gegebenen Massenkräften im Ruhezustand entsprechen würden. Durch deren Einführung vereinfacht sich Gl. 8 zu

$$\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} = \frac{p - p_0}{\gamma} - \frac{\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_0}{\gamma}.$$

Bezieht sich die Geschwindigkeit w_0 auf einen freien Wasserspiegel, so ist dort der hydraulische Druck $\mathfrak{p}_0$ gleich dem hydrostatischen Drucke p_0, mithin

$$\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} = \frac{p - \mathfrak{p}}{\gamma} \quad \text{oder}$$

9) $$\frac{\mathfrak{p}}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} - \left(\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g}\right).$$

Wir haben hiermit das Gesetz der hydraulischen Druckhöhe (s. S. 260) auf anderem Wege erhalten.

Ist noch die Schwere die einzige wirkende Wasserkraft und richtet man die positive y-Achse lothrecht abwärts, so ist

$$p = p_0 + \gamma y \quad \text{also}$$

$$\frac{\mathfrak{p}}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + y - \left(\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g}\right).$$

Hat man also ein Gefäss, aus dem das Wasser durch eine um h unter dem Wasserspiegel liegende Öffnung mit der Geschwindigkeit w ausströmt und herrscht an der Mündung ein Gegendruck p_m, so ist auch der hydraulische Druck $\mathfrak{p}$ dort $= p_m$, und man erhält für $y = h$:

$$\frac{p_m}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + h - \left(\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g}\right)$$

oder die bekannte Gleichung (S. 259)

$$\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} = h + \frac{p_0 - p_m}{\gamma}.$$

An die Stelle der Kontinuitätsgleichung (Gl. 5, S. 274) tritt hier

$$F_0 w_0 = F w.$$

2. Bewegung des Wassers in Röhren.

a) Leitungswiderstand gerader cylindrischer Röhren.

Beim Durchfliessen einer längeren Röhre vom Querschnitt F und der Länge l zeigt sich ein besonderer Widerstand, ein besonderer Druckhöhenverlust oder eine Widerstandshöhe z. Dieser von der Reibung herrührende Widerstand folgt wesentlich anderen Gesetzen als der Reibungswiderstand **fester** Körper (Theil 1, S. 189). Er ist nämlich ganz unabhängig von dem Drucke des Wassers, nahezu verhältnisgleich mit der Berührungsfläche und mit dem Quadrate der Geschwindigkeit w, also auch mit der Geschwindigkeitshöhe $\frac{w^2}{2g}$. Ist u der innere Umfang des Röhrenquerschnittes, so berühren sich in einer Röhre von der Länge l das Wasser und die Wandung in einer Fläche $u \cdot l$. Die Summe W der Reibungswiderstände längs der Röhre lässt sich daher schreiben

1) $$W = \varkappa u l \frac{w^2}{2g}.$$

Um die entsprechende Widerstandshöhe z zu finden, berechnen wir (nach S. 245/6) die während eines Zeittheilchens dt verrichtete Widerstandsarbeit $d\mathfrak{A}$ und setzen diese $= mgz$, wenn m wieder diejenige Wassermasse bedeutet, welche während der Zeit dt jeden Querschnitt durchströmt. Bei einer Geschwindigkeit w ist $w \cdot dt$ der Gleitweg des Wassers in der Röhre während der Zeit dt, mithin $d\mathfrak{A} = W \cdot w \cdot dt$. Ferner ist $mg = \gamma \cdot F \cdot w \cdot dt$ und

$$z = \frac{d\mathfrak{A}}{mg} = \varkappa \cdot u \cdot l \frac{w^2}{2g} \frac{w\,dt}{\gamma \cdot F \cdot w \cdot dt}$$

2) $$z = \frac{\varkappa}{\gamma} \frac{ul}{F} \frac{w^2}{2g}.$$

Setzt man $\varkappa = \gamma \beta$, so wird

3) $$z = \beta \frac{ul}{F} \frac{w^2}{2g}$$

mit β als Widerstandsziffer für Wasser in Röhren beliebiger Querschnittsform. Für cylindrische Röhren vom inneren Durchmesser d ist im Besonderen $u = d\pi$, $F = \frac{1}{4} d^2 \pi$, mithin

$$\frac{u}{F} = \frac{4}{d} \quad \text{und} \quad z = \beta 4 \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g}$$

oder, wenn man für diesen besonders häufigen Fall

4) $$4\beta = \lambda$$

setzt und λ als **Widerstandsziffer cylindrischer Wasserleitungsröhren** bezeichnet,

5) $$z = \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g}.$$

Als erste Annäherung ist nach Dupuit

6) $$\lambda = 0{,}03 \quad \text{zu setzen.}$$

Eingehendere Versuche haben aber gezeigt, dass λ nicht nur mit dem Grade der Rauhigkeit der inneren Röhrenfläche sich ändert, sondern auch noch in gewisser Weise von der Röhrenweite d und der Geschwindigkeit w abhängt, dass also die vorläufig angegebene Proportionalität des Widerstandes mit der Fläche $u \cdot l$ und dem Quadrate der Geschwindigkeit nicht genau zutrifft.

Nach ausgedehnten Versuchen des französischen Ingenieurs Darcy vom Jahre 1857 ist für neue eiserne oder bleierne Röhren nach Fortlassung entbehrlicher Ziffern:

7) $$\lambda = \left(0{,}02 + \frac{0{,}0005}{d}\right).$$

Hiernach würde also λ von w nicht abhängig sein.

G. Hagen (Berlin) hat aus eigenen und Darcy's Versuchen eine Formel abgeleitet, die auf die Temperatur des Wassers Rücksicht nimmt. Es möge hier nur der abgerundete Werth für eine Temperatur von 10^0 C. angegeben werden:

8) $$\lambda = 0{,}0236 + \frac{0{,}00008}{dw}.$$

Innerhalb der gewöhnlich vorkommenden Grenzen für d und w schwankt λ nach Gl. 8 nur zwischen 0,024 und 0,027, so dass man (nach Grashof, Theoretische Maschinenlehre, 1. Bd., S. 483), wenn man wegen geringer Unreinigkeit der Röhren die Zahl noch mit etwa 1,2 multiplicirt, wieder zu dem runden Mittelwerthe $\lambda = 0{,}03$ gelangt.

Für Holzröhren, wie sie im Gebirge noch vorkommen, hat man etwa $\lambda = 0{,}035$, für Röhren, die durch feste Niederschläge aus dem Wasser stark verunreinigt sind, $\lambda = 0{,}04$ zu setzen; ausserdem pflegt man im letzteren Fall eine Querschnittsverminderung in Folge der Niederschläge auf etwa $^4/_5$ zu berücksichtigen.

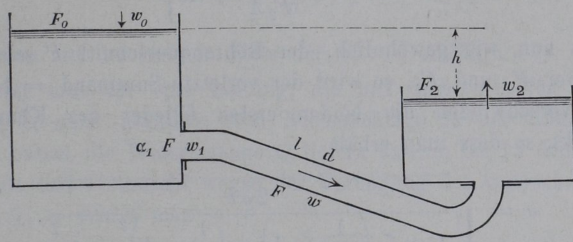
Es sei noch erwähnt, dass der franz. Ing. Flamant (s. Annales des ponts et chaussées 1892, Sept., S. 301)

9) $$\lambda = \frac{m}{\sqrt[4]{dw}}$$

entwickelt hat, wobei für glatte Röhren aus Blei, Glas, Schmiedeisen $m = 0{,}0102$ bis $0{,}0122$, für neue Gusseisenröhren $m = 0{,}0145$, für gebrauchte Gusseisenröhren $m = 0{,}0181$ zu setzen ist.

Sind nun 2 Gefässe nach Fig. 301 durch eine Röhre von der Weite d, der Länge l, dem Querschnitt F mit einander verbunden, so ermittelt man die Geschwindigkeit w in der Röhre, indem man wieder wie auf S. 246 die wirksame Druckhöhe in die einzelnen Theile zerlegt, wozu sie verwendet wird. Dabei verfolgt man die

Fig. 301.



Wasserbewegung vom Ober- bis zum Unterwasser, um keine Widerstandshöhe zu übersehen. Das Unterwasser ist als Mündung zu betrachten; daher ist an Stelle der beiden ersten Glieder der rechten Seite von Gl. 3, S. 246 zu schreiben: $\frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g}$. An Widerstandshöhen kommt zuerst der Reibungsverlust im Obergefässe mit $\zeta_0 \frac{w_1^2}{2g}$ in Betracht; sodann der Stossverlust bei scharfkantigem Anschlusse der Röhre (S. 247) mit $\frac{(w_1 - w)^2}{2g}$; dann der Reibungsverlust in der Röhre mit $\lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g}$. Beim Übertritte des Wassers aus der engen Röhre in das Untergefäss erfolgt ein Stossverlust $\frac{(w - w_2)^2}{2g}$, endlich im Untergefäss ein Reibungsverlust wie bei umgekehrter Bewegung, d. h. mit $\zeta_0 \frac{w^2}{2g}$. Sonach wird

$$
10)\quad \begin{aligned} h = \frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} + \zeta_0 \frac{w_1^2}{2g} + \frac{(w_1 - w)^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g} \\ + \frac{(w - w_2)^2}{2g} + \zeta_0 \frac{w^2}{2g}. \end{aligned}
$$

Um die verschiedenen Geschwindigkeiten auf w zurückzuführen, setze man $w_2 = \frac{w F}{F_2}$; $w_0 = w \frac{F}{F_0}$; $w_1 = \frac{w}{\alpha}$, dann wird

$$11)\quad 2gh = w^2 \left\{ \frac{F^2}{F_2{}^2} - \frac{F^2}{F_0{}^2} + \zeta_0 \frac{1}{\alpha_1{}^2} + \left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)^2 + \lambda \frac{l}{d} + \left(1 - \frac{F}{F_2}\right)^2 + \zeta_0 \right\}.$$

Ist nun, wie gewöhnlich, der Röhrenquerschnitt F sehr klein gegenüber F_0 und F_2, so wird der vorletzte Summand $= 1$; hiergegen verschwinden die beiden ersten Glieder des Klammernausdrucks, so dass man erhält

$$12)\quad w = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \zeta_0\left(\frac{1}{\alpha_1{}^2} + 1\right) + \left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)^2 + \lambda \frac{l}{d}}}.$$

Mit $\zeta_0 = 0{,}085$, $\alpha_1 = 0{,}64$ wird dann (rund)

$$13)\quad \boldsymbol{w = \sqrt{\frac{2gh}{1{,}6 + \lambda \frac{l}{d}}}}.$$

Beispiel: $h = 2^{\mathrm{m}}$, $l = 20^{\mathrm{m}}$, $d = 0{,}1^{\mathrm{m}}$ und $\lambda = 0{,}03$ giebt

$$w = \sqrt{\frac{2g \cdot 2}{1{,}6 + 0{,}03 \cdot 200}} = 2{,}27^{\mathrm{m}},$$

$$Q = {}^1/_4\, d^2 \pi \cdot w \qquad 0{,}018^{\mathrm{cbm}}.$$

$\sqrt{2g \cdot 2} = 6{,}3$ lässt im Vergleiche mit w den Einfluss der Widerstände erkennen.

Soll die erforderliche Röhrenweite d bei gegebener sekundl. Wassermenge Q, gegebenen h und l berechnet werden, so bedenke man, dass

$$Q = \frac{d^2 \pi}{4} w = \frac{d^2 \pi}{4} \sqrt{\frac{2gh}{1{,}6 + \lambda \frac{l}{d}}},$$

woraus sich

$$14)\quad d^5 = \frac{16\, Q^2}{\pi^2\, 2gh} (1{,}6 d + \lambda l)$$

ergiebt. Man löst diese Gleichung nach d auf, indem man vorläufig auf der rechten Seite das Glied $1{,}6\,d$ vernachlässigt, hiermit einen Annäherungswerth für d erhält, nämlich

15) $$d = \sqrt[5]{\frac{16\,Q^2\lambda l}{\pi^2 2gh}},$$

oder für $\lambda = 0{,}03$

16) $$d = 0{,}3\sqrt[5]{\frac{Q^2 l}{h}},$$

und diesen auf der rechten Seite der Gl. 14 einführt.

Setzt man für eine Leitung, die mit Sicherheit für längere Zeit, d. h. auch nachdem sich Niederschläge in der Röhre festgesetzt haben, die Wassermenge Q liefern soll, in Gl. 15 den Werth $\lambda = 0{,}04$ und vertauscht wegen der Verengung des Querschnittes Q mit $^5/_4 Q$, so erhält man

17) $$\boldsymbol{d = 0{,}35\sqrt[5]{\frac{Q^2 l}{h}}}.$$

Beispiel: Eine Röhre soll $Q = 0{,}01\,^{\mathrm{cbm}}/_{\mathrm{s}}$. liefern bei einer Länge $l = 100\,^{\mathrm{m}}$ und einer verfügbaren Druckhöhe $h = 2\,^{\mathrm{m}}$. Dann ist vorläufig nach Gl. 16:

$$d = 0{,}3\sqrt[5]{\frac{0{,}01^2 \cdot 100}{2}} = 0{,}104\,^{\mathrm{m}}.$$

Hiermit wird aus Gl. 14

$$d^5 = \frac{16 \cdot 0{,}01^2}{\pi^2 \cdot 2g \cdot 2}(1{,}6 \cdot 0{,}104 + 0{,}03 \cdot 100)$$

und $d = 0{,}105\,^{\mathrm{m}}$, d. h. nur wenig mehr als der vorläufige Werth. Wählt man unter Vernachlässigung von $1{,}6\,d$ die Gl. 17, so erhält man

$$d = 0{,}35\sqrt[5]{\frac{0{,}01^2 \cdot 100}{2}} = 0{,}121\,^{\mathrm{m}}.$$

Für die meisten Fälle der Anwendung wird diese Gl. 17 zu wählen sein.

b) Benutzung der Druckmesser (Piëzometer).

Bringt man an den Stellen A und B (Fig. 302) eines Leitungsrohres lothrechte Wasserröhren an, so wird in diesen das Wasser bis zu einer Höhe x_1 bezw. x_2 sich erheben und in dieser, dem hydraulischen Druck an den Stellen A und B entsprechenden Höhe in Ruhe verbleiben. Bezeichnet $\mathfrak{p}_1$ den hydraulichen Druck bei A,