gegebenen Massenkräften im Ruhezustand entsprechen würden. Durch deren Einführung vereinfacht sich Gl. 8 zu

$$\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} = \frac{p - p_0}{\gamma} - \frac{\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_0}{\gamma}.$$

Bezieht sich die Geschwindigkeit w_0 auf einen freien Wasserspiegel, so ist dort der hydraulische Druck $\mathfrak{p}_0$ gleich dem hydrostatischen Drucke p_0, mithin

$$\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} = \frac{p - \mathfrak{p}}{\gamma} \quad \text{oder}$$

9) $$\frac{\mathfrak{p}}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} - \left(\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g}\right).$$

Wir haben hiermit das Gesetz der hydraulischen Druckhöhe (s. S. 260) auf anderem Wege erhalten.

Ist noch die Schwere die einzige wirkende Wasserkraft und richtet man die positive y-Achse lothrecht abwärts, so ist

$$p = p_0 + \gamma y \quad \text{also}$$

$$\frac{\mathfrak{p}}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + y - \left(\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g}\right).$$

Hat man also ein Gefäss, aus dem das Wasser durch eine um h unter dem Wasserspiegel liegende Öffnung mit der Geschwindigkeit w ausströmt und herrscht an der Mündung ein Gegendruck p_m, so ist auch der hydraulische Druck $\mathfrak{p}$ dort $= p_m$, und man erhält für $y = h$:

$$\frac{p_m}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + h - \left(\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g}\right)$$

oder die bekannte Gleichung (S. 259)

$$\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} = h + \frac{p_0 - p_m}{\gamma}.$$

An die Stelle der Kontinuitätsgleichung (Gl. 5, S. 274) tritt hier

$$F_0 w_0 = F w.$$

2. Bewegung des Wassers in Röhren.

a) Leitungswiderstand gerader cylindrischer Röhren.

Beim Durchfliessen einer längeren Röhre vom Querschnitt F und der Länge l zeigt sich ein besonderer Widerstand, ein besonderer Druckhöhenverlust oder eine Widerstandshöhe z. Dieser von der Reibung herrührende Widerstand folgt wesentlich anderen Gesetzen als der Reibungswiderstand fester Körper (Theil 1, S. 189). Er ist nämlich ganz unabhängig von dem Drucke des Wassers, nahezu verhältnisgleich mit der Berührungsfläche und mit dem Quadrate der Geschwindigkeit w, also auch mit der Geschwindigkeitshöhe $\frac{w^2}{2g}$. Ist u der innere Umfang des Röhrenquerschnittes, so berühren sich in einer Röhre von der Länge l das Wasser und die Wandung in einer Fläche $u \cdot l$. Die Summe W der Reibungswiderstände längs der Röhre lässt sich daher schreiben

1) $$W = \varkappa u l \frac{w^2}{2g}.$$

Um die entsprechende Widerstandshöhe z zu finden, berechnen wir (nach S. 245/6) die während eines Zeittheilchens dt verrichtete Widerstandsarbeit $d\mathfrak{A}$ und setzen diese $= mgz$, wenn m wieder diejenige Wassermasse bedeutet, welche während der Zeit dt jeden Querschnitt durchströmt. Bei einer Geschwindigkeit w ist $w \cdot dt$ der Gleitweg des Wassers in der Röhre während der Zeit dt, mithin $d\mathfrak{A} = W \cdot w \cdot dt$. Ferner ist $mg = \gamma \cdot F \cdot w \cdot dt$ und

$$z = \frac{d\mathfrak{A}}{mg} = \varkappa \cdot u \cdot l \frac{w^2}{2g} \frac{w\,dt}{\gamma \cdot F \cdot w \cdot dt}$$

2) $$z = \frac{\varkappa}{\gamma} \frac{ul}{F} \frac{w^2}{2g}.$$

Setzt man $\varkappa = \gamma \beta$, so wird

3) $$z = \beta \frac{ul}{F} \frac{w^2}{2g}$$

mit β als Widerstandsziffer für Wasser in Röhren beliebiger Querschnittsform. Für cylindrische Röhren vom inneren Durchmesser d ist im Besonderen $u = d\pi$, $F = \frac{1}{4} d^2 \pi$, mithin

$$\frac{u}{F} = \frac{4}{d} \quad \text{und} \quad z = \beta 4 \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g}$$

oder, wenn man für diesen besonders häufigen Fall

4) $$4\beta = \lambda$$

setzt und λ als Widerstandsziffer cylindrischer Wasserleitungsröhren bezeichnet,

5) $$z = \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g}.$$

Als erste Annäherung ist nach Dupuit

6) $$\lambda = 0{,}03 \quad \text{zu setzen.}$$

Eingehendere Versuche haben aber gezeigt, dass λ nicht nur mit dem Grade der Rauhigkeit der inneren Röhrenfläche sich ändert, sondern auch noch in gewisser Weise von der Röhrenweite d und der Geschwindigkeit w abhängt, dass also die vorläufig angegebene Proportionalität des Widerstandes mit der Fläche $u \cdot l$ und dem Quadrate der Geschwindigkeit nicht genau zutrifft.

Nach ausgedehnten Versuchen des französischen Ingenieurs Darcy vom Jahre 1857 ist für neue eiserne oder bleierne Röhren nach Fortlassung entbehrlicher Ziffern:

7) $$\lambda = \left(0{,}02 + \frac{0{,}0005}{d}\right).$$

Hiernach würde also λ von w nicht abhängig sein.

G. Hagen (Berlin) hat aus eigenen und Darcy's Versuchen eine Formel abgeleitet, die auf die Temperatur des Wassers Rücksicht nimmt. Es möge hier nur der abgerundete Werth für eine Temperatur von 10^0 C. angegeben werden:

8) $$\lambda = 0{,}0236 + \frac{0{,}00008}{d\,w}.$$

Innerhalb der gewöhnlich vorkommenden Grenzen für d und w schwankt λ nach Gl. 8 nur zwischen 0,024 und 0,027, so dass man (nach Grashof, Theoretische Maschinenlehre, 1. Bd., S. 483), wenn man wegen geringer Unreinigkeit der Röhren die Zahl noch mit etwa 1,2 multiplicirt, wieder zu dem runden Mittelwerthe $\lambda = 0{,}03$ gelangt.

Für Holzröhren, wie sie im Gebirge noch vorkommen, hat man etwa $\lambda = 0{,}035$, für Röhren, die durch feste Niederschläge aus dem Wasser stark verunreinigt sind, $\lambda = 0{,}04$ zu setzen; ausserdem pflegt man im letzteren Fall eine Querschnittsverminderung in Folge der Niederschläge auf etwa $^4/_5$ zu berücksichtigen.

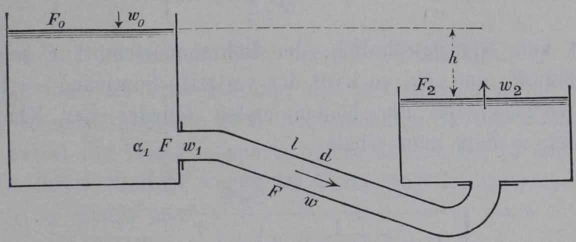
Es sei noch erwähnt, dass der franz. Ing. Flamant (s. Annales des ponts et chaussées 1892, Sept., S. 301)

9) $$\lambda = \frac{m}{\sqrt[4]{d\,w}}$$

entwickelt hat, wobei für glatte Röhren aus Blei, Glas, Schmiedeisen $m = 0{,}0102$ bis $0{,}0122$, für neue Gusseisenröhren $m = 0{,}0145$, für gebrauchte Gusseisenröhren $m = 0{,}0181$ zu setzen ist.

Sind nun 2 Gefässe nach Fig. 301 durch eine Röhre von der Weite d, der Länge l, dem Querschnitt F mit einander verbunden, so ermittelt man die Geschwindigkeit w in der Röhre, indem man wieder wie auf S. 246 die wirksame Druckhöhe in die einzelnen Theile zerlegt, wozu sie verwendet wird. Dabei verfolgt man die

Fig. 301.



Wasserbewegung vom Ober- bis zum Unterwasser, um keine Widerstandshöhe zu übersehen. Das Unterwasser ist als Mündung zu betrachten; daher ist an Stelle der beiden ersten Glieder der rechten Seite von Gl. 3, S. 246 zu schreiben: $\frac{w_2^{\,2}}{2g} - \frac{w_0^{\,2}}{2g}$. An Widerstandshöhen kommt zuerst der Reibungsverlust im Obergefässe mit $\zeta_0 \frac{w_1^{\,2}}{2g}$ in Betracht; sodann der Stossverlust bei scharfkantigem Anschlusse der Röhre (S. 247) mit $\frac{(w_1 - w)^2}{2g}$; dann der Reibungsverlust in der Röhre mit $\lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g}$. Beim Übertritte des Wassers aus der engen Röhre in das Untergefäss erfolgt ein Stossverlust $\frac{(w - w_2)^2}{2g}$, endlich im Untergefäss ein Reibungsverlust wie bei umgekehrter Bewegung, d. h. mit $\zeta_0 \frac{w^2}{2g}$. Sonach wird

$$\begin{aligned} h = \frac{w_2^{\,2}}{2g} - \frac{w_0^{\,2}}{2g} + \zeta_0 \frac{w_1^{\,2}}{2g} + \frac{(w_1 - w)^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g} \\ + \frac{(w - w_2)^2}{2g} + \zeta_0 \frac{w^2}{2g}. \end{aligned} \tag{10}$$

Um die verschiedenen Geschwindigkeiten auf w zurückzuführen, setze man $w_2 = \frac{wF}{F_2}$; $w_0 = w\frac{F}{F_0}$; $w_1 = \frac{w}{\alpha}$, dann wird

$$11)\quad 2gh = w^2\left\{\frac{F^2}{F_2{}^2} - \frac{F^2}{F_0{}^2} + \zeta_0\frac{1}{\alpha_1{}^2} + \left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)^2 + \lambda\frac{l}{d} + \left(1 - \frac{F}{F_2}\right)^2 + \zeta_0\right\}.$$

Ist nun, wie gewöhnlich, der Röhrenquerschnitt F sehr klein gegenüber F_0 und F_2, so wird der vorletzte Summand $= 1$; hiergegen verschwinden die beiden ersten Glieder des Klammernausdrucks, so dass man erhält

$$12)\quad w = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \zeta_0\left(\frac{1}{\alpha_1{}^2} + 1\right) + \left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)^2 + \lambda\frac{l}{d}}}.$$

Mit $\zeta_0 = 0{,}085$, $\alpha_1 = 0{,}64$ wird dann (rund)

$$13)\quad \boldsymbol{w = \sqrt{\frac{2gh}{1{,}6 + \lambda\frac{l}{d}}}}.$$

Beispiel: $h = 2^{\text{m}}$, $l = 20^{\text{m}}$, $d = 0{,}1^{\text{m}}$ und $\lambda = 0{,}03$ giebt

$$w = \sqrt{\frac{2g\cdot 2}{1{,}6 + 0{,}03\cdot 200}} = 2{,}27^{\text{m}},$$

$$Q = {}^1\!/_4\, d^2\pi\cdot w \quad 0{,}018^{\text{cbm}}.$$

$\sqrt{2g\cdot 2} = 6{,}3$ lässt im Vergleiche mit w den Einfluss der Widerstände erkennen.

Soll die erforderliche Röhrenweite d bei gegebener sekundl. Wassermenge Q, gegebenen h und l berechnet werden, so bedenke man, dass

$$Q = \frac{d^2\pi}{4}w = \frac{d^2\pi}{4}\sqrt{\frac{2gh}{1{,}6 + \lambda\frac{l}{d}}},$$

woraus sich

$$14)\quad d^5 = \frac{16Q^2}{\pi^2 2gh}(1{,}6d + \lambda l)$$

ergiebt. Man löst diese Gleichung nach d auf, indem man vorläufig auf der rechten Seite das Glied $1{,}6\,d$ vernachlässigt, hiermit einen Annäherungswerth für d erhält, nämlich

$$15)\qquad d = \sqrt[5]{\frac{16\,Q^2\lambda\,l}{\pi^2\,2\,g\,h}},$$

oder für $\lambda = 0{,}03$

$$16)\qquad d = 0{,}3\,\sqrt[5]{\frac{Q^2\,l}{h}},$$

und diesen auf der rechten Seite der Gl. 14 einführt.

Setzt man für eine Leitung, die mit Sicherheit für längere Zeit, d. h. auch nachdem sich Niederschläge in der Röhre festgesetzt haben, die Wassermenge Q liefern soll, in Gl. 15 den Werth $\lambda = 0{,}04$ und vertauscht wegen der Verengung des Querschnittes Q mit $^5/_4\,Q$, so erhält man

$$17)\qquad \boldsymbol{d = 0{,}35\,\sqrt[5]{\frac{Q^2\,l}{h}}}.$$

Beispiel: Eine Röhre soll $Q = 0{,}01$ cbm/s. liefern bei einer Länge $l = 100$ m und einer verfügbaren Druckhöhe $h = 2$ m. Dann ist vorläufig nach Gl. 16:

$$d = 0{,}3\,\sqrt[5]{\frac{0{,}01^2 \cdot 100}{2}} = 0{,}104 \text{ m}.$$

Hiermit wird aus Gl. 14

$$d^5 = \frac{16 \cdot 0{,}01^2}{\pi^2 \cdot 2g \cdot 2}\,(1{,}6 \cdot 0{,}104 + 0{,}03 \cdot 100)$$

und $d = 0{,}105$ m, d. h. nur wenig mehr als der vorläufige Werth. Wählt man unter Vernachlässigung von $1{,}6\,d$ die Gl. 17, so erhält man

$$d = 0{,}35\,\sqrt[5]{\frac{0{,}01^2 \cdot 100}{2}} = 0{,}121 \text{ m}.$$

Für die meisten Fälle der Anwendung wird diese Gl. 17 zu wählen sein.

b) Benutzung der Druckmesser (Piëzometer).

Bringt man an den Stellen A und B (Fig. 302) eines Leitungsrohres lothrechte Wasserröhren an, so wird in diesen das Wasser bis zu einer Höhe x_1 bezw. x_2 sich erheben und in dieser, dem hydraulischen Druck an den Stellen A und B entsprechenden Höhe in Ruhe verbleiben. Bezeichnet $\mathfrak{p}_1$ den hydraulichen Druck bei A, so ist $\mathfrak{p}_1 = \gamma x_1$. Nach Gl. 3, S. 260 ist dann für die Stelle A welche um y_1 unter dem Oberwasser liegt,

$$x_1 = \left(\frac{p_0}{\gamma} + y_1\right) - \left(\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g}\right) - z_1,$$

wenn w die Geschwindigkeit in der Röhre und z_1 die Summe der Widerstandshöhen zwischen dem Oberwasser und der Stelle A. Ebenso gilt dann für die Stelle B

$$x_2 = \left(\frac{p_0}{\gamma} + y_2\right) - \left(\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g}\right) - z_2.$$

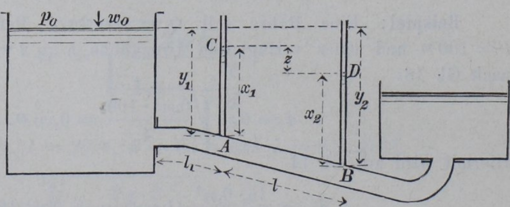
Zieht man von dieser Gleichung die vorige ab, so entsteht:

$$x_2 - x_1 = y_2 - y_1 - (z_2 - z_1) \quad \text{oder}$$

$$(y_2 - x_2) - (y_1 - x_1) = (z_2 - z_1).$$

Nun ist $(y_2 - x_2)$ die Tiefe des Druckwasserstandes D, $(y_1 - x_1)$ diejenige des Druckwasserstandes C unter dem Oberwasser. Der Unterschied beider ist also der unmittelbare Höhenunterschied z der Druckmesser-Wasserspiegel C und D; und nach letzterer Gleichung ist diese Höhe $z = z_2 - z_1$. Es bedeutet aber $z_2 - z_1$ die auf die Strecke $AB = l$ entfallende Widerstandshöhe, mithin wird die zwischen zwei Stellen A und B einer Röhrenleitung auftretende Widerstandshöhe unmittelbar gemessen durch den Höhenunterschied der Wasserspiegel zweier in A und B angebrachten Druckmesser oder Piëzometer. (Letzterer Name kommt von dem griechischen Worte $\pi\iota\acute{\varepsilon}\zeta\omega$ = drücken.) Für den Fall der Figur 302 würde

Fig. 302.



$$z = \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g},$$

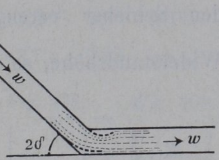
wenn l die Entfernung der beiden Stellen A und B von einander bezeichnet.

Solche Druckmesser sind benutzt worden zur Ermittelung der Ziffer λ; ebenso aber auch zur Messung anderer Widerstandshöhen, die durch Richtungsänderungen, Abstellvorrichtungen (Schieber, Hähne, Ventile) u. dgl. verursacht werden.

c) Widerstand von Knieröhren und gekrümmten Röhren.

Erfährt eine Röhre einen scharfen Knick um einen Winkel 2δ (Fig. 303), wie solches bei Holzröhren vorkommt, so kann das Wasser dieser plötzlichen Richtungsänderung nicht folgen; vielmehr wird unmittelbar nach dem Knick eine Einschnürung und Wiederausbreitung vorkommen, was nach S. 247 einen Stossverlust erzeugt. Versuche, welche Weisbach darüber angestellt hat, sind durch die Formel

Fig. 303.



$$1) \qquad \zeta_2 = 0{,}9457 \sin^2\delta + 2{,}047 \sin^4\delta$$

zum Ausdrucke gebracht, wenn die Widerstandshöhe $\zeta_2 \dfrac{w^2}{2g}$ bedeutet.

$$\delta = 10^0 \text{ giebt } \zeta_2 = 0{,}046,$$
$$\text{„} = 20^0 \quad \text{„} \quad \text{„} = 0{,}139,$$
$$\text{„} = 30^0 \quad \text{„} \quad \text{„} = 0{,}364,$$
$$\text{„} = 40^0 \quad \text{„} \quad \text{„} = 0{,}740,$$
$$\text{„} = 45^0 \quad \text{„} \quad \text{„} = 0{,}984.$$

Für Kropfröhren (Krümmer), deren Mittellinie nach einem Viertelkreise vom Halbmesser ϱ geformt ist, gilt mit derselben Bedeutung

$$2) \qquad \zeta_2 = 0{,}131 + 1{,}847 \left(\frac{\frac{1}{2}d}{\varrho}\right)^{3,5}.$$

Für $\dfrac{\frac{1}{2}d}{\varrho}$	$= 0{,}2$	$0{,}3$	$0{,}4$	$0{,}5$	$0{,}6$
wird ζ_2	$= 0{,}138$	$0{,}158$	$0{,}206$	$0{,}294$	$0{,}440$.

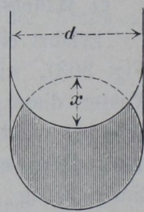
Entspricht die Krümmung nicht einem Viertelkreise, sondern einem Mittelpunktswinkel von δ Graden, so setzt man die Widerstandshöhe

$$3) \qquad z = \zeta_2 \frac{\delta}{90} \frac{w^2}{2g}.$$

d) Widerstand beim Durchgange durch Schieber, Hähne, Drosselklappen und Ventile.

Diese Widerstände beruhen sämmtlich auf innerer Einschnürung. Weisbach's Versuche vom Jahre 1842 haben zu folgenden Ergebnissen geführt.

Fig. 304.

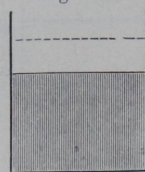


Schieber in kreisförmigem Rohre:

Ist F der Querschnitt des unverengten Rohres, w die Geschwindigkeit in demselben, F_1 der durch den Schieber verengte Querschnitt, $\zeta_3 \frac{w^2}{2g}$ die Widerstandshöhe, so ist nach Fig. 304 bei

$\frac{x}{d} =$	$^1/_8$	$^2/_8$	$^3/_8$	$^4/_8$	$^5/_8$	$^6/_8$	$^7/_8$
$\frac{F_1}{F} =$	0,948	0,856	0,740	0,609	0,466	0,315	0,159
$\zeta_3 =$	0,07	0,26	0,81	2,06	5,52	17,0	97,8.

Fig. 305.



Schieber im Rohre von rechteckigem Querschnitte (Fig. 305):

$\frac{F_1}{F} =$	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
$\zeta_3 =$	0,09	0,39	0,95	2,08	4,02	8,12	17,8	44,5	193.

Hahn mit kreisförmiger Durchgangsöffnung; Stellwinkel δ (Fig. 306):

Stellwinkel $\delta =$	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	65^0	82^0
$\frac{F_1}{F} =$	0,850	0,692	0,535	0,385	0,250	0,137	0,091	0
$\zeta_3 =$	0,29	1,56	5,47	17,3	52,6	206	486	∞.

Hahn mit rechteckiger Durchgangsöffnung:

Stellwinkel $\delta =$	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	67^0
$\frac{F_1}{F} =$	0,849	0,687	0,520	0,352	0,188	0
$\zeta_3 =$	0,31	1,84	6,15	20,7	95,3	∞.

Drosselklappe (Fig. 307) in kreisförmigem Rohre:

Fig. 306.

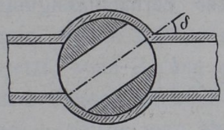
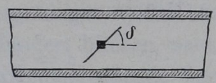


Fig. 307.



Stellwinkel $\delta =$	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0	90^0
$\zeta_3 =$	0,52	1,54	3,91	10,8	32,6	118	751	∞.

Drosselklappe in rechteckigem Rohre:

Stellwinkel $\delta =$	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0	90^0
$\zeta_3 =$	0,45	1,34	3,54	9,27	24,9	77,4	368	∞.

Für Kegelventile (Fig. 308) ist

$$\zeta_3 = \left(1{,}537\,\frac{F}{F_1} - 1\right)^2,$$

wenn F_1 der kleinste Durchflussquerschnitt.

Fig. 308.

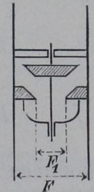
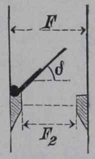


Fig. 309.



Für Klappenventile (Fig. 309) ist, wenn die Öffnung im Ventilsitz

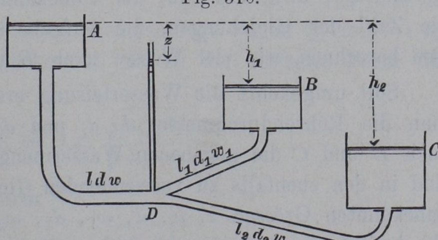
$$F_2 = 0{,}535\,F,$$

für $\delta =$ 70^0	60^0	50^0	45^0	40^0	35^0	30^0	25^0	20^0	15^0
$\zeta_3 =$ 1,7	3,2	6,6	9,5	14	20	30	42	62	90.

e) Wasserleitung mit Verzweigung.

Von einem Hauptbehälter A (Fig. 310) werde nach zwei Stellen B und C die sekundl. Wassermenge Q_1 bezw. Q_2 geliefert. Von A nach D führe ein Hauptrohr von der Weite d, der Länge l. Hier theile sich das Rohr in die Zweige von den Abmessungen d_1, l_1 bezw. d_2, l_2. Zur Berechnung von Q_1 und Q_2 denke man sich an der Verzweigungsstelle D einen

Fig. 310.



Druckmesser (Piëzometer) angebracht, dessen Wasserspiegel um z unter dem Oberwasser liegen möge. Dann ist z die wirksame Druckhöhe von A bis D, d. h. unter Vernachlässigung der unbedeutenden Krümmungen:

$$1)\qquad z = \frac{w^2}{2g}\left(1{,}6 + \lambda \frac{l}{d}\right).$$

Wenn man annimmt, dass der Übergang aus dem Hauptrohr in die beiden Zweige allmählich erfolge, braucht ein Verlust dort nicht angenommen zu werden. Auch wollen wir voraussetzen, der Unterschied zwischen w, w_1 und w_2 sei so gering, dass zur Erzeugung der letzteren beiden Geschwindigkeiten aus der ersteren keine nennenswerthe Druckhöhe nöthig werde. Von D bis B ist $h_1 - z$ die wirksame Druckhöhe, welche zur Überwindung der Röhrenreibung und der Gefässreibung bei B dient, daher

$$2)\qquad h_1 - z = \frac{{w_1}^2}{2g}\left(\zeta_0 + \lambda \frac{l_1}{d_1}\right); \text{ ebenso}$$

$$3)\qquad h_2 - z = \frac{{w_2}^2}{2g}\left(\zeta_0 + \lambda \frac{l_2}{d_2}\right).$$

Hierzu kommen noch die Gleichungen:

$$4)\qquad Q_1 = \frac{{d_1}^2 \pi}{4} \cdot w_1;$$

$$5)\qquad Q_2 = \frac{{d_2}^2 \pi}{4} \cdot w_2;$$

$$6)\qquad Q_1 + Q_2 = \frac{d^2 \pi}{4} \cdot w.$$

In diesen sechs Gleichungen sind unbekannt: z, w, w_1, w_2, Q_1 und Q_2; d. h. die Zahl der Unbekannten ist ebenso gross, wie die Zahl der Gleichungen, die Aufgabe somit lösbar. Man kann also berechnen, wie viel Wasser nach B und C fliesst.

Soll umgekehrt die Wasserleitung erst entworfen werden, will man die Röhrendurchmesser d, d_1 und d_2 so bestimmen, dass sie nach B und C die gegebenen Wassermengen Q_1 und Q_2 liefern, so sind in den ebenfalls zu verwendenden Gleichungen 1—6 die sieben unbekannten Grössen z, w, d, w_1, d_1, w_2 und d_2 enthalten, d. h. die Aufgabe ist unbestimmt, ist nur lösbar, wenn man für eine der Grössen einen Werth willkürlich annimmt, etwa $w = 1$ bis $1{,}3^{\text{m}}$.

Dass die Aufgabe verschiedene Lösungen zulässt, erkennt man auch unmittelbar durch folgende Überlegung: Nehmen wir an, die Röhrenweiten $d = 0{,}3^{\text{m}}$; $d_1 = 0{,}2$, $d_2 = 0{,}1^{\text{m}}$ genügen den gestellten Bedingungen; würde man nun d vergrössern, vielleicht auf $0{,}4^{\text{m}}$, so würde jetzt, wenn d_1 und d_2 unverändert blieben, nach B und C mehr Wasser fliessen als bisher; durch entsprechende Verkleinerung von d_1 und d_2 würde man aber diesen Überschuss wieder in Wegfall bringen können und erhielte somit drei andere Weiten d, d_1 und d_2, die ebenfalls die Aufgabe zu erfüllen vermöchten.

Für längere Röhrenleitungen kann man in Gl. 1 den Summanden 1,6, in Gl. 2 und 3 die Summanden ζ_0 vernachlässigen und erhält statt der Gl. 1—3:

7) $$z = \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g},$$

8) $$h_1 - z = \lambda \frac{l_1}{d_1} \frac{w_1^{\,2}}{2g},$$

9) $$h_2 - z = \lambda \frac{l_2}{d_2} \frac{w_2^{\,2}}{2g}.$$

Wenn man nun zur Bestimmung der Röhrenweite die Geschwindigkeit w im Hauptrohr annimmt, so ist nach Gl. 7 der Werth z ermittelt, ebenso die Weite des Hauptrohres nach Gl. 6. Da nun auch $h_1 - z$ und $h_2 - z$ bekannt sind, so liefern Gl. 4 u. 8:

10) $$d_1 = \sqrt[5]{\frac{16\, Q_1^{\,2} \lambda l_1}{\pi^2\, 2g\,(h_1 - z)}};\quad \text{ebenso wird}$$

11) $$d_2 = \sqrt[5]{\frac{16\, Q_2^{\,2} \lambda l_2}{\pi^2\, 2g\,(h_2 - z)}}.$$

Vertauscht man der festen Niederschläge wegen Q_1 mit $^5/_4\, Q_1$ und setzt $\lambda = 0{,}04$, so bekommt Gl. 10 die einfache Form der Gl. 17, S 281

12) $$d_1 = 0{,}35 \sqrt[5]{\frac{Q_1^{\,2} l_1}{h_1 - z}}$$

und Gl. 11 ebenso die Form

13) $$d_2 = 0{,}35 \sqrt[5]{\frac{Q_2^{\,2} l_2}{h_2 - z}}.$$

Beispiel: Es sei $Q_1 = 0{,}1$ cbm/s., $Q_2 = 0{,}03$ cbm/s., $l = 300$ m, $l_1 = 200$ m, $l_2 = 500$ m, $h_1 = 12$ m, $h_2 = 6$ m; ferner werde $w = 1$ m angenommen.

Dann wird

$$\frac{d^2\pi}{4} = 0{,}13 \cdot \frac{5}{4} = 0{,}16 \text{ uud } d = 0{,}45 \text{ m}$$

und mit $\lambda = 0{,}04$:
$$z = 0{,}04 \frac{300}{0{,}45} \frac{1}{2g} = 1{,}36 \text{ m}.$$

$$d_1 = 0{,}35 \sqrt[5]{\frac{0{,}1^2 \cdot 200}{10{,}64}} = 0{,}25 \text{ m};$$

$$d_2 = 0{,}35 \sqrt[5]{\frac{0{,}03^2 \cdot 500}{4{,}64}} = 0{,}22 \text{ m}.$$

f) Widerstand eines kegelförmigen Rohres.

Verengt sich ein Rohr der Länge l_1 von der der Geschwindigkeit w entsprechenden Weite d kegelförmig auf die Weite d_1 (Fig. 311), so gilt in einem Abstand x von der weitesten Stelle für die Weite y die Beziehung

$$d - y = \frac{d - d_1}{l_1} x \quad \text{mit} \quad -dy = \frac{d - d_1}{l_1} dx;$$

für die Geschwindigkeit

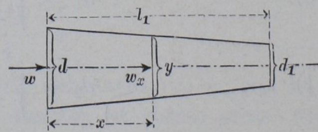
$$w_x = w \frac{d^2}{x^2}.$$

Auf ein Längentheilchen dx kommt (Gl. 5, S. 277) die Widerstandshöhe

$$dz = \lambda \frac{dx}{y} \frac{w_x^2}{2g} = \lambda dx \frac{w^2}{2g} \frac{d^4}{y^5}$$

$$= -\frac{\lambda l_1}{d - d_1} \frac{w^2}{2g} d^4 y^{-5} dy,$$

Fig. 311.



daher auf die ganze Länge

$$z = -\frac{\lambda l_1}{d - d_1} \frac{w^2}{2g} d^4 \int_d^{d_1} y^{-5} dy$$

$$= \frac{\lambda l_1}{d - d_1} \frac{w^2}{2g} \frac{d^4}{4} \left(\frac{1}{d_1^4} - \frac{1}{d^4}\right)$$

$$= \lambda \frac{w^2}{2g} \frac{l_1}{d} \left(\frac{1}{4} \frac{\frac{d^4}{d_1^4} - 1}{1 - \frac{d_1}{d}} \right).$$

Der letzte Klammernausdruck giebt an, in welchem Verhältnisse der Widerstand sich vergrössert im Vergleiche mit einem cylindrischen Rohre von der Weite d und der Länge l_1.

$$\frac{d_1}{d} = \frac{1}{2} \text{ giebt } z = \lambda \frac{w^2}{2g} 7{,}5 \frac{l_1}{d}$$

$$\frac{d_1}{d} = \frac{1}{5} \quad \text{„} \quad z = \lambda \frac{w^2}{2g} 195 \frac{l_1}{d}.$$

g) Steighöhe springender Strahlen.

Ein Strahl, der mit der Geschwindigkeit w aus einer Mündung lothrecht emporsteigt, würde im luftleeren Raum eine Höhe $h_s = \frac{w^2}{2g}$ erreichen.

In Folge des Luftwiderstandes vermindert sich die erreichbare Höhe auf $\eta \frac{w^2}{2g}$. Die Ziffer η hängt theils von der Form des Mundstücks ab, weil diese Einfluss darauf hat, ob der Strahl gut geschlossen bleibt oder sich zertheilt; theils aber ist η auch noch von w^2 abhängig.

Es soll hier auf das Verhalten der springenden Strahlen nicht näher eingegangen, nur angeführt werden, dass man als rohe Annäherung an Versuche von Weisbach

1) $$\eta = 1 - 0{,}01 \frac{w^2}{2g} \quad \text{setzen kann.}$$

Beispiel: Von einem Behälter führe (Fig. 312) ein Rohr von 20 m Länge und 0,02 m Weite zu einem lothrechten kegelförmigen Mundstücke von 0,15 m Länge; es soll die Steighöhe des Springstrahls berechnet werden. Die wirksame Druckhöhe sei 8 m.

Es ist allgemein (vergl. Gl. 10, S. 279 mit $w_0 = 0$ und mit Fortlassung der beiden letzten Glieder)

$$h = \frac{w_2^2}{2g} + \zeta_0 \frac{w_1^2}{2g} + \frac{w^2}{2g}\left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)^2 + \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g},$$

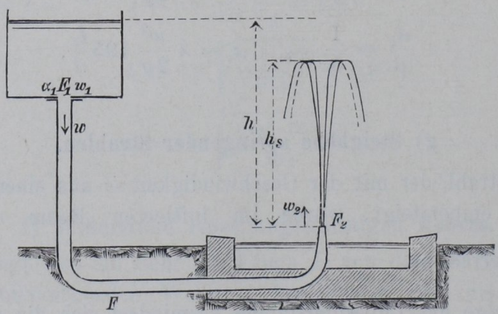
wenn in l zugleich die ideelle (vergrösserte) Länge des Mundstücks enthalten ist. Es ist dann die Geschwindigkeit in der Hauptröhre

$$w = \sqrt{\frac{2gh}{\frac{F^2}{F_2^2} + \zeta_0 \frac{1}{\alpha_1^2} + \left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)^2 + \lambda \frac{l}{d}}}$$

und die Geschwindigkeit des Springstrahls (mit $\zeta_0 = 0{,}085$, $\alpha_1 = 0{,}64$, $\lambda = 0{,}03$)

$$w_2 = \frac{F}{F_2} w = \frac{F}{F_2} \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{F}{F_2{}^2}\right)^2 + 0{,}21 + 0{,}32 + 0{,}03 \frac{l}{d}}}.$$

Fig. 312.



Ist $d_2 = 0{,}01$ m der Durchmesser des Mundstücks, so wird für $d_2 = 0{,}5\,d$:

$$l = 20 + 7{,}5 \cdot 0{,}15 = 21{,}125 \text{ m}$$

$$w_2 = 4 \sqrt{\frac{2g \cdot 8}{16 + 0{,}53 + 0{,}03 \cdot 1056}} = 7{,}2 \text{ m}.$$

Dann ist $$\frac{w_2{}^2}{2g} = 2{,}64 \text{ m},$$

$$\eta = 1 - 0{,}026 = 0{,}974,$$

also die Steighöhe $$h_s = 0{,}974 \cdot 2{,}64 = 2{,}57 \text{ m}.$$

Der sekundliche Wasserverbrauch ist

$$Q = 0{,}01^2 \frac{\pi}{4} \cdot 7{,}2 = 0{,}000565 \frac{\text{cbm}}{\text{s.}} = 0{,}565 \frac{\text{l}}{\text{s.}}.$$

Verengt sich aber das Mundstück auf $d_2 = 0{,}2\,d = 4$ mm, so wird

$$l = 20 + 0{,}15 \cdot 195 = 49 \text{ m};$$

$$w_2 = 25 \sqrt{\frac{2g \cdot 8}{625 + 0{,}53 + 0{,}03 \cdot 2450}} = 11{,}84;$$

$$\frac{w_2{}^2}{2g} = 7{,}1 \text{ m}; \quad \eta = 1 - 0{,}071 = 0{,}93,$$

also die Steighöhe $$h_s = 0{,}93 \cdot 7{,}1 = 6{,}6 \text{ m},$$

der sekundliche Wasserverbrauch

$$Q = 0{,}004^2 \frac{\pi}{4} \cdot 11{,}84 = 0{,}0001487 \frac{\text{cbm}}{\text{s.}} = 0{,}1487 \frac{\text{l}}{\text{s.}}.$$

Die stärkere Verengung des Mundstücks hat also die Sprunghöhe erheblich vergrössert, den Wasserverbrauch aber bedeutend vermindert.