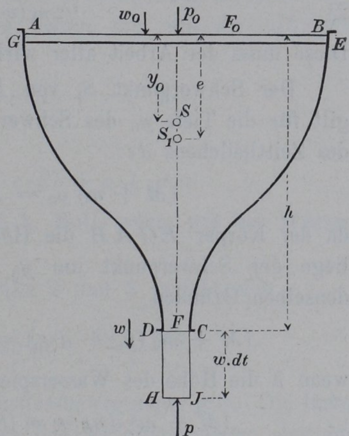
a) Ideelle Ausflussgeschwindigkeit und Ausflussmenge einer Bodenöffnung.

Das Wasser ergiesse sich (Fig. 252) durch eine in wagerechter Ebene liegende Öffnung $DC = F$. Das Gefäss habe von der Mitte des Wasserspiegels bis zur Mitte der Ausflussöffnung eine ziemlich bestimmt ausgesprochene Mittellinie und verenge sich nach der Öffnung hin allmählich. Dann wird man annehmen können, dass die durch die Öffnung F austretenden Wassertheilchen mit gleichen Geschwindigkeiten durch den Öffnungs-Querschnitt hindurchgehen. Es tritt während eines Zeittheilchens dt ein prismatischer Wasserkörper $F \cdot w \cdot dt$ unten aus. Dessen Masse sei das Massentheilchen

Fig. 252.



$$
1) \quad m = \frac{\gamma}{g} \cdot F \cdot w \cdot dt = \frac{\gamma}{g} \cdot F_0 \cdot w_0 \cdot dt.
$$

Das gleiche Massentheilchen muss nämlich oben verschwinden. Ist daher F_0 der Wasserspiegel, w_0 die Geschwindigkeit, mit der er sinkt, so muss offenbar $F_0 \cdot w_0 \cdot dt = F \cdot w \cdot dt$ sein.

Wir wollen nun den Satz der Arbeit (1. Theil, S 143) auf die im Gefässe befindliche Wassermasse, u. zw. für ein Zeittheilchen dt anwenden. Hinsichtlich des Zuflusses im Wasserspiegel werde angenommen, dass der Spiegel zuerst während der Zeit dt um $w_0 \cdot dt$, d. h. von AB nach EG sinkt und dass dann plötzlich eine Wasserschicht $ABEG$ zum Ersatze wieder aufgebracht werde. Der Wasserkörper $EGDC$, der zu Anfang und zu Ende des Zeittheilchens vorhanden war, habe die Masse M und wegen des Beharrungszustandes ein unveränderliches Arbeitsvermögen E. Die gesammte Wassermasse im Gefäss ist dann $M + m$, von denen m sich zu Anfang oben vorfindet, nach der Zeit dt aber unten. Dieselbe Stelle des Gefässes wird nach einander von verschiedenen Massentheilchen eingenommen, die an dieser Stelle stets die gleiche Geschwindigkeit haben, nur durch andere vertauscht sind.

Zu Ende des Zeittheilchens dt ist das gesammte Arbeitsvermögen der Wassermasse $M + m$ offenbar $E + \frac{1}{2} m w^2$, zu Anfang aber, wo die Masse m mit der Geschwindigkeit w_0 sich oben befand: $E + \frac{1}{2} m w_0^2$. Daher entsteht in dem Zeittheilchen dt eine Zunahme an Arbeitsvermögen

2) $$\frac{1}{2} m (w^2 - w_0^2).$$

Diese muss der Arbeit aller wirkenden Kräfte gleich sein.

Der Schwerpunkt S_1 von M liege um e unter AB. Dann gilt für die Tiefe y_0 des Schwerpunktes S von $M + m$ zu Anfang des Zeittheilchens dt:

$$(M + m) y_0 = Me + m \cdot \frac{1}{2} w_0 dt,$$

da der Körper $EGAB$ die Höhe $w_0 dt$ hat. Nach der Zeit dt liege der Schwerpunkt um $y_0 + dy_0$ unter AB, dann ist aus denselben Gründen

$$(M + m)(y_0 + dy_0) = Me + m (h + \frac{1}{2} w dt),$$

wenn h die Höhe des Wasserspiegels über der Öffnung. Daher wird

$$(M + m) dy_0 = m (h + \frac{1}{2} w dt - \frac{1}{2} w_0 dt)$$

und, wenn man rechts die unendlich kleinen Grössen gegen h vernachlässigt, $(M + m) dy_0 = mh$. Das Gewicht von $M + m$ verrichtet also in der Zeit dt die Arbeit (1. Theil, S. 139)

$$(M + m) g dy_0 = mgh.$$

Steht nun der Wasserspiegel unter einem Drucke p_0, die Öffnung unter dem Drucke p, so verrichten die Kräfte $p_0 F_0$ uud pF während der Zeit dt die Arbeiten

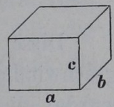
$$p_0 F_0 w_0 dt - p F w dt,$$

was wegen Gl. 1 zu schreiben ist $mg \frac{p_0 - p}{\gamma}$. Die Schwerkraft und die Drücke p_0 und p leisten daher während der Zeit dt die Arbeit

3) $$mg\left(h + \frac{p_0 - p}{\gamma}\right).$$

Die Druckkräfte des Gefässes gegen die Wassermasse verrichten keine Arbeit, da sie überall rechtwinklig zur Bewegungsrichtung stehen. Die inneren Kräfte im Wasser leisten aber ebenfalls keine Arbeit, denn sie sind reine Normalkräfte, die einem Gleiten keinen Widerstand entgegensetzen und nur bei einer Änderung des Rauminhaltes Arbeit verrichten könnten. Trennt man nämlich an einer Stelle, wo der Druck p' herrscht, ein kleines Parallelepiped $a \cdot b \cdot c$ heraus (Fig. 253), so verrichten die Druckkräfte, wenn die Seiten sich um da, db, dc vergrössern, die Arbeit

Fig. 253.



$$-p'(b \cdot c \cdot da + a \cdot c \cdot db + a \cdot b \cdot dc).$$

Weil aber $V = a \cdot b \cdot c$, so ist

$$dV = b \cdot c \cdot da + a \cdot c \cdot db + a \cdot b \cdot dc;$$

mithin die Arbeit $= -p'dV$, d. h. Null, wenn, wie bei Wasser $dV = 0$ ist.

Durch Gleichsetzung der Werthe 2 und 3 ergiebt sich

$$\text{I)} \qquad m\left(\frac{w^2}{2} - \frac{w_0^2}{2}\right) = mg\left(h + \frac{p_0 - p}{\gamma}\right);$$

welche als Grundgleichung aller Ausflussbewegungen gilt. Die linke Seite enthält die Zunahme, welche das Arbeitsvermögen der im Gefäss enthaltenen Wassermasse in der Zeit dt erleidet, die rechte Seite die gleichzeitig verrichtete Arbeit. Dabei bezeichnet m das Massentheilchen, welches während der Zeit dt unten ausströmt und gleichzeitig auch durch alle Querschnitte des Gefässes hindurchgeht. Später etwa zu berücksichtigende Widerstandsarbeiten oder Arbeits-Verluste können in Gl. I leicht angebracht werden; aus diesem besonderen Grunde ist der gemeinsame Faktor m noch nicht gestrichen worden.

Will man nun aber w berechnen, so bedenke man, dass nach Gl. 1.

$$F_0 w_0 = Fw, \quad \text{daher} \quad w_0 = w\frac{F}{F_0}.$$

Dann entsteht nach Gl. I

$$w^2\left(1 - \frac{F^2}{F_0^2}\right) = 2g\left(h + \frac{p_0 - p}{\gamma}\right),$$

4) oder $w = \sqrt{\dfrac{2g\left(h + \dfrac{p_0 - p}{\gamma}\right)}{1 - \dfrac{F^2}{F_0^2}}}.$

Diese Geschwindigkeit bezeichnen wir als ideelle Ausflussgeschwindigkeit, weil bei ihrer Berechnung die Reibung vernachlässigt wurde; die wirkliche Geschwindigkeit ist kleiner (s. S. 237). Es ist $p_0 - p$ der Druckunterschied zwischen Wasserspiegel und Öffnung, $\frac{p_0 - p}{\gamma}$ die entsprechende Wassersäule; diese tritt zu h hinzu und bildet mit ihr die gesammte wirksame Druckhöhe. In den weitaus meisten Fällen ist $p = p_0$. Da es sich nun nicht empfiehlt, wegen der selten vorkommenden Fälle ungleicher Drücke stets mit einer unbequemen Formel zu rechnen, wollen wir $\frac{p_0 - p}{\gamma}$ als mit in h steckend betrachten, so dass in Zukunft h die ganze wirksame Druckhöhe bedeuten soll. Dann wird einfacher

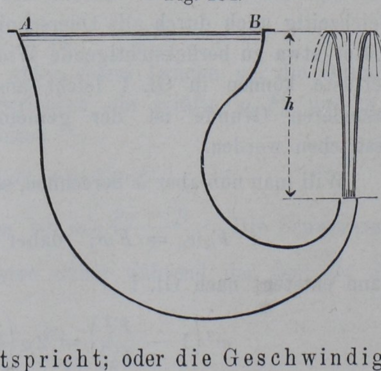
5) $$w = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \dfrac{F^2}{F_0^2}}}.$$

Da diese Formel nur eine ideelle ist und noch der Berichtigung bedarf, so kommt es bei ihrer Ausrechnung nicht auf grosse Genauigkeit an. Ist daher, wie in den meisten Fällen, die Öffnung F klein gegen den Wasserspiegel F_0, so kann in Gl. I w_0^2 gegen w^2 oder in Gl. 5 die Grösse $F^2 : F_0^2$ gegen 1 vernachlässigt und einfach

6) $$w = \sqrt{2gh}$$

gesetzt werden. Hiernach ist die ideelle Ausflussgeschwindigkeit gleich der Fallgeschwindigkeit, welche einer Fallhöhe gleich der wirksamen Druckhöhe entspricht; oder die Geschwindig-

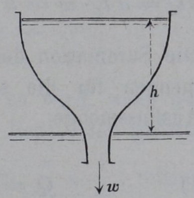
Fig. 254.



keitshöhe des Ausflusses ist gleich der wirksamen Druckhöhe h.

Die vorstehenden Formeln gelten auch noch für den Fall der Fig. 254, wo der Strahl lothrecht aufwärts austritt. Hierin liegt auch eine einfache Prüfung der Rechnung; denn der mit der Geschwindigkeit w austretende Strahl muss ohne Widerstände die Höhe $\frac{w^2}{2g} = h$ erreichen, d. h. zur Höhe des Wasserspiegels AB ansteigen. Reibung des Wassers im Gefäss und Luftwiderstand ausserhalb desselben vermindern die Steighöhe (s. S. 289).

Fig. 255.



Taucht das Gefäss nach Fig. 255 in ein Unterwasser ein, so ist die Eintauchungstiefe als eine Gegendruckhöhe aufzufassen, so dass als wirksame Druckhöhe nur der Höhenunterschied h der beiden Wasserspiegel gilt.

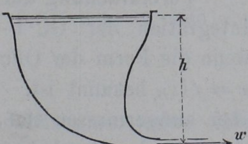
Da in jedem Zeittheilchen dt eine Raummenge $F \cdot w \cdot dt$ austritt, so ist die ideelle sekundliche Ausflussmenge in Raumeinheiten (cbm)

7) $$Q = F \cdot w = F\sqrt{2gh}.$$

b) Ideelle Ausflussmenge einer Seitenöffnung.

Befindet sich die Öffnung in lothrechter Ebene, so gelten die vorstehenden Gleichungen auch für diesen Fall, wenn die Öffnung so geringe Höhenerstreckung hat (Fig. 256), dass man für alle Punkte der Öffnung die gleiche Ausflussgeschwindigkeit w annehmen darf, so dass der ausfliessende Wasserkörper wiederum ein Prisma bildet. Es passt für diesen Fall die Entwickelung der Gl. I (S. 231) vollständig, wenn man dabei die Höhe h vom Wasserspiegel bis zum Schwerpunkte der Öffnung rechnet.

Fig. 256.



Hat die Öffnung aber eine grössere Höhenerstreckung, so ist die Annahme einer überall gleichen Geschwindigkeit nicht mehr