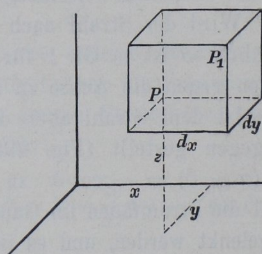
## m) L. Eulers Grundgleichungen für die Bewegung tropfbarflüssiger Körper ohne Reibung.

Ein Punkt $P$ (Fig. 300) des flüssigen Körpers, dessen Koordinaten $x$, $y$, $z$ sind, bewege sich während des Zeittheilchens $dt$ nach $P_1$: projizirt man dann $PP_1 = ds$ in der Richtung der drei Achsen, so erhält man die drei Projektionen $dx$, $dy$ und $dz$. Das Parallelepiped dieser drei Seiten enthalte das Massentheilchen

$$m = \frac{\gamma}{g} dx \cdot dy \cdot dz.$$

Fig. 300.




Die Geschwindigkeit desselben sei

$$w = \frac{ds}{dt}, \text{ zerlegt in}$$

$$w_x = \frac{dx}{dt}; \quad w_y = \frac{dy}{dt}; \quad w_z = \frac{dz}{dt}.$$

Der bei der Bewegung herrschende (also hydraulische) Druck im Punkt $P$ werde $\mathfrak{p}$ genannt. Dieser Druck $\mathfrak{p}$ ist an einer Stelle $P$ nach allen Richtungen derselbe (vergl. S. 157), wechselt aber in dem flüssigen Körper von Ort zu Ort und ist auch im Allgemeinen mit der Zeit veränderlich. Auf das Massentheilchen wirke eine Massenkraft $m \cdot R$ mit den Seitenkräften $m \cdot X$, $m \cdot Y$ und $m \cdot Z$.

In der Richtung der $x$-Achse wirkt auf das Massentheilchen $m$ auf der linken Seite des Parallelepipeds mit dem Sinne nach rechts die Druckkraft $\mathfrak{p} \cdot dy \cdot dz$, auf der rechten Seite des Parallelepipeds, wo der Druck auf die Flächeneinheit $\mathfrak{p} + \frac{\delta \mathfrak{p}}{\delta x} dx$ beträgt, mit dem Sinne nach links die Kraft $\left(\mathfrak{p} + \frac{\delta \mathfrak{p}}{\delta x} dx\right) dy \cdot dz$. Endlich wirkt nach rechts die Massenkraft $m \cdot X$. Daher wird die Beschleunigung in der $x$-Richtung:

$$\frac{dw_x}{dt} = X - \frac{\delta \mathfrak{p}}{\delta x} \frac{dx \cdot dy \cdot dz}{m} \quad \text{oder, weil}$$

$$m = \frac{\gamma}{g} \cdot dx \cdot dy \cdot dz:$$

1) $$\frac{dw_x}{dt} = X - \frac{\delta \mathfrak{p}}{\delta x} \frac{g}{\gamma}.$$

Die Geschwindigkeit $w$ in dem Punkte $P$ des flüssigen Körpers ist nun im Allgemeinen eine Funktion von $x$, $y$, $z$ und $t$, und weil bei der Bewegung von $P$ nach $P_1$ sich alle diese vier Grössen ändern, so ist $dw_x$ in Gl. 1 ein totales Differential, mithin

$$dw_x = \frac{\delta w_x}{\delta x} dx + \frac{\delta w_x}{\delta y} dy + \frac{\delta w_x}{\delta z} dz + \frac{\delta w_x}{\delta t} dt.$$

Hiernach wird aus Gl. 1:

$$\frac{g}{\gamma}\frac{\delta \mathfrak{p}}{\delta x} = X - \left\{\frac{\delta w_x}{\delta x}\frac{dx}{dt} + \frac{\delta w_x}{\delta y}\frac{dy}{dt} + \frac{\delta w_x}{\delta z}\frac{dz}{dt} + \frac{\delta w_x}{\delta t}\right\}$$

oder auch, weil

$$\frac{dx}{dt} = w_x\,; \qquad \frac{dy}{dt} = w_y\,; \qquad \frac{dz}{dt} = w_z\,:$$

2) $$\frac{g}{\gamma}\frac{\delta \mathfrak{p}}{\delta x} = X - \left\{w_x\frac{\delta w_x}{\delta x} + w_y\frac{\delta w_x}{\delta y} + w_z\frac{\delta w_x}{\delta z} + \frac{\delta w_x}{\delta t}\right\}$$

und ebenso für die beiden anderen Achsenrichtungen:

3) $$\frac{g}{\gamma}\frac{\delta \mathfrak{p}}{\delta y} = Y - \left\{w_x\frac{\delta w_y}{\delta x} + w_y\frac{\delta w_y}{\delta y} + w_z\frac{\delta w_y}{\delta z} + \frac{\delta w_y}{\delta t}\right\},$$

4) $$\frac{g}{\gamma}\frac{\delta \mathfrak{p}}{\delta z} = Z - \left\{w_x\frac{\delta w_z}{\delta x} + w_y\frac{\delta w_z}{\delta y} + w_z\frac{\delta w_z}{\delta z} + \frac{\delta w_z}{\delta t}\right\}.$$

In den Raum des Parallelepipeds $PP_1$ tritt während der Zeit $dt$ links durch den Querschnitt $dy \cdot dz$ mit der Geschwindigkeit $w_x$ die Raummenge ein: $dy \cdot dz \cdot w_x \cdot dt$, rechts aber wegen der Geschwindigkeit $w_x + \frac{\delta w_x}{\delta x} dx$ die Menge $dy \cdot dz \cdot \left(w_x + \frac{\delta w_x}{\delta x} dx\right) \cdot dt$ aus; der Überschuss des Abflusses ist also

$$dy \cdot dz \cdot \frac{\delta w_x}{\delta x} \cdot dx \cdot dt.$$

Der Überschuss des Abflusses in der $y$-Richtung beträgt

$$dx \cdot dz \cdot \frac{\delta w_y}{\delta y} \cdot dy \cdot dt,$$

in der $z$-Richtung:

$$dx \cdot dy \cdot \frac{\delta w_z}{\delta z} \cdot dz \cdot dt.$$

Der Gesammt-Überschuss beträgt mithin:

$$dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt \cdot \left(\frac{\delta w_x}{\delta x} + \frac{\delta w_y}{\delta y} + \frac{\delta w_z}{\delta z}\right).$$

Unter der Annahme nun, dass sich innerhalb des flüssigen Körpers kein leerer Raum befinde und dass die Flüssigkeit nicht zusammendrückbar sei, muss der das Massentheilchen enthaltende Raum unveränderlich, d. h. vorstehender Gesammt-Überschuss Null sein, oder

5) $$\frac{\delta w}{\delta x} + \frac{\delta w_y}{\delta y} + \frac{\delta w_z}{\delta z} = 0.$$

Diese Gleichung heisst die Kontinuitäts-Gleichung.

Man kann letztere Gleichung auch noch in anderer Weise ableiten: Der Rauminhalt des Massentheilchens $m$ ist $dx \cdot dy \cdot dz$; soll dieser mit der Zeit sich nicht ändern, so muss

6) $$\frac{\delta (dx \cdot dy \cdot dz)}{\delta t} = 0 \text{ sein; oder}$$

7) $$dy \cdot dz \frac{\delta dx}{\delta t} + dx \cdot dz \cdot \frac{\delta dy}{\delta t} + dx \cdot dy \cdot \frac{\delta dz}{\delta t} = 0.$$

Darin bedeutet $\delta dx$ die Zunahme der Länge $dx$ während der Zeit $dt$. Da nun die Geschwindigkeit in der $x$-Richtung im Punkte $P$ mit den Koordinaten $x$, $y$, $z$ die Grösse $w_x$, im Punkte $P_1$ aber die Grösse $w_x + \frac{\delta w_x}{\delta x} dx$ hat, so muss sich die Kante $dx$ während der Zeit $dt$ um $\frac{\delta w_x}{\delta x} dx \cdot dt$ vergrössern, mithin ist obiges

$$\delta dx = \frac{\delta w_x}{\delta x} \cdot dx \cdot dt; \text{ ebenso}$$

$$\delta dy = \frac{\delta w_y}{\delta y} \cdot dy \cdot dt \quad \text{und}$$

$$\delta dz = \frac{\delta w_z}{dz} \cdot dz \cdot dt.$$

Hiernach wird aus Gl. 7:

$$dx \cdot dy \cdot dz \left(\frac{\delta w_x}{\delta x} + \frac{\delta w_y}{\delta y} + \frac{\delta w_z}{\delta z}\right) = 0,$$

was ebenfalls zu Gl. 5 führt.

Gleichungen 2—7 sind die allgemeinen Gleichungen für die Bewegung reibungsloser tropfbar-flüssiger Körper, welche Leonhard Euler (geb. 1707 zu Basel, gest. 1783 zu Petersburg) im Jahre 1755 aufgestellt hat.

Es soll nun angenommen werden, dass der Beharrungszustand eingetreten sei, d. h., dass an jeder Stelle des Gefässes oder Raumes, in dem die Flüssigkeit sich bewegt, die Geschwindigkeit $w$ und der Druck $\mathfrak{p}$ von der Zeit unabhängig, dass also $w$ und $\mathfrak{p}$ nur Funktionen von $x$, $y$ und $z$ seien. Ebenso sollen auch die Beschleunigungen $X$, $Y$ und $Z$ nur Funktionen des Ortes sein.

Multiplicirt man Gl. 1 mit $w_x dt = dx$, so wird

$$w_x \cdot d w_x = X \cdot dx - \frac{g}{\gamma} \frac{\delta \mathfrak{p}}{\delta x} dx \quad \text{oder}$$

$$\frac{d(w_x^2)}{2} = X dx - \frac{g}{\gamma} \frac{\delta \mathfrak{p}}{\delta x} dx.$$

Ebenso gilt:

$$\frac{d(w_y^2)}{2} = Y dy - \frac{g}{\gamma} \frac{\delta \mathfrak{p}}{\delta y} dy \quad \text{und}$$

$$\frac{d(w_z^2)}{2} = Z dz - \frac{g}{\gamma} \frac{\delta \mathfrak{p}}{\delta z} dz.$$

Weil nun $\mathfrak{p}$ eine $f(x, y, z)$, so ist

$$\frac{\delta \mathfrak{p}}{\delta x} dx + \frac{\delta \mathfrak{p}}{\delta y} dy + \frac{\delta \mathfrak{p}}{\delta z} dz = d\mathfrak{p};$$

mithin ergiebt die Addition obiger drei Geichungen, weil

$$w^2 = w_x^2 + w_y^2 + z_z^2:$$

$$d\left(\frac{w^2}{2}\right) = X dx + Y dy + Z dz - \frac{g}{\gamma} d\mathfrak{p}.$$

Ist nun an einer Stelle mit den Koordinaten $x_0$, $y_0$, $z_0$ die Geschwindigkeit $w_0$, der Druck $\mathfrak{p}_0$, so ergiebt die Integration

$$8) \qquad \frac{w^2}{2} - \frac{w_0^2}{2} = \int_{x_0 y_0 z_0}^{x y z} (X dx + Y dy + Z dz) - \frac{g}{\gamma} (\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_0).$$

In dem besonderen Falle des Ruhezustandes wäre $w = w_0$, auch ginge der hydraulische Druck $\mathfrak{p}$ über in den hydrostatischen Druck $p$, und man hätte, in Übereinstimmung mit Gl. 2, S. 226:

$$0 = \int_{x_0 y_0 z_0}^{x y z} X dx + Y dy + Z dz - \frac{g}{\gamma} (p - p_0).$$

Hiernach kann man

$$\int_{x_0 y_0 z_0}^{x y z} X dx - Y dy + Z dz$$

vertauschen mit $\frac{g}{\gamma}(p - p_0)$, wenn $p$ und $p_0$ die hydrostatischen Drücke an den Stellen $x$, $y$, $z$ und $x_0$, $y_0$, $z_0$ sind, die den gegebenen Massenkräften im Ruhezustand entsprechen würden. Durch deren Einführung vereinfacht sich Gl. 8 zu

$$\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0{}^2}{2g} = \frac{p - p_0}{\gamma} - \frac{\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_0}{\gamma}.$$

Bezieht sich die Geschwindigkeit $w_0$ auf einen freien Wasserspiegel, so ist dort der hydraulische Druck $\mathfrak{p}_0$ gleich dem hydrostatischen Drucke $p_0$, mithin

$$\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0{}^2}{2g} = \frac{p - \mathfrak{p}}{\gamma} \quad \text{oder}$$

9) $$\frac{\mathfrak{p}}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} - \left(\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0{}^2}{2g}\right).$$

Wir haben hiermit das Gesetz der hydraulischen Druckhöhe (s. S. 260) auf anderem Wege erhalten.

Ist noch die Schwere die einzige wirkende Wasserkraft und richtet man die positive $y$-Achse lothrecht abwärts, so ist

$$p = p_0 + \gamma y \quad \text{also}$$

$$\frac{\mathfrak{p}}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + y - \left(\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0{}^2}{2g}\right).$$

Hat man also ein Gefäss, aus dem das Wasser durch eine um $h$ unter dem Wasserspiegel liegende Öffnung mit der Geschwindigkeit $w$ ausströmt und herrscht an der Mündung ein Gegendruck $p_m$, so ist auch der hydraulische Druck $\mathfrak{p}$ dort $= p_m$, und man erhält für $y = h$:

$$\frac{p_m}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + h - \left(\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0{}^2}{2g}\right)$$

oder die bekannte Gleichung (S. 259)

$$\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0{}^2}{2g} = h + \frac{p_0 - p_m}{\gamma}.$$

An die Stelle der Kontinuitätsgleichung (Gl. 5, S. 274) tritt hier

$$F_0 w_0 = F w.$$

## 2. Bewegung des Wassers in Röhren.

### a) Leitungswiderstand gerader cylindrischer Röhren.

Beim Durchfliessen einer längeren Röhre vom Querschnitt $F$ und der Länge $l$ zeigt sich ein besonderer Widerstand, ein besonderer Druckhöhenverlust oder eine Widerstandshöhe $z$. Dieser