{32{,}6}{32{,}6 + 14} = 0{,}7.$$

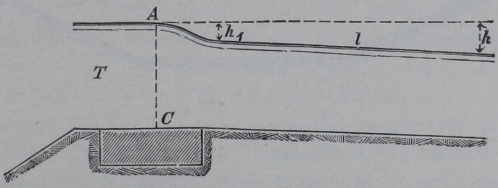
In dem zweiten Beispiele auf S. 297 mit $r = 5{,}297$ war nach Bazin $k = 53{,}8$, daher wird

$$w : v_{0\,max} = \frac{53{,}8}{53{,}8 + 14} \doteq 0{,}79\,.$$

d) Eintritt des Wassers in einen Kanal.

Soll aus einem Teiche T (Fig. 320) oder sonstigem Wasserbehälter durch einen Ufereinschnitt AC und einen anschliessenden Kanal eine sekundliche Wassermenge Q entnommen werden und ist auf eine Länge l ein Wasserspiegel-Gefälle h verfügbar, so darf

Fig. 320.



man nicht etwa voraussetzen, dass das Wasser im Kanal eine Tiefe AC annehmen werde. Vielmehr wird ein Theil h_1 des Gefälles beim Eintritte des Wassers in den Kanal dazu verbraucht, dem Wasser, das im Teiche fast in Ruhe war, die Kanalgeschwindigkeit w zu ertheilen; es ist $h_1 = \frac{w^2}{2g}$, und erst der Rest $h - h_1$ dient zur Überwindung der Reibung im Kanal und darf, wenn durch gleichmässiges Kanalprofil eine gleichförmige Bewegung erzielt wird, gleichmässig auf die Länge l vertheilt werden. Da w noch unbekannt, so kann man, wenn r die mittlere hydraulische Tiefe des Kanals ist, folgendermassen rechnen: Das ganze Gefälle h zerlegt sich in $h_1 = \frac{w^2}{2g}$ und den Theil $\alpha l = \beta \frac{w^2}{2g} \frac{l}{r}$ (s. S. 292, Gl. 4); es ist also

1) $$h = \frac{w^2}{2g} + \beta \frac{l}{r} \frac{w^2}{2g} = \frac{w^2}{2g}\left(1 + \beta \frac{l}{r}\right).$$

Da aber für gleichförmige Bewegung

$$\alpha r = \beta \frac{w^2}{2g} \quad \text{oder} \quad \frac{w^2}{2g} = \frac{\alpha r}{\beta},$$

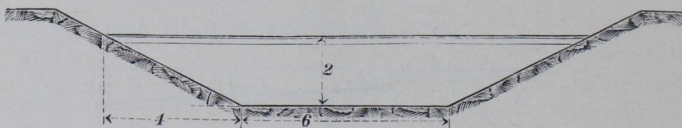
so ergiebt die Einsetzung dieses Werthes in Gl. 1:

$$h = \frac{\alpha r}{\beta}\left(1 + \beta \frac{l}{r}\right) = \alpha\left(\frac{r}{\beta} + l\right), \quad \text{d. h.}$$

2) $$\alpha = \frac{\beta h}{r + \beta l}.$$

Beispiel: Aus einem Behälter soll mittels eines Kanales von 6 m Bodenbreite, 2 m Tiefe und einem Böschungswinkel $\varphi = 26{,}5^0$ ($\text{tg}\,\varphi = 0{,}5$, $\sin\varphi$

Fig. 321.



$= 0{,}447$) (Fig. 321) Wasser entnommen werden. Auf $l = 5000$ m Länge steht ein Gefälle $h = 1$ m zur Verfügung.

Es ist $F = 2 \cdot (6 + 4) = 20$ qm, $u = 6 + 2 \cdot 2 : 0{,}447 = 14{,}95$ m, $r = 20 : 14{,}95 =$ rund $1{,}3$ m. Dann wird nach Bazin (vergl. S. 296)

$$\beta = 2g\left(0{,}000\,28 + \frac{0{,}000\,35}{1{,}3}\right) = 0{,}0108 \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{0{,}0108}{1{,}3 + 54} = \frac{1}{5120}.$$

Dann ist $\alpha \cdot 5000 = 0{,}977$ m das auf den Kanal zu vertheilende Gefälle, während $h_1 = 0{,}023$ m zur Erzeugung der Eintrittsgeschwindigkeit $w = 0{,}68$ m/s. dient. Der Kanal wird daher in der Sekunde $20 \cdot 0{,}67 = 13{,}6$ cbm Wasser liefern.

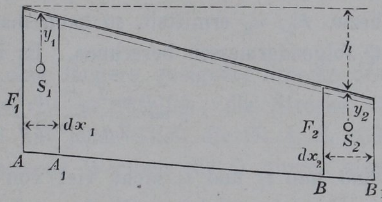
e) Ungleichförmige Bewegung des Wassers in Flüssen und Kanälen.

Das äussere Kennzeichen einer beständigen (im Beharrungszustande begriffenen) ungleichförmigen Bewegung ist, dass der Wasserquerschnitt F an derselben Stelle sich nicht ändert, an verschiedenen Stellen aber eine ungleiche Grösse zeigt. Bei regelmässiger Form des Wasserlaufes wird dann an verschiedenen Stellen eines Längenschnittes die Wassertiefe t verschieden gross, der Wasserspiegel also der Kanalsohle nicht parallel sein.

Es lässt sich zeigen, dass in diesem Falle das Gefälle der **Oberfläche** das für die Arbeit der Schwere massgebende, das **wirksame** Gefälle sei.

Wir betrachten die zwischen den Schnitten A und B (Fig. 322) befindliche Wassermenge, die nach einem Zeittheilchen die Lage $A_1 B_1$ einnimmt. Es möge die an diesem Wasserkörper während der Bewegung von AB nach $A_1 B_1$ verrichtete Arbeit der Schwere und des Wasserdrucks berechnet werden. Ist der obere Querschnitt F_1, der untere F_2 und nennt man $A A_1 = d x_1$, $B B_1 = d x_2$, so muss $F_1 d x_1 = F_2 d x_2$ sein. Die Arbeit der Schwere ist offenbar so anzusehen, als ob das Massentheilchen

Fig. 322.



$$m = \frac{\gamma}{g} F_1 d x_1 = \frac{\gamma}{g} F_2 d x_2$$

aus der oberen Lage mit dem Schwerpunkt S_1 in die untere mit dem Schwerpunkt S_2 gerückt sei; diese Arbeit ist dann

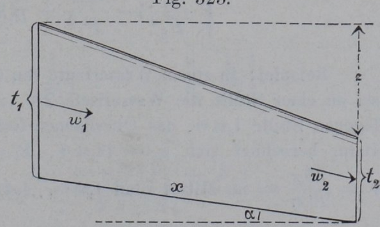
$$m g (h + y_2 - y_1).$$

Die Vertheilung des Druckes über einen Querschnitt erfolgt nahezu nach den Regeln für einen im Gleichgewichte befindlichen Wasserkörper, da der nach S. 260 zu beurtheilende vermindernde Einfluss der Beschleunigung gewöhnlich ausserordentlich unbedeutend ist. Dann treten am oberen und unteren Schnitte die Druckkräfte $\gamma F_1 y_1$ bezw. $\gamma F_2 y_2$ auf mit den Arbeiten $\gamma F_1 y_1 d x_1$ bezw. $-\gamma F_2 y_2 d x_2$, deren Arbeitssumme sich wegen $m g = \gamma F_1 d x_1 = \gamma F_2 d x_2$ auch schreiben lässt $m g (y_1 - y_2)$. Verbindet man dies mit obiger Arbeit der Schwerkraft, so entsteht als Ergebnis

$$m g h,$$

entsprechend einem wirksamen Gefälle h.

Fig. 323.



Bei ungleichförmiger Bewegung zerfällt nun das Gefälle in einen Theil, der zur Geschwindigkeits-Änderung dient, und einen zweiten zur Überwindung der Kanalwiderstände.

Hat man für eine nicht sehr lange Strecke x eines Wasserlaufes (Fig. 323) das Gefälle z der Oberfläche, die Neigung α des Bodens, die Wassertiefen t_1 und t_2, oben und unten gemessen, und die diesen Wassertiefen entsprechenden Querschnittswerthe F_1, u_1 bezw. F_2, u_2 ermittelt, so kann man die sekundliche Wassermenge Q folgendermassen berechnen. Es ist annähernd

$$z = \frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_1^2}{2g} + \beta x \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g}.$$

Sind nun t_1 und t_2 nicht viel von einander abweichend, so kann man in dem letzten Gliede, welches das zur Überwindung der Widerstände nöthige Gefälle bedeutet, für die eigentlich veränderlichen Werthe u, F und w die arithmetischen Mittel setzen, d. h.

$$u = 1/2\,(u_1 + u_2);\quad F = 1/2\,(F_1 + F_2);\quad w = 1/2\,(w_1 + w_2).$$

Bedenkt man schliesslich noch, dass

$$Q = F_1 w_1 = F_2 w_2, \quad \text{also } w_1 = \frac{Q}{F_1},\ w_2 = \frac{Q}{F_2}, \quad \text{so wird}$$

$$z = \frac{Q^2}{2gF_2^2} - \frac{Q^2}{2gF_1^2} + \beta x \frac{u_1 + u_2}{F_1 + F_2}\left(\frac{Q}{F_1} + \frac{Q}{F_2}\right)^2 \frac{1}{8g}$$

$$= \frac{Q^2}{2g}\left\{\frac{1}{F_2^2} - \frac{1}{F_1^2} + \beta x \frac{(u_1 + u_2)(F_1 + F_2)}{4 F_1^2 F_2^2}\right\}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$1)\qquad Q = \frac{\sqrt{2gz}}{\sqrt{\frac{1}{F_2^2} - \frac{1}{F_1^2} + \beta x \frac{(u_1 + u_2)(F_1 + F_2)}{4 F_1^2 F_2^2}}}.$$

Beispiel: In einem Wasserlaufe von dem Bettquerschnitte Fig. 321, S. 306, sei an einer Stelle die Wassertiefe 2 m, an einer um 200 m stromabwärts gelegenen Stelle 1,95 m; das Oberflächen-Gefälle betrage für diese Strecke 0,1 m. Dann berechnet sich $u_1 = 14{,}95$ m, $F_1 = 20$ qm; $u_2 = 14{,}72$, $F_2 = 19{,}3$ qm; $r = \frac{39{,}3}{29{,}67} =$ im Mittel rund 1,33 m, daher $\beta = 0{,}0106$;

$$Q = \frac{\sqrt{2g \cdot 0{,}1}}{\sqrt{\frac{1}{19{,}3^2} - \frac{1}{20^2} + 0{,}0106 \cdot 200 \cdot \frac{28{,}67 \cdot 39{,}3}{4 \cdot 20^2 \cdot 19{,}3^2}}} = 21{,}62 \text{ cbm}.$$

Hätte man nur den oberen Querschnitt F_1 berücksichtigt, die Bewegung als eine gleichmässige mit dem Gefällverhältnis $\alpha = 0{,}1 : 200 = 0{,}0005$ behandelt, so hätte sich nach S. 294

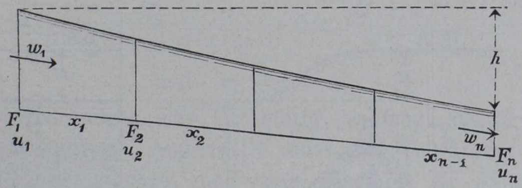
$$w = 42{,}9 \sqrt{1{,}33 \cdot 0{,}0005} = 1{,}109 \quad \text{und} \quad Q = 20 \cdot 1{,}109 = 22{,}18 \text{ cbm}$$

ergeben.

Steht für die Messungen eine längere geeignete Strecke des Wasserlaufes zur Verfügung, so ist es räthlich, die Strecke in mehrere Theile zu zerlegen und auf jeden Theil die Gl. 1, S. 308 anzuwenden. Aus den so erhaltenen Werthen für Q nimmt man dann das arithmetische Mittel.

Ist aber das Gefälle nicht für jeden einzelnen Theil, sondern nur für die ganze eingetheilte Strecke bekannt (Fig. 324), so kann

Fig. 324.



man auch nur eine einzige Gleichung aufstellen, in welche die Summe der nach obiger Weise berechneten Widerstandshöhen der einzelnen Theile eingeführt wird:

$$h = \frac{w_n^2}{2g} - \frac{w_1^2}{2g} + \Sigma \beta x \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g}$$

$$h = \frac{Q^2}{2g} \left\{ \frac{1}{F_n^2} - \frac{1}{F_1^2} + \Sigma \beta x \frac{u}{F} \frac{1}{F^2} \right\};$$

darin bedeutet

$$\Sigma \beta x \frac{u}{F} \frac{1}{F^2} = \beta_1 x_1 \frac{(u_1 + u_2)(F_1 + F_2)}{4 F_1^2 F_2^2}$$

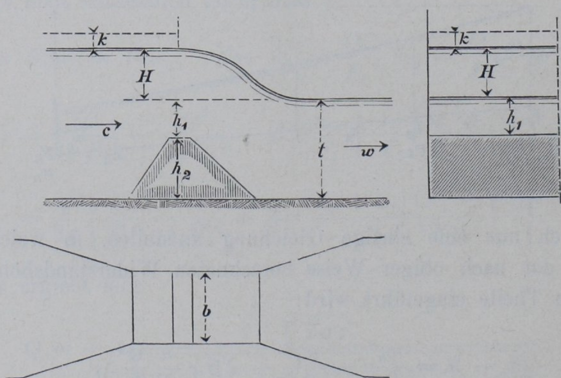
$$+ \beta_2 x_2 \frac{(u_2 + u_3)(F_2 + F_3)}{4 F_2^2 F_3^2} + \cdots$$

f) Stauhöhe von Wehren und Brückenpfeilern.

Der Zweck eines Wehres ist, die Wasseroberfläche oberhalb des Wehres zu heben (anzustauen). In den meisten Fällen wird dann ein Theil Q_2 des angestauten Wassers mittels eines Kanales abgeleitet, so dass von der ganzen sekundlichen Wassermenge Q des Flusses nur noch $Q_1 = Q - Q_2$ über das Wehr fliesst. Das Wehr ist ein durch die ganze Breite reichender, aus dem Boden des Flusses sich erhebender Einbau. Liegt die Wehrkrone tiefer als die Wasseroberfläche unterhalb des Wehres, so heisst dieses ein Grundwehr, im anderen Fall ein Überfallwehr.

α) **Grundwehr.** Am Wehre sei der Durchflussquerschnitt zu einem Rechtecke von der Breite b zusammengezogen (Fig. 325). Die Wehrkrone liege um h_1 unter dem Unterwasser, dessen Tiefe

Fig. 325.



dicht unter dem Wehre t betrage. h_2 sei die Höhe des Wehrkörpers, so dass $h_1 + h_2 = t$. Das Wasser sei durch den Einbau des Wehres um die Stauhöhe H gehoben. Die Geschwindigkeit des ungestauten Wassers sei w, die des gestauten Wassers oberhalb des Wehres betrage c. Den Einfluss dieser Zuflussgeschwindigkeit c auf die Durchflussmenge berücksichtigt man dadurch, dass man das Oberwasser um $k = \frac{c^2}{2g}$ gehoben denkt. Da die Wehrkrone beiderseitig unter Wasser liegt, so theilt man die

Höhe der Durchflussöffnung in zwei Theile, nämlich H und h_1. Für ersteren Theil betrachtet man den Durchfluss als einen Ausfluss ins Freie, für den anderen als einen Ausfluss unter Wasser. Dann ist die sekundl. Durchflussmenge für den oberen Theil nach Gl. 3, S. 236 und nach S. 240

1) $$Q_1' = \frac{2}{3} \mu_1 b \sqrt{2g} \left\{ (H + k)^{3/2} - k^{3/2} \right\},$$

für den unteren Theil

2) $$Q_1'' = \mu_2 b h_1 \sqrt{2g(H + k)},$$

weil die Höhe dieses Theiles h_1 beträgt, alle Punkte desselben aber unter der gemeinsamen Druckhöhe $H + k$ stehen. Für die gesammte Durchflussmenge $Q_1 = Q_1' + Q_1''$ gilt also:

3) $$Q_1 = \frac{2}{3} \mu_1 b \sqrt{2g} \left\{ (H + k)^{3/2} - k^{3/2} \right\} + \mu_2 b h_1 \sqrt{2g(H + k)}.$$

Gewöhnlich nimmt man $2/3 \mu_1 = 0{,}57$ und $\mu_2 = 0{,}62$; dann wird

4) $$h_1 = \frac{Q_1}{0{,}62 b \sqrt{2g(H + k)}} - 0{,}92 \frac{(H + k)^{3/2} - k^{3/2}}{\sqrt{H + k}}$$

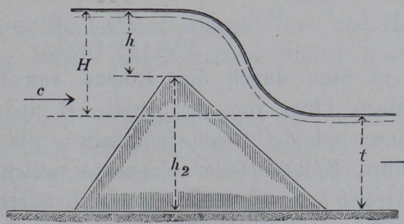
5) $$\text{und} \quad h_2 = t - h_1.$$

Diese Gleichungen sind nur gültig, so lange sie für h_1 einen Werth > 0 ergeben. Andernfalls muss die Wehrkrone sich über das Unterwasser erheben, und man bekommt ein Überfallwehr, für welches eine besondere Rechnung angestellt werden muss. Bei der vorläufigen Untersuchung darüber, ob das herzustellende Wehr ein Grundwehr sein muss oder nicht, pflegt man k zu vernachlässigen und hat dann

6) $$Q_1 \gtrless 0{,}57 b H \sqrt{2gH}$$

als Bedingung für ein Grundwehr bezw. Überfallwehr.

Fig. 326.



β) **Überfallwehr** (Fig. 326). Nennt man die Strahldicke über dem Wehre h, so muss, weil nun der Durchfluss ins Freie erfolgt,

$$Q_1 = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left\{ (h + k)^{3/2} - k^{3/2} \right\}, \quad \text{also}$$

7) $$h = \left\{ \frac{{}^3\!/_2 Q_1}{\mu b_1 \sqrt{2g}} + k^{3/2} \right\}^{2/3} - k$$

sein, wobei wieder ${}^2\!/_3 \mu = 0{,}57$. Hiernach bestimmt sich dann

8) $$h_2 = H + t - h.$$

Beispiel: Für einen Fluss sei $w = 1^{\text{m}/\text{s.}}$, $t = 2^{\text{m}}$, $F = 24^{\text{qm}}$, $Q = 24^{\text{cbm}}$. Mittels eines Wehres soll ein Aufstau um $H = 0{,}5^{\text{m}}$ herbeigeführt werden, das Wehr soll 10^{m} Breite erhalten, auch sollen oberhalb des Wehres 2^{cbm} abgeleitet werden, so dass nur noch $Q_1 = 22^{\text{cbm}}$ über das Wehr fliessen. Die Bedingung 6 wird:

$$22 > 0{,}57 \cdot 10 \cdot 0{,}5 \sqrt{2g \cdot 0{,}5} = 8{,}92,$$

d. h. es muss ein Grundwehr erbaut werden.

Für die Geschwindigkeit c oberhalb des Wehres gilt annähernd:

$$c = \frac{1 \cdot 2}{2{,}5} \cdot \frac{24}{22} = 0{,}9, \quad k = 0{,}04^{\text{m}}.$$

Dann wird nach Gl. 4:

$$h_1 = \frac{22}{0{,}62 \cdot 10 \sqrt{2g \cdot 0{,}54}} - 0{,}92 \frac{0{,}54^{3/2} - 0{,}04^{3/2}}{\sqrt{0{,}54}} = 0{,}6^{\text{m}}.$$

Der Wehrkörper muss also $h_2 = t - h_1 = 1{,}4^{\text{m}}$ Höhe erhalten.

Bei Vernachlässigung von k würde sich $h_1 = 0{,}67^{\text{m}}$ ergeben.

Soll unter sonst gleich bleibenden Verhältnissen eine Stauhöhe $H = 2^{\text{m}}$ erreicht werden, so wird Bedingung 6:

$$22 < 0{,}57 \cdot 10 \cdot 2 \sqrt{2g \cdot 2} = 71{,}4,$$

d. h. das Wehr wird ein Überfallwehr. Es ist

$$c = \frac{w \cdot 2}{2 + 2} \cdot \frac{24}{22} = 0{,}55, \quad k = 0{,}015^{\text{m}}.$$

Gleichung 7 liefert:

$$h = \left\{ \frac{22}{0{,}57 \cdot 10 \cdot 4{,}429} + 0{,}015^{3/2} \right\}^{2/3} - 0{,}015 = 0{,}9^{\text{m}}.$$

Die Höhe des Wehrkörpers wird dann $h_2 = 2 + 2 - 0{,}9 = 3{,}1^{\text{m}}$. Bei Vernachlässigung von k würde sich (erheblich einfacher)

$$h = \left(\frac{22}{0{,}57 \cdot 10 \cdot 4{,}429} \right)^{2/3} = 0{,}912^{\text{m}} \quad \text{ergeben.}$$

γ) **Stau durch den Einbau von Brückenpfeilern.** Werden in einen Fluss von der Breite B und der Tiefe t (Fig. 327), welcher mit der Geschwindigkeit w die sekundliche Wassermenge Q führt, Brückenpfeiler eingebaut, welche die Durchflussbreite auf die Grösse b einschränken, so wird dadurch ein Anstau H verursacht. Für diesen ist die für ein Grundwehr abgeleitete Gl. 3 (S. 311) zu benutzen, wenn man nur die Höhe des Wehrkörpers Null, d. h. $h_1 = t$ und zugleich $Q_1 = Q$ setzt. Es wird

9) $$Q = \frac{2}{3} \mu_1 b \sqrt{2g} \left\{ (H + k)^{3/2} - k^{3/2} \right\} + \mu_2 b t \sqrt{2g(H + k)}.$$

Hierin ist

$$k = \frac{c^2}{2g}; \quad c = \frac{Q}{B(H + t)}.$$

Ist die zulässige Stauhöhe H gegeben, so kann man aus obiger Gleichung leicht die erforderliche lichte Weite b berechnen, nämlich, wenn man wegen übereinstimmender Durchflussverhältnisse $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ setzt:

$$10) \qquad b = \frac{Q}{\mu\sqrt{2g}\left\{\frac{2}{3}(H + k)^{3/2} - \frac{2}{3}k^{3/2} + t\sqrt{H + k}\right\}}.$$

Die Auflösung der Gl. 9 nach H ist umständlich. Jedoch hat Prof. Dr. Mehmke (Stuttgart) in der Zeitschrift Civilingenieur 1889, S. 623, angegeben, dass, wenn man

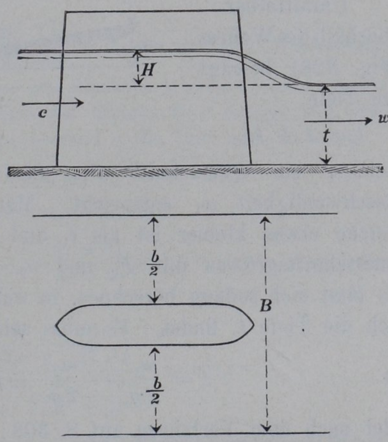
$$\frac{Q}{B\sqrt{2g}} = \alpha,$$

$$\frac{Q}{\mu b\sqrt{2g}} = \beta$$

setzt, die Annäherungsgleichung

$$11) \quad \frac{2}{3}H + t = \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{\sqrt{H}}$$

Fig. 327.



benutzt werden kann. Für Pfeiler mit spitzen Vor- und Hinterköpfen ist $\mu = 0{,}95$, für stumpf abgeschnittene Pfeiler $\mu = 0{,}85$ zu setzen.

Beispiel: Ein Fluss führe bei 2 m Wassertiefe und 50 m Breite 100 cbm in der Sekunde. Auf welches Maſs darf die Lichtweite eingeschränkt werden, wenn eine Stauhöhe $H = 0{,}02$ m zulässig ist?

Es ist dann die Geschwindigkeit oberhalb der Pfeiler

$$c = \frac{100}{50 \cdot 2{,}02} = 0{,}99\ \text{m}, \quad k = 0{,}05\ \text{m};$$

Gleichung 10 giebt:

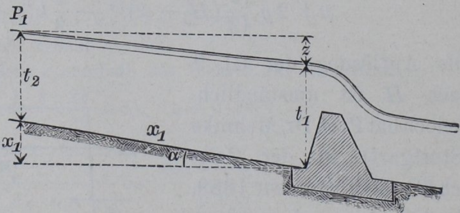
$$b = \frac{100}{0{,}95 \cdot 4{,}429\left\{\frac{2}{3}\,0{,}07^{3/2} - \frac{2}{3}\,0{,}05^{3/2} + 2\sqrt{0{,}07}\right\}} = 44{,}5\ \text{m}.$$

Berechnet man hiernach die Hülfsgrössen α und β, so liefert die linke Seite von Gl. 11: 2,013, die rechte Seite 2,015; der Unterschied ist also unbedeutend.

g) Staukurve und Stauweite.

Will man erfahren in welcher Weise der Stau oberhalb eines Wehres allmählich abnimmt, so benutzt man für die verzögerte Bewegung, welche oberhalb des Wehres stattfindet, einen ähnlichen Rechnungsgang wie auf S. 308.

Fig. 328.



Unmittelbar oberhalb des Wehres (Fig. 328) beträgt die Tiefe

$$t_1 = t + H,$$

welcher ein Querschnitt F_1, ein benetzter Umfang u_1, eine Geschwindigkeit w_1 entspricht Man wählt nun eine Tiefe t_2, welche etwas kleiner ist als t_1 und bezeichnet die entsprechenden Querschnittsgrössen mit F_2 und u_2, die Geschwindigkeit mit w_2. Es lässt sich sodann berechnen, in welchem Abstand x_1 vom Wehre sich die Tiefe t_2 findet. Es muss sein

1) $$z = \frac{w_1{}^2}{2g} - \frac{w_2{}^2}{2g} + \beta_1 x_1 \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g}$$

oder nach dem Verfahren auf S. 308:

2) $$z = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{F_1{}^2} - \frac{1}{F_2{}^2}\right) + \beta_1 x_1 \frac{(u_1 + u_2)(F_1 + F_2)}{4 F_1{}^2 F_2{}^2} \frac{Q^2}{2g}.$$

Ist aber α die Neigung der Sohle des Wasserlaufes, so muss auch

3) $$z = \alpha x_1 - (t_1 - t_2) \text{ sein.}$$

Vereinigt man diese Gleichung mit der vorstehenden und löst nach x_1 auf, so ergiebt sich:

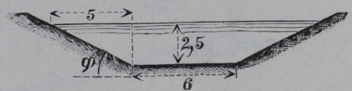
4) $$x_1 = \frac{t_1 - t_2 - \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{F_2{}^2} - \frac{1}{F_1{}^2}\right)}{\alpha - \beta_1 \frac{(u_1 + u_2)(F_1 + F_2) Q^2}{8 g F_1{}^2 F_2{}^2}}.$$

Hierdurch liegt der Punkt P_1 der Staukurve fest.

Man wählt nun eine wiederum etwas kleinere Wassertiefe t_3 und sucht den zugehörigen Abstand x_2 von der Stelle mit der Wassertiefe t_2, indem man aus Gl. 4 eine neue Gleichung bildet, deren Indices durchweg um eine Einheit grösser sind.

Beispiel: Das Bett eines Wasserlaufes habe 6 m Bodenbreite und einen trapezförmigen Querschnitt nach Fig. 321, S. 306, mit einem Böschungswinkel $\varphi = 26{,}5^0$ ($\mathrm{tg}\,\varphi = 0{,}5$, $\sin\varphi = 0{,}447$). Die Neigung der Sohle betrage $\alpha = 1 : 5000$. Bei der ursprünglich gleichmässigen Bewegung möge die Wassertiefe $t = 2$ m gewesen sein; dem entspricht $F = 20$ qm, $u = 14{,}95$ m, $r = 1{,}3$ m, $\beta = 0{,}0108$, $k = 42{,}7$,

Fig. 329.



daher eine Geschwindigket $w = 42{,}7\sqrt{\frac{1{,}3}{5000}} = 0{,}69$ m und eine Wassermenge $Q = 13{,}8$ cbm. Durch ein Wehr möge eine Stauhöhe $H = 0{,}5$ m hervorgebracht sein, so dass die Wassertiefe oberhalb des Wehres 2,5 m beträgt (Fig. 329). Es soll berechnet werden, in welchem Abstand x_1 die Tiefe noch 2,4 m ist.

Für $t_1 = 2{,}5$ m wird $F_1 = 27{,}5$ qm, $u_1 = 17{,}20$ m.

Für $t_2 = 2{,}4$ m wird $F_2 = 25{,}92$ qm, $u_2 = 16{,}75$ m.

Für diese Strecke ist dann $r_1 = \frac{F_1 + F_2}{u_1 + u_2} = 1{,}6$ m und $\beta = 0{,}0098$. Hiernach folgt aus Gl. 4:

$$x_1 = \frac{0{,}1 - \frac{13{,}8^2}{19{,}62}\left(\frac{1}{25{,}92^2} - \frac{1}{27{,}5^2}\right)}{0{,}0002 - \frac{0{,}0098 \cdot 33{,}95 \cdot 53{,}42 \cdot 13{,}8^2}{8 \cdot 9{,}81 \cdot 27{,}5^2 \cdot 25{,}92^2}} = 854{,}7 \text{ m}.$$

Setzt man sodann $t_3 = 2{,}3$ m, so wird $F_3 = 24{,}38$ qm, $u_3 = 16{,}29$ m, $r_2 = \frac{F_2 + F_3}{u_2 + u_3} = 1{,}5$ und $\beta_2 = 0{,}0101$.

Gleichung 4 ergiebt nunmehr

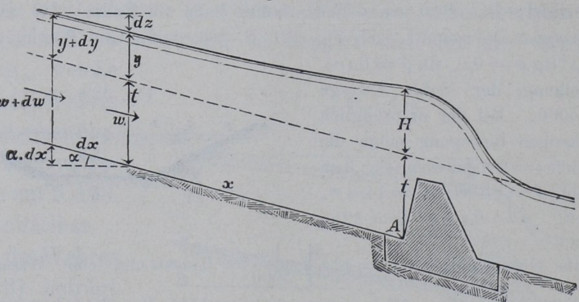
$$x_2 = \frac{0{,}1 - \frac{13{,}8^2}{19{,}62}\left(\frac{1}{24{,}38^2} - \frac{1}{25{,}92^2}\right)}{0{,}0002 - \frac{0{,}0101 \cdot 33{,}04 \cdot 50{,}3 \cdot 13{,}8^2}{8 \cdot 9{,}81 \cdot 24{,}38^2 \cdot 25{,}92^2}} = 1001 \text{ m}.$$

In gleicher Weise kann man weitere Punkte der Staukurve bestimmen.

Gleichung der Staukurve für einen Kanal von grosser Breite und geringer Wassertiefe. Denkt man sich den Querschnitt annäherungsweise als Rechteck von grosser Breite, so lässt sich die

Gleichung der Staukurve entwickeln. Es sei t die Tiefe des ungestauten Wassers, also annähernd $t = F : u$ (vergl. S. 292), H die Stauhöhe am Wehre bei A (Fig. 330), y die Stauhöhe, w die

Fig. 330.



mittlere Geschwindigkeit im Abstand x vom Wehre; im weiteren Abstande dx sei die Stauhöhe $y + dy$ (wo dy negativ), die Geschwindigkeit $w + dw$. Kommt auf die Strecke dx ein Höhenunterschied dz des Wasserspiegels, ein Gefälle $\alpha \cdot dx$ des Bodens, so ist

$$dz = \frac{w^2}{2g} - \frac{(w + dw)^2}{2g} + \beta \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g} dx$$

$$= - \frac{w\,dw}{g} + \beta \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g} dx,$$

$$\text{weil} \quad (w + dw)^2 - w^2 = d(w^2).$$

Ferner ist nach Fig. 330

$$dz = dy + \alpha \cdot dx, \quad \text{also}$$

$$dy + dx\left(\alpha - \beta \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g}\right) = - \frac{w\,dw}{g} \quad \text{oder}$$

$$1) \qquad dx = - \frac{dy + \dfrac{w\,dw}{g}}{\alpha - \beta \dfrac{u}{F} \dfrac{w^2}{2g}}.$$

Aus dieser Gleichung kann dw entfernt werden; es ist bei kleinem α

$$w = \frac{Q}{b(t + y)}; \quad dw = - \frac{Q\,dy}{b(t + y)^2}$$

und durch Multiplikation

$$w\,dw = -\frac{Q^2\,dy}{b^2(t+y)^3}, \quad \text{also, weil}$$

$$\frac{Q^2}{b^2(t+y)^2} = w^2,$$

$$w\,dw = -\frac{w^2}{t+y}\,dy.$$

Setzt man dies in Gl. 1 ein, so entsteht

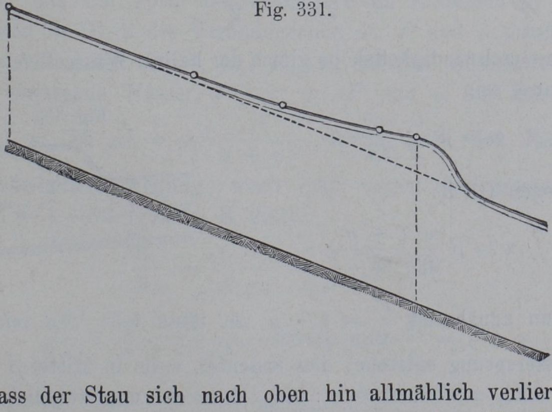
2) $$dx = -\frac{1 - \dfrac{w^2}{g(t+y)}}{\alpha - \beta\dfrac{u}{F}\dfrac{w^2}{2g}}\,dy.$$

Mit wachsendem x nimmt die Wassertiefe $t+y$ allmählich ab, die Geschwindigkeit w daher allmählich zu; somit verkleinern sich auf der rechten Seite der Gl. 2 mit zunehmendem x sowohl der Zähler wie der Nenner. Wird der Nenner zu Null, während der Zähler noch grösser ist als Null, so geschieht dies für

$$\alpha = \beta\frac{u}{F}\frac{w^2}{2g},$$

d. h. für diejenige Stelle, wo die Bewegung eine gleichförmige ist; es ist dort $\dfrac{dy}{dx} = 0$, d. h. die Staukurve hat sich dem ungestauten Wasser wieder angeschmiegt. Es bedeutet dies den gewöhnlichen

Fig. 331.



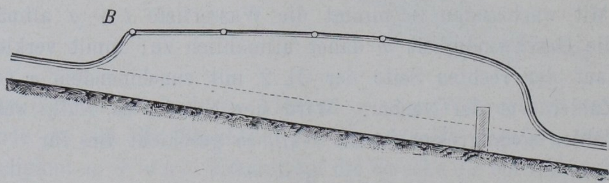
Fall, dass der Stau sich nach oben hin allmählich verliert, wobei die Staukurve ihre konvexe Seite nach unten kehrt (Fig. 331).

Wird aber für irgend eine Stelle der Zähler der Gl. 2 zu Null, während der Nenner noch > 0 ist, wird

$$\frac{dx}{dy} = -0 \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = -\infty,$$

so steht der Wasserspiegel an dieser Stelle (nahezu) lothrecht, es bildet sich ein Wassersprung oder eine Wasserschwelle. Dieser Fall ist zuerst von dem Italiener Bidone 1820, später aber auch von Jul. Weisbach (Freiberg in Sachsen) in Kanälen mit

Fig. 332.



grossem Gefällverhältnisse beobachtet. Es verschwindet dann der Stau nicht allmählich, sondern bei B (Fig. 332) plötzlich. Damit dies eintrete, muss an der betreffenden Stelle der Zähler in Gl. 2 Null sein, d. h.

3) $$\frac{w^2}{2g} = \frac{t+y}{2}$$

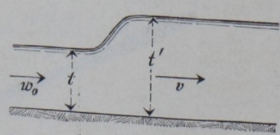
oder die Geschwindigkeitshöhe gleich der halben Wassertiefe. Gleichzeitig muss sein

$$\alpha > \beta \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g},$$

d. h. wegen Gl. 3:

$$\alpha > \beta \frac{u}{F} \frac{t+y}{2}.$$

Fig. 333.



Weil nun annähernd $\frac{F}{u} = t + y$, so muss $\alpha > {}^1/_2 \beta$ sein, damit ein Wassersprung entstehe; dies bedeutet, wenn in Mittel $\beta = 0{,}008$ gesetzt wird, $\alpha > 0{,}004 = 1 : 250$, d. h. ein ungewöhnlich grosses Gefällverhältnis.

Die Höhe $t' - t$ des Sprunges lässt sich nach Fig. 333 in folgender Weise berechnen: Es ist

4) $$v t' = w_0 t, \quad \text{ferner}$$

5) $$t - t' = \frac{v^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} + \frac{(w_0 - v)^2}{2g},$$

worin das letzte Glied den sog. Stossverlust bezeichnet (S. 246). Sonach wird aus beiden Gleichungen

6) $$t' = w_0 \sqrt{\frac{t}{g}} = t \sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}.$$

Nach Bidone's Versuchen ist die Höhe des Sprunges in Wirklichkeit grösser, als diese Formel 6 ergiebt. Nehmen wir daher den Sprung weniger plötzlich an und vernachlässigen deshalb den Stossverlust in Gl. 5, so entsteht aus $v t' = w_0 t$ und

$$t - t' = \frac{v^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} \quad \text{leicht}$$

7) $$t' = \frac{1}{2}\frac{w_0^2}{2g} + \sqrt{\frac{w_0^2}{2g} t + \frac{1}{4}\left(\frac{w_0^2}{2g}\right)^2}.$$

Aus der Entwickelung der beiden Gleichungen 6 und 7 folgt weiter, dass ein Wassersprung mit $t' > t$ nur dann entsteht, wenn $\frac{w_0^2}{2g} > \frac{t}{2}$; es stimmt dies seiner Bedeutung nach mit Gl. 3 überein.

Um nun die Form der Staukurve im Einzelnen zu erfahren, muss man in Gl 2 die Veränderlichen w, F und u durch y ausdrücken. Beziehen sich t, w_0, F_0, u_0 auf das ungestaute, gleichmässig fliessende Wasser, $t + y$, w, F und u auf das gestaute Wasser, so ist $w^2 = w_0^2 \frac{t^2}{(t+y)^2}$, ferner nach den Regeln der gleichmässigen Bewegung, wenn man wegen der grossen Breite $u = u_0 = b$ setzt (gemäss S. 292),

$$\frac{w_0^2}{2g} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{F_0}{u_0} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{bt}{b} \quad \text{und}$$

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{t^3}{(t+y)^2}, \quad \text{sonach mit } \frac{F}{u} = t + y$$

$$\beta \frac{u}{F}\frac{w^2}{2g} = \alpha \frac{t^3}{(t+y)^3}.$$

Hiermit wird aus Gl. 2, S. 317

$$d x = - d y \frac{1 - 2 \frac{\alpha}{\beta} \frac{t^3}{(t + y)^3}}{\alpha \left(1 - \frac{t^3}{(t + y)^3}\right)} \quad \text{oder}$$

$$- \alpha d x = d y \frac{(t + y)^3 - 2 \frac{\alpha}{\beta} t^3}{(t + y)^3 - t^3}.$$

Behufs der Integration ist auf der rechten Seite eine Zerlegung in Theilbrüche erforderlich, jedoch muss, weil der Zähler nach y von demselben Grade ist wie der Nenner, durch theilweise Division erreicht werden, dass der Zähler von geringerem Grade wird. Fügt man im Zähler $+ t^3 - t^3$ hinzu, so entsteht nach einmaliger Division:

$$- \alpha d x = d y \left\{ 1 + \frac{t^3 \left(1 - \frac{2 \alpha}{\beta}\right)}{(t + y)^3 - t^3} \right\} \quad \text{oder}$$

8) $$- \alpha d x = d y + \left(1 - \frac{2 \alpha}{\beta}\right) \frac{t^3}{(t + y)^3 - t^3} d y.$$

Weil $(t + y)^3 - t^3 = 3 t^2 y + 3 t y^2 + y^3 = y (3 t^2 + 3 t y + y^2)$ ist, so kann der letzte Bruch geschrieben werden

$$\frac{t^3}{(t + y)^3 - t^3} = \frac{t^3}{y (3 t^2 + 3 t y + y^2)}.$$

Die Zerlegung dieser gebrochenen Funktion in Theilbrüche muss, weil die Gleichung $3 t^2 + 3 t y + y^2 = 0$ imaginäre Wurzeln hat, in der Form geschehen:

$$\frac{t^3}{y (3 t^2 + 3 t y + y^2)} = \frac{A}{y} + \frac{P y + Q}{3 t^2 + 3 t y + y^2}.$$

Nach Fortschaffung der Nenner wird hieraus

9) $$t^3 = 3 t^2 A + 3 t A y + A y^2 + P y^2 + Q y.$$

Soll diese Gleichung für jeden Werth von y bestehen, so muss zunächst stattfinden für $y = 0$: $t^3 = 3 t^2 A$, d. h. $A = {}^1/_3 t$. Ebenso ergiebt die erste Abgeleitete der Gl. 9 nach y: $0 = 3 t A + 2 A y + 2 P y + Q$ und für $y = 0$: $Q = - 3 t A = - t^2$. Die zweite Abgeleitete $0 = 2 A + 2 P$ giebt schliesslich $P = - A = - {}^1/_3 t$. Hiernach wird

$$\frac{t^3}{y (3 t^2 + 3 t y + y^2)} = \frac{t}{3} \frac{1}{y} - \frac{{}^1/_3 t y + t^2}{3 t^2 + 3 t y + y^2}.$$

Nun kann man Gl. 8 schreiben:

$$- \alpha d x = d y + \left(1 - \frac{2 \alpha}{\beta}\right) t \left\{ \frac{1}{3} \frac{d y}{y} - \frac{1}{6} \frac{2 y + 6 t}{3 t^2 + 3 t y + y^2} d y \right\}.$$

Das Differential des letzten Nenners ist aber $(3t + 2y)\,dy$, daher zerlegen wir den letzten Zähler in $2y + 3t$ und $3t$, um zu erhalten:

$$\begin{aligned} -\alpha\,dx = dy + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right) t \Bigl\{ \frac{1}{3}\frac{dy}{y} - \frac{1}{6}\frac{d(3t^2+3ty+y^2)}{3t^2+3ty+y^2}\,dy \\ - \frac{t}{2}\frac{dy}{3t^2+3ty+y^2} \Bigr\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Setzt man zur Integration des letzten Gliedes vorübergehend $y = z + a$, so wird $3t^2 + 3ty + y^2 = 3t^2 + 3tz + 3ta + z^2 + 2az + a^2$; sollen nun die Glieder mit dem Faktor z verschwinden, so muss $3t + 2a = 0$, d. h. $a = -{}^3/_2 t$; $z = y + {}^3/_2 t$ sein. Dann wird $3t^2 + 3ty + y^2 = 3t^2 - {}^9/_2 t^2 + {}^9/_4 t^2 + z^2 = {}^3/_4 t^2 + z^2$ und

$$\begin{aligned} \frac{dy}{3t^2+3ty^2+y^2} &= \frac{dz}{{}^3/_4 t^2 + z^2} = \frac{2}{t\sqrt{3}}\,d\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{2z}{t\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{2}{t\sqrt{3}}\,d\left(\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2y}{t\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right)\right) \quad \text{mit} \quad z = y + \frac{3}{2}t. \end{aligned} \tag{11}$$

Die Integration der Gl. 10 ergiebt dann mit Benutzung von Gl. 11:

$$\begin{aligned} \alpha x = -y + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right) t \Bigl\{ -\frac{1}{3}\,\mathfrak{l}\,y + \frac{1}{6}\,\mathfrak{l}\left(3t^2 + 3ty + y^2\right) \\ + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{y}{t} + \sqrt{3}\right) \Bigr\} + \text{Const.} \end{aligned}$$

Vereinigt man in dem Klammerausdrucke die beiden Logarithmen, indem man

$$-\frac{1}{3}\,\mathfrak{l}\,y = -\frac{1}{6}\,\mathfrak{l}\,y^2 = +\frac{1}{6}\,\mathfrak{l}\,\frac{1}{y^2}$$

setzt und führt zur Abkürzung die Bezeichnung

$$\frac{1}{6}\,\mathfrak{l}\left(3\frac{t^2}{y^2} + 3\frac{t}{y} + 1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{y}{t} + \sqrt{3}\right) = f\left(\frac{y}{t}\right) \tag{12}$$

ein (s. die Tabelle S. 323), so wird

$$\alpha x = -y + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right) t \cdot f\left(\frac{y}{t}\right) + \text{Const.}$$

Weil nun der Abstand x vom Wehr aus gemessen ist, wo $y = H$, so wird

$$0 = -H + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right) t \cdot f\left(\frac{H}{t}\right) + \text{Const.}$$

sonach schliesslich durch Abziehen

$$\alpha x = H - y + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right) t \left\{ f\left(\frac{y}{t}\right) - f\left(\frac{H}{t}\right) \right\}. \tag{13}$$

Kommt oberhalb des Wehres kein Wassersprung vor, ist also $\alpha < {}^1/_2 \beta$ und daher in Gl. 13 der Faktor $1 - \dfrac{2\alpha}{\beta} > 0$, so ergiebt sich, weil für $\dfrac{y}{t} = 0$ die $f\left(\dfrac{y}{t}\right) = \infty$ wird (nach Gl. 12), für $y = 0$ die

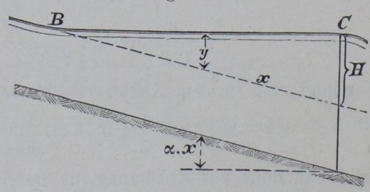
Strecke $x = \infty$; d. h. in diesem meist vorkommenden Falle erstreckt sich die Wirkung des Staues nach oben hin ins Unendliche: die Staukurve schmiegt sich nach oben hin dem ungestauten Wasserspiegel asymptotisch an. In diesem Falle hat Gl. 13 unbeschränkte Gültigkeit für die Staukurve oberhalb des Wehres, d. h. für $y \leqq H$ (der Stauhöhe am Wehre).

Kommt aber wegen $\alpha > {}^1\!/_2\,\beta$ ein Wassersprung vor, steigt also an einer Stelle das Wasser plötzlich von der Tiefe t auf die grössere Tiefe t' an, welche nach Gl. 7 (S. 319) zu berechnen ist, so gilt Gl. 13 nur von dem Wehr aufwärts bis zum Wassersprunge, dessen Lage man mittels Gl. 13 berechnen kann, indem man $y = t' - t$ setzt.

In dem Grenzfalle $\alpha = {}^1\!/_2\,\beta$ zwischen den beiden vorstehend genannten verschiedenen Fällen wird in Gl. 13 der Faktor $1 - \dfrac{2\,\alpha}{\beta} = 0$, daher einfach

14) $\alpha x = H - y$;

Fig. 334.



die Staulinie wird eine wagerechte Gerade BC (Fig. 334), geht in den ungestauten Wasserspiegel nicht durch allmähliche Anschmiegung, sondern mittels eines (ein wenig ausgerundeten) Knickes bei B über.

Die Grössen $f\left(\dfrac{y}{t}\right)$ können aus der Tabelle S. 323 entnommen werden. Die Berechnung der Tabellenwerthe möge an einem Beispiel, etwa für $\dfrac{y}{t} = \dfrac{1}{4}$ gezeigt werden.

Hierfür ist (Gl. 12)

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}\,\mathrm{l}\,(3 \cdot 16 + 3 \cdot 4 + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{4} + \sqrt{3}\right)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 2{,}302\,585 \cdot \log 61 + 0{,}577\,35\ \mathrm{arc\,tg}\ 2{,}0207\,.$$

Der Tangente $2{,}0207$ entspricht ein Winkel von $63^0\,40'$, ein Bogen $= 1{,}111\,193$. Daher wird, weil $\log 61 = 1{,}785\,330$:

$$f({}^1\!/_4) = 0{,}685\,145\,7 + 0{,}577\,35 \cdot 1{,}111\,193 = 1{,}3267\,.$$

Tabelle zur Berechnung von Staukurven.

$\frac{y}{t}$	$f\left(\frac{y}{t}\right)$	$\frac{y}{t}$	$f\left(\frac{y}{t}\right)$
0	∞	$^1/_5$	1,3866
0,01	2,3261	$^1/_4$	1,3267
0,02	2,0983	$^1/_3$	1,2539
0,03	1,9664	$^1/_2$	1,1616
0,04	1,8738	$^2/_3$	1,1050
0,05	1,8026	1	1,0387
0,06	1,7451	1,5	0,9890
0,07	1,6970	2	0,9632
0,08	1,6556	2,5	0,9482
0,09	1,6196	3	0,9384
0,10	1,5875	3,5	0,9317
0,13	1,5092	4	0,9270
$^1/_6$	1,4538		

Beispiel 1: Die Breite eines nahezu rechtwinkligen Wasserlaufes sei $b = 100^{\text{m}}$, die Tiefe des ungestauten Wassers $t = 2^{\text{m}}$, die Stauhöhe am Wehre $H = 0{,}5^{\text{m}}$, das Gefällverhältnis $\alpha = 0{,}0002$. Die mittlere Tiefe oberhalb des Wehres beträgt $(2 + 2{,}5) \cdot 0{,}5 = 2{,}25^{\text{m}}$, daher ist im Mittel $r = 225 : 104{,}5 = 2{,}15^{\text{m}}$; das giebt rund $\beta = 0{,}009$ (vergl. S. 296).

Es ist $\frac{H}{t} = \frac{1}{4}$, $f\left(\frac{H}{t}\right) = 1{,}3267$.

Ferner wird $1 - \frac{2\,\alpha}{\beta} = 1 - \frac{0{,}0004}{0{,}009} = 0{,}9556$.

Setzt man nun $y_1 = 0{,}4^{\text{m}} = 0{,}2\,t = {}^1/_5\,t$, so ergiebt sich nach vorstehender Tabelle $f(0{,}2) = 1{,}3866$, mithin nach Gl. 13:

$$x_1 = 5000\left\{0{,}5 - 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}9556\,(1{,}3866 - 1{,}3267)\right\} = 1072^{\text{m}}.$$

Da die Tabelle zwischen $\frac{y}{t} = 0$ und $\frac{y}{t} = 0{,}25$ 13 Werthe enthält, so kann man aus ihr 13 Punkte, also ausser dem soeben berechneten (x_1, y_1) noch 12, leicht ableiten.

Geringe Stauhöhen, die nicht grösser sind als die Wellenbewegungen des Wassers, pflegt man unbeachtet zu lassen. Die Wellenbewegungen wachsen mit der Tiefe; demgemäss pflegt man eine Stauhöhe von $y_0 = 0{,}01\,t$ zu vernachlässigen, so dass sich dann statt der ideellen Stauweite $= \infty$ eine endliche, dem Werthe $y_0 = 0{,}01\, t$ entsprechende, begrenzte Stauweite x_0 ergiebt. Für diese gilt mit $y_0 = 0{,}02$ m:

$$x_0 = 5000 \left\{ 0{,}5 - 0{,}02 + 1{,}9111\,(2{,}3261 - 1{,}3267) \right\} = 11950 \text{ m}.$$

Zwischen $y_1 = 0{,}4$ und $y_0 = 0{,}02$ m sollen hier nur noch $y_2 = 0{,}2$ m und $y_3 = 0{,}1$ m berücksichtigt werden. Dann ist

$$x_2 = 5000 \left\{ 0{,}5 - 0{,}2 + 1{,}9111\,(1{,}5875 - 1{,}3267) \right\} = 3992 \text{ m}.$$

$$x_3 = 5000 \left\{ 0{,}5 - 0{,}1 + 1{,}9111\,(1{,}8026 - 1{,}3267) \right\} = 6547 \text{ m}.$$

Diese Staukurve ist in Fig. 331, S. 317 gezeichnet; die Längen sind in 1 : 200 000, die Höhen in 1 : 100 dargestellt.

Beispiel 2: Ein gemauerter rechteckiger Kanal von $b = 0{,}325$ m Breite habe eine Bodenneigung $\alpha = 0{,}023$. Es bewege sich darin Wasser gleichförmig mit einer Wassertiefe $t = 0{,}064$ m und einer sekundlichen Wassermenge $Q = 0{,}0351$ cbm; dann ist mit $F = 0{,}325 \cdot 0{,}064 = 0{,}0208$ qm

$$w_0 = 0{,}0351 : 0{,}0208 = 1{,}688 \text{ m} \quad \text{und}$$

$$\frac{w_0^2}{2g} = 0{,}145 \text{ m},$$

d. h. bedeutend grösser als die halbe Wassertiefe; mithin ist als Folge einer weiter unten bewirkten Aufstauung ein Sprung zu erwarten. Für dessen Höhe liefert Gl. 6, S. 319:

$$t' = 1{,}688 \sqrt{\frac{0{,}064}{9{,}81}} = 0{,}136 \text{ m},$$

Gl. 7, S. 319 aber

$$t' = 0{,}073 + \sqrt{0{,}145 \cdot 0{,}064 + 0{,}073^2} = 0{,}194 \text{ m}.$$

In Wirklichkeit war nach der Messung Bidone's, der an diesem Kanale Versuche anstellte, $t' = 0{,}189$, was mit dem letzteren Werthe gut übereinstimmt. Es werde für die weitere Rechnung $t' = 0{,}19$, also die Stauhöhe dort zu $y_0 = 0{,}19 - 0{,}064 = 0{,}126$ m genommen.

Die grösste Stauhöhe wurde zu $H = 0{,}216$ m gemessen. Dann kann man die Entfernung x_0 des Sprunges von dem Orte der grössten Stauhöhe nach Gl. 13, S. 321 berechnen. Es ist

$$\frac{2\alpha}{\beta} = \frac{w_0^2}{gt} = \frac{0{,}145 \cdot 2}{0{,}064} = 4{,}5,$$

$$\frac{H}{t} = \frac{0{,}216}{0{,}064} = 3{,}375; \quad \frac{y_0}{t} = \frac{0{,}126}{0{,}064} = \text{rund } 2.$$

$f\left(\frac{H}{t}\right) = f(3{,}375)$ wird durch Interpolation in der Tabelle S. 323 erhalten zu $0{,}9334$, mithin

$$0{,}023\, x_0 = 0{,}216 - 0{,}126 - 3{,}5 \cdot 0{,}064\,(0{,}9632 - 0{,}9334)$$

und $x_0 = 3{,}6$ m, während Bidone's Messung etwa $x_0 = 3{,}5$ m ergab.

Für $\frac{y_1}{t} = 3$ oder $y_1 = 0{,}192$ wird

$$0{,}023 \cdot x_1 = 0{,}216 - 0{,}192 - 0{,}224\,(0{,}9384 - 0{,}9334)$$

mit $x_1 = 1^{\mathrm{m}}$.

Für $\frac{y_2}{t} = 2{,}5$ oder $y_2 = 0{,}16^{\mathrm{m}}$ wird

$$0{,}023\, x_2 = 0{,}216 - 0{,}16 - 0{,}224\,(0{,}9482 - 0{,}9334)$$

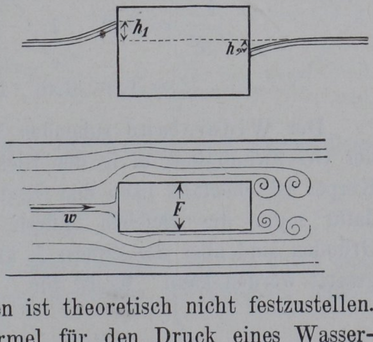
mit $x_2 = 2{,}3^{\mathrm{m}}$.

Dieser Wassersprung ist in Fig. 332, S. 318 gezeichnet; die Längen sind in 1 : 100, die Höhen in 1 : 20 dargestellt.

4. Druck strömenden Wassers gegen feste Körper; Widerstand des Wassers gegen bewegte Körper.

Bei scheinbarer (relativer) Ruhe des Wassers gegen einen in denselben eingetauchten festen Körper heben sich die wagerechten Seitenkräfte des Wasserdrucks gegen den Körper auf. Strömt aber das Wasser mit einer Geschwindigkeit w gegen den ruhenden Körper, so werden die einzelnen, ohne Anwesenheit des Körpers parallel verlaufenden Stromfäden gezwungen, den Körper zu umfliessen, sich in gekrümmten Bahnen zu bewegen, wozu Kräfte erforderlich sind; das Wasser staut sich an der Vorderseite auf, während an der Rückseite eine Vertiefung entsteht (Fig. 335). Es erfolgt daher auf der Vorderseite eine Vergrösserung, auf der Rückseite eine Verminderung des Druckes gegenüber dem Ruhezustande um P_1 bezw. P_2. Die Gesammtwirkung der Strömung besteht daher in einer Kraft D im Sinne der Geschwindigkeit w, und zwar ist

Fig. 335.



1) $\quad D = P_1 + P_2.$

Der Verlauf der Stromfäden ist theoretisch nicht festzustellen. In Anlehnung aber an die Formel für den Druck eines Wasserstrahls gegen einen fremden Körper (S. 269) darf man mit einiger Wahrscheinlichkeit setzen:

2) $$P_1 = \zeta_1 \gamma F \frac{w^2}{2g}; \quad P_2 = \zeta_2 \gamma F \frac{w^2}{2g},$$