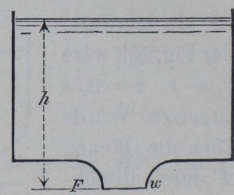
Ausweitung auf den Querschnitt F; somit wird, wenn F_0 sehr gross gegen F:

$$6) \qquad w = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \zeta_0 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2}}$$

Fig. 272.



oder mit $\zeta_0 = 0{,}085$, $\alpha = 0{,}64$:

$$w = \sqrt{\frac{2gh}{1 + 0{,}085 + 0{,}32}} = 0{,}84\sqrt{2gh},$$

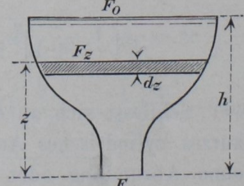
wogegen bei gut abgerundetem Ansatze (Fig. 272) $w = 0{,}96\sqrt{2gh}$ sein würde.

f) Ausfluss aus einer Bodenöffnung unter veränderlicher Druckhöhe.

Die Formel $w = \varphi\sqrt{2gh}$ gilt unter der Voraussetzung, dass die Bodenöffnung klein ist und dass genügender Zufluss erfolgt, um die Druckhöhe unveränderlich zu erhalten, sowie unter der Annahme, dass der Beharrungszustand bereits eingetreten sei. Findet der Zufluss nun nicht in richtiger Menge oder gar nicht statt, so ändert sich die Höhenlage des Wasserspiegels und damit die Druckhöhe. Annäherungsweise verwendet man für die nun veränderliche Ausflussgeschwindigkeit w dieselbe Gleichung wie für den Beharrungszustand, indem man mit veränderlicher Druckhöhe z einfach $w = \varphi\sqrt{2gz}$ setzt.

α) **Allmähliche Entleerung ohne Zufluss.** Zu Anfang, zur Zeit $t = 0$, sei F_0 der Wasserspiegel in der Höhe h über der Öffnung (Fig. 273); nach t Zeiteinheiten sei die Druckhöhe auf z vermindert, der Wasserspiegel von der Grösse F_z; dann ist die augenblickliche Ausflussgeschwindigkeit $w = \varphi\sqrt{2gz}$, und die Ausflussmenge während des nächsten Zeittheilchens dt beträgt

Fig. 273.



$$1) \qquad dQ = \mu F\sqrt{2gz}\cdot dt.$$

Um hieraus dt als Differentialfunktion von z finden zu können, bedenke man, dass in dem Zeittheilchen dt

der Wasserspiegel um dz sinkt, dass dieses dz aber mit negativem Zeichen zu schreiben ist, weil z mit wachsendem t abnimmt. Der sinkende Wasserspiegel beschreibt in der Zeit dt den Raum $-F_z \cdot dz$, und diese Grösse muss $= dQ$ sein. Aus

2) $$\mu F \sqrt{2gz}\, dt = -F_z dz \quad \text{wird dann}$$

3) $$dt = -\frac{F_z dz}{\mu F \sqrt{2gz}}.$$

Daher ist zur Veränderung der Druckhöhe von h auf z die Zeit erforderlich

4) $$t = -\frac{1}{\mu F \sqrt{2g}} \int_h^z \frac{F_z dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\mu F \sqrt{2g}} \int_z^h \frac{F_z dz}{\sqrt{z}},$$

weil den Zeitwerthen $t = 0$ und $t = t$ bezw. die Werthe $z = h$ und $z = z$ entsprechen.

Entleerung eines prismatischen Gefässes (Fig. 274). Mit $F_z = F_0$ wird

5) $$t = \frac{F_0}{\mu F \sqrt{2g}} \int_z^h z^{-1/2} dz = \frac{2F_0}{\mu F \sqrt{2g}} (\sqrt{h} - \sqrt{z}).$$

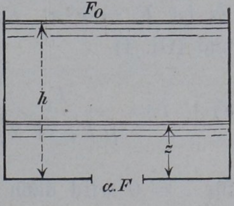
Für völlige Entleerung wird mit $z = 0$

6) $$t = \frac{2F_0 \sqrt{h}}{\mu F \sqrt{2g}}.$$

Multiplicirt man nun in Zähler und Nenner mit $\sqrt{h}$, so kann man im Zähler den ursprünglichen Gefässinhalt $V = F_0 h$, im Nenner die dem anfänglichen Zustand entsprechende sekundliche Ausflussmenge $Q_0 = \mu F \sqrt{2gh}$ einführen und erhält

7) $$t = 2\frac{V}{Q_0}.$$

Fig. 274.



Behielte die Druckhöhe den ursprünglichen Werth h, so würde der Ausfluss einer dem Gefässinhalte V gleichen Wassermenge die Zeit $V : Q_0$ erfordern; wegen der kleiner werdenden Druckhöhe erfordert die Entleerung das Doppelte jener Zeit.

Wasseruhr mit cylindrischem Gefässe. Ein Cylinder von $0{,}391^{\text{m}}$ Weite und 1^{m} Höhe habe im Boden eine kreisförmige Öffnung von $0{,}002^{\text{m}}$ Durchmesser mit gut abgerundetem kurzen Mundstücke, so dass $\alpha = 1$ und $\mu = \alpha\varphi = 0{,}96$ gesetzt werden kann. Die allmähliche Senkung des Wasserspiegels soll zur Zeitmessung benutzt werden. Gl. 5 wird in diesem Falle

$$t = \frac{2 \cdot 0{,}391^2}{0{,}96 \cdot 0{,}002^2 \sqrt{2g}} \left(\sqrt{h} - \sqrt{z}\right) = 18000 \left(\sqrt{h} - \sqrt{z}\right).$$

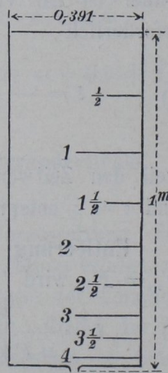
Ist die ursprüngliche Höhe des Wasserspiegels über der Mündung $h = 1^{\text{m}}$, so wird für eine beliebige Zeit t

$$\sqrt{z} = 1 - \frac{t}{18000}.$$

Hiernach kann man für Werthe von t, die je um $\frac{1}{2}$ Stunde abnehmen, leicht z berechnen.

$t = \frac{1}{2}$ Stunde	$= 1800$ s.	giebt	$z = 0{,}81^{\text{m}}$
$t = 1$ „	$= 3600$ s.	„	$z = 0{,}64$
$t = 1\frac{1}{2}$ „			$z = 0{,}49$
$t = 2$ „			$z = 0{,}36$
$t = 2\frac{1}{2}$ „			$z = 0{,}25$
$t = 3$ „			$z = 0{,}16$
$t = 3\frac{1}{2}$ „			$z = 0{,}09$
$t = 4$ „			$z = 0{,}04$

Fig. 275.



Für die letzten Theile der Entleerung trifft übrigens Gl. 5 nicht mehr zu, hat nur ideellen Werth, weil sich zuletzt um die Öffnung ein Strudel und in der Mitte der Öffnung ein von Wasser nicht erfüllter Trichter bildet, so dass der Ausfluss verlangsamt wird.

Entleerung eines trichterförmigen Gefässes. Das untere Ende des kegelförmigen Gefässes (Fig. 276) sei zu einer Öffnung erweitert, die in der Höhe der geometrischen Spitze des Kegels liegt. Es ist $F_z = x^2\pi$, $F_0 = r^2\pi$, $x : r = z : h$, also $F_z = F_0 \cdot z^2 : h^2$ und (Gl. 4)

$$8)\qquad t = \frac{F_0}{\mu F h^2 \sqrt{2g}} \int_z^h z^{3/2}\, dz = \frac{2}{5} \frac{F_0}{\mu F h^2 \sqrt{2g}} \left(h^{5/2} - z^{5/2}\right);$$

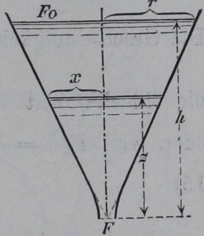
für $z = 0$ wird dann mit $V = \frac{1}{3} r^2 \pi h$ und $Q_0 = \mu F \sqrt{2gh}$:

$$9)\qquad t = \frac{6}{5} \frac{V}{Q_0} = 1{,}2 \frac{V}{Q_0}.$$

Für die Entleerung eines **halbkugelförmigen** oder **halbellipsoidischen** (bis zum grössten Querschnitte gefüllten) Beckens findet man

10) $$t = \frac{7}{5}\frac{V}{Q_0} = 1{,}4\frac{V}{Q_0},$$

Fig. 276.



für die Entleerung eines **paraboloidischen** Gefässes

11) $$t = \frac{4}{3}\frac{V}{Q_0} = 1{,}33\frac{V}{Q_0}.$$

Der Zahlenfaktor auf der rechten Seite dieser Gleichungen war $= 2$ für ein prismatisches Gefäss; er ist < 2 für jedes nach unten verengte Gefäss und umgekehrt; er nähert sich um so mehr der Einheit, je schneller sich das Gefäss nach unten verengt. Beim Beginne des Ausflusses sinkt nämlich der Wasserspiegel schnell; mit abnehmender Druckhöhe und Geschwindigkeit geht aber der weitere Ausfluss langsamer von statten, u. zw. um so mehr, wenn das Gefäss unten noch verhältnismässig weit ist, so dass noch ziemlich viel Wasser bei der geringen Geschwindigkeit ausfliessen muss.

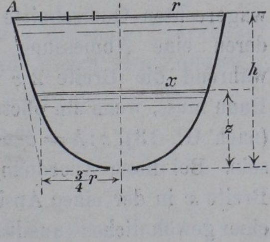
Gefässform für gleichmässige Senkung des Wasserspiegels. Die Geschwindigkeit, mit der der Wasserspiegel sinkt, ist

12) $$v = \frac{-dz}{dt} = \frac{\mu F \sqrt{2gz}}{F_z} \text{ (Gl. 3)};$$

soll diese sich nicht ändern, sondern gleich dem Anfangswerthe

$$\frac{\mu F \sqrt{2gh}}{F_0} = \frac{Q_0}{F_0}$$

Fig. 277.



bleiben, so muss

13) $\sqrt{z} : \sqrt{h} = F_z : F_0$ sein.

Soll die Innenfläche des Gefässes eine Umdrehungsfläche sein, so wird mit

$$F_z = x^2\pi \text{ und } x^2 : r^2 = \sqrt{z} : \sqrt{h},$$

14) $$x^4 : r^4 = z : h.$$

Dies ist die Gleichung der gesuchten Meridianlinie, die man eine Parabel vierten Grades nennt. Eine bei A (Fig. 277) an die

Meridianlinie gelegte Tangente hat gegen die lothrechte Achse ein Neigungsverhältnis $1/4\, r : h$, Der Inhalt des Gefässes ist

$$V = \pi \int_0^h x^2 dz = \frac{\pi r^2}{\sqrt{h}} \int_0^h \sqrt{z}\, dz = \frac{2}{3} F_0 h .$$

Die Geschwindigkeit des sinkenden Wasserspiegels beträgt $v = \frac{Q_0}{F_0}$, die (ideelle) Zeit der vollständigen Entleerung $t = h : v = \frac{F_0 h}{Q_0}$, oder, weil $F_0 h = 3/2\, V$:

15) $$t = \frac{3}{2} \frac{V}{Q_0} = 1{,}5 \frac{V}{Q_0}.$$

Ist die Meridianlinie der Innenwand eines Gefässes eine Parabel $n$ten Grades mit $x^n : r^n = z : h$, so ist das Neigungsverhältnis einer bei A angelegten Tangente gegen die Achse $1/n\, r : h$, der Inhalt des Gefässes

16) $$V = \frac{F_0 h}{\frac{2}{n} + 1},$$

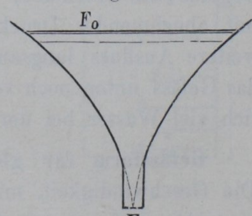
die (ideelle) Zeit der Entleerung

17) $$t = \frac{4 + 2n}{4 + n} \frac{V}{Q_0}.$$

$n = \frac{1}{2}$ (Fig. 278) giebt

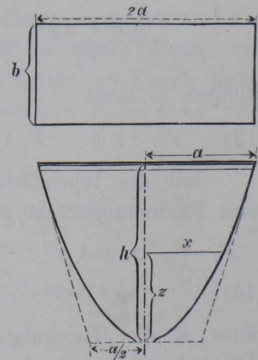
18) $$t = \frac{10}{9} \frac{V}{Q_0} = 1{,}1 \frac{V}{Q_0}.$$

Fig. 278.



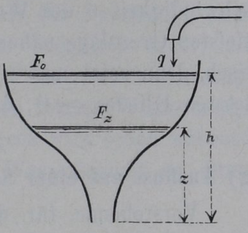
Will man ein Gefäss mit gleichförmig sinkendem Wasserspiegel als Wasseruhr benutzen und für die Anbringung der Theilung eine ebene Wand zur Verfügung haben, so kann man die Gefässform auch derartig anordnen, dass die wagerechten Querschnitte Rechtecke sind, deren eine Abmessung durchweg $= b$, während die Breite $2x$ veränderlich ist. Dann muss, wenn am oberen Rande $x = a$, (nach Gl. 13) $z : h = b^2 x^2 : b^2 a^2 = x^2 : a^2$ sein. Bei dieser Anordnung folgt die halbe Breite x in der einen Ansicht dem Gesetze einer gewöhnlichen (quadratischen) Parabel mit $V = 2/3\, F_0 h$ und $t = \frac{3}{2} \frac{V}{Q_0}$.

Fig. 269.



β) Ausfluss unter veränderlicher Druckhöhe bei Zufluss von oben. Erfolgt ein Zufluss von $q^{\mathrm{cbm}}/_{\mathrm{s.}}$ (Fig. 280), so besteht die Ausflussmenge $dQ = \mu F \sqrt{2gz}\,dt$ während der Zeit dt aus dem der Senkung des Wasserspiegels F_z um $-dz$ entsprechenden Wasserkörper $-F_z dz$ und dem Zuflusse $q\,dt$; sonach ist statt Gl. 2, S. 249, zu setzen:

Fig. 280.



$$\mu F \sqrt{2gz}\,dt = -F_z dz + q\,dt;$$

die Geschwindigkeit des sinkenden Wasserspiegels wird

$$19)\qquad v = \frac{-dz}{dt} = \frac{\mu F\sqrt{2gz} - q}{F_z},$$

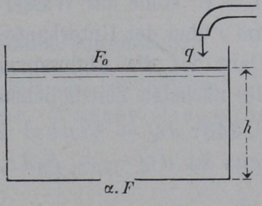
$$dt = -\frac{F_z dz}{\mu F\sqrt{2gz} - q} \quad \text{und}$$

$$20)\qquad t = -\int_h^z \frac{F_z dz}{\mu F\sqrt{2gz} - q} = \int_z^h \frac{F_z dz}{\mu F\sqrt{2gz} - q}.$$

Für ein prismatisches Gefäss mit $F_z = F_0$ (Fig. 281) wird

$$t = \frac{F_0}{\mu F\sqrt{2g}} \int_z^h \frac{dz}{\sqrt{z} - \dfrac{q}{\mu F\sqrt{2g}}}.$$

Fig. 281.



Behufs der Integration setze man

$$\frac{q}{\mu F\sqrt{2g}} = \sqrt{a},\quad \sqrt{z} = y,$$

dann ist wegen $q = \mu F\sqrt{2ga}$ die Grösse a diejenige Druckhöhe, bei welcher die sekundl. Ausflussmenge gerade gleich dem Zuflusse q sein würde; es ist ferner $z = y^2$, $dz = 2y\,dy$; man schreibe

$$2\int \frac{y\,dy}{y - \sqrt{a}} = 2\int \frac{y - \sqrt{a} + \sqrt{a}}{y - \sqrt{a}}\,dy =$$

$$2\int dy + 2\sqrt{a}\int \frac{dy}{y - \sqrt{a}} = 2y + 2\sqrt{a}\;\mathrm{l}(y - \sqrt{a})$$

$$= 2\sqrt{z} + 2\sqrt{a}\;\mathrm{l}(\sqrt{z} - \sqrt{a}), \quad \text{daher}$$

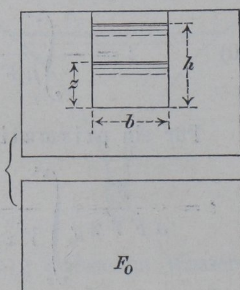
$$21)\qquad t = \frac{2\,F_0}{\mu\,F\sqrt{2\,g}}\left\{\sqrt{h} - \sqrt{z} + \sqrt{a}\ \mathrm{l}\frac{\sqrt{h}-\sqrt{a}}{\sqrt{z}-\sqrt{a}}\right\}.$$

In diesem Fall ist wegen des Zuflusses eine völlige Entleerung unmöglich, denn für $z = a$, d. h. $\mu F\sqrt{2gz} = q$ würde nach Gl. 19 die Geschwindigkeit v des Wasserspiegels Null. Der hierdurch bedingten tiefsten Grenzlage nähert sich aber der Wasserspiegel nur asymptotisch, denn setzt man $z = a$ in Gl. 21 ein, so wird der Nenner des letzten Gliedes $= 0$, d. h. $t = \infty$.

g) Ausfluss aus einer Seitenöffnung bei veränderlicher Druckhöhe.

Vorstehende, für den Ausfluss aus Bodenöffnungen entwickelte Gleichungen für theilweise Entleerung gelten annähernd auch für den Ausfluss aus niedrigen Seitenöffnungen, solange der Wasserspiegel oberhalb der Öffnung verbleibt.

Fig. 282.



Wir betrachten nun einen rechteckigen Kasten (Fig. 282) von der Grundfläche F_0 der sich, ohne Zufluss zu erhalten, durch einen rechteckigen Ausschnitt einer Seitenwand entleeren möge. Zu Anfang ($t = 0$) stehe das Wasser um h, zur Zeit t um z über der Unterkante des Ausschnittes. Dann ist die Abflussmenge dQ während des nächsten Zeittheilchens dt nach Gl. 9, S. 243: $dQ = {}^2/_3\,\mu b z\sqrt{2\,g\,z}\,dt$; andererseits ist $dQ = -F_0\,dz$, somit

$$dt = -\frac{3}{2}\frac{F_0}{\mu b\sqrt{2\,g}}\frac{dz}{z\sqrt{z}} \quad \text{und}$$

$$t = -\frac{3}{2}\frac{F_0}{\mu b\sqrt{2\,g}}\int_h^z \frac{dz}{z^{3/2}} = \frac{3\,F_0}{\mu b\sqrt{2\,g}}\left(\frac{1}{\sqrt{z}} - \frac{1}{\sqrt{h}}\right).$$

$z = 0$ verlangt $t = \infty$. Hiernach ist also eine Entleerung bis zur Unterkante des Einschnittes in endlicher Zeit nicht möglich, der Wasserspiegel nähert sich nur asymptotisch der Unterkante. Beim Ausflusse durch eine Bodenöffnung ergab sich für völlige Entleerung