

Nun sind  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  die Projektionen von  $R$ ;  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  diejenigen von  $ds$  auf die 3 Achsen, mithin ist

$$R \cos \alpha = X; \quad R \cos \beta = Y; \quad R \cos \delta = Z;$$

$$ds \cos \alpha_1 = dx; \quad ds \cos \beta_1 = dy; \quad ds \cos \delta_1 = dz.$$

Daher wird

$$R ds \cos \vartheta = X dx + Y dy + Z dz.$$

Weil nun für Kurventheilchen innerhalb einer Niveaufläche die Gl. 3 gilt, so muss

$$5) \quad R ds \cos \vartheta = 0, \quad \text{d. h. } \vartheta = 90^\circ$$

sein. Oder:

Eine Niveaufläche steht in jedem ihrer Punkte rechtwinklig zu der für den betreffenden Punkt gültigen Massenkraft  $R \cdot m$ . Diese Sätze sind von Leonhard Euler (geb. zu Basel 1707, gest. zu Petersburg 1783) im Jahre 1755 entwickelt worden.

Aus vorstehendem Satze folgt unmittelbar, dass, wenn die Schwere die einzige Massenkraft ist, die Niveauflächen wagerechte Ebenen sind (S. 168). Da die freie Oberfläche einer Flüssigkeit ebenfalls eine Niveaufläche sein muss, so finden auch die Entwicklungen über die Gestalt der freien Oberfläche (S. 194 und 196) hier noch eine festere Begründung.

## B. Bewegung flüssiger Körper.

### I. Ausfluss des Wassers aus Gefässen.

Wird in der Seitenwand eines mit Wasser gefüllten Gefässes (Fig. 251) bei  $A$  eine kleine Öffnung frei gemacht, so entsteht ein ausfliessender Wasserstrahl. Die einzelnen Wassertheilchen führen eine parabolische Wurfbewegung aus (Theil 1, S. 49). Ist  $w$  die wagerechte Geschwindigkeit, mit der ein Wassertheilchen bei  $A$

das Gefäß verlässt,  $a$  die Höhe von  $A$  über dem Boden,  $t$  die Zeit der Bewegung von  $A$  bis  $B$ , so wird unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes  $a = \frac{1}{2}gt^2$ ;  $b = wt$ , mithin

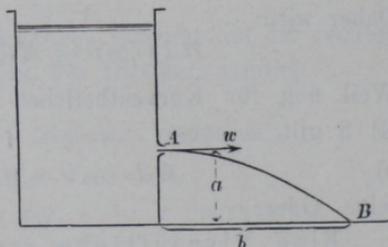
$$1) \quad \frac{b}{w} = \sqrt{\frac{2a}{g}},$$

so dass bei bekanntem  $a$  aus der Sprungweite  $b$  des Strahles die Ausflussgeschwindigkeit  $w$  berechnet werden kann.

War die Öffnung geschlossen, demnach alles im Gefässe befindliche Wasser in Ruhe, und macht man die Öffnung plötzlich frei, so wird die ganze im Gefässe befindliche Wassermasse in Beschleunigung gerathen; die Geschwindigkeit, mit der die einzelnen, auf einander folgenden Wassertropfen aus der Öffnung treten, ist nicht die gleiche, sondern eine allmählich wachsende; daher wächst auch die Sprungweite  $b$ . Jedoch lehrt die Erfahrung, dass die Veränderung von  $b$  und  $w$  sehr schnell erfolgt, dass sich schon nach sehr kurzer Zeit (meist schon nach 1 Sekunde) eine bestimmte Sprungweite  $b$  und somit eine bestimmte Geschwindigkeit  $w$  gebildet hat, die nun unverändert dieselbe bleibt, wenn der Wasserspiegel im Gefässe durch Zufluss stets auf gleicher Höhe erhalten wird. Gleichzeitig hiermit werden sich nun an allen Stellen des Gefässes dauernde Bewegungs- und Druckverhältnisse gebildet haben. Diesen Zustand nennt man **Beharrungszustand**. In allen nachfolgenden Untersuchungen nehmen wir an, dass der Beharrungszustand eingetreten sei und lassen die höchst verwickelten Verhältnisse vor dem Eintritte desselben, die meist noch nicht einmal 1 Sekunde währen, ausser Acht.

Zunächst wird das Wasser als eine vollkommen reibungslose Flüssigkeit angesehen, auch wird angenommen, dass das Gefäss an allen Stellen zwischen Wasserspiegel und Öffnung von Wasser erfüllt sei, keine leeren Räume enthalte. Unter welchen Bedingungen letztere vorkommen, wird später (S. 263) erörtert. Auch sollen plötzliche Querschnittsänderungen im Gefässe vorläufig noch nicht angenommen werden.

Fig. 251.





selbe Stelle des Gefässes wird nach einander von verschiedenen Massentheilchen eingenommen, die an dieser Stelle stets die gleiche Geschwindigkeit haben, nur durch andere vertauscht sind.

Zu Ende des Zeittheilchens  $dt$  ist das gesammte Arbeitsvermögen der Wassermasse  $M + m$  offenbar  $E + \frac{1}{2} m w^2$ , zu Anfang aber, wo die Masse  $m$  mit der Geschwindigkeit  $w_0$  sich oben befand:  $E + \frac{1}{2} m w_0^2$ . Daher entsteht in dem Zeittheilchen  $dt$  eine Zunahme an Arbeitsvermögen

$$2) \quad \frac{1}{2} m (w^2 - w_0^2).$$

Diese muss der Arbeit aller wirkenden Kräfte gleich sein.

Der Schwerpunkt  $S_1$  von  $M$  liege um  $e$  unter  $AB$ . Dann gilt für die Tiefe  $y_0$  des Schwerpunktes  $S$  von  $M + m$  zu Anfang des Zeittheilchens  $dt$ :

$$(M + m) y_0 = M e + m \cdot \frac{1}{2} w_0 dt,$$

da der Körper  $EGAB$  die Höhe  $w_0 dt$  hat. Nach der Zeit  $dt$  liege der Schwerpunkt um  $y_0 + dy_0$  unter  $AB$ , dann ist aus denselben Gründen

$$(M + m) (y_0 + dy_0) = M e + m (h + \frac{1}{2} w dt),$$

wenn  $h$  die Höhe des Wasserspiegels über der Öffnung. Daher wird

$$(M + m) dy_0 = m (h + \frac{1}{2} w dt - \frac{1}{2} w_0 dt)$$

und, wenn man rechts die unendlich kleinen Grössen gegen  $h$  vernachlässigt,  $(M + m) dy_0 = m h$ . Das Gewicht von  $M + m$  verrichtet also in der Zeit  $dt$  die Arbeit (1. Theil, S. 139)

$$(M + m) g dy_0 = m g h.$$

Steht nun der Wasserspiegel unter einem Drucke  $p_0$ , die Öffnung unter dem Drucke  $p$ , so verrichten die Kräfte  $p_0 F_0$  und  $p F$  während der Zeit  $dt$  die Arbeiten

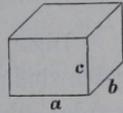
$$p_0 F_0 w_0 dt - p F w dt,$$

was wegen Gl. 1 zu schreiben ist  $m g \frac{p_0 - p}{\gamma}$ . Die Schwerkraft und die Drücke  $p_0$  und  $p$  leisten daher während der Zeit  $dt$  die Arbeit

$$3) \quad m g \left( h + \frac{p_0 - p}{\gamma} \right).$$

Die Druckkräfte des Gefässes gegen die Wassermasse verrichten keine Arbeit, da sie überall rechtwinklig zur Bewegungsrichtung stehen. Die inneren Kräfte im Wasser leisten aber ebenfalls keine Arbeit, denn sie sind reine Normalkräfte, die einem Gleiten keinen Widerstand entgegensetzen und nur bei einer Änderung des Rauminhaltes Arbeit verrichten könnten. Trennt man nämlich an einer Stelle, wo der Druck  $p'$  herrscht, ein kleines Parallelepiped  $a \cdot b \cdot c$  heraus (Fig. 253), so verrichten die Druckkräfte, wenn die Seiten sich um  $da$ ,  $db$ ,  $dc$  vergrössern, die Arbeit

Fig. 253.



$$- p' (b \cdot c \cdot da + a \cdot c \cdot db + a \cdot b \cdot dc).$$

Weil aber  $V = a \cdot b \cdot c$ , so ist

$$dV = b \cdot c \cdot da + a \cdot c \cdot db + a \cdot b \cdot dc;$$

mithin die Arbeit =  $- p' dV$ , d. h. Null, wenn, wie bei Wasser  $dV = 0$  ist.

Durch Gleichsetzung der Werthe 2 und 3 ergibt sich

$$I) \quad m \left( \frac{w^2}{2} - \frac{w_0^2}{2} \right) = mg \left( h + \frac{p_0 - p}{\gamma} \right);$$

welche als Grundgleichung aller Ausflussbewegungen gilt. Die linke Seite enthält die Zunahme, welche das Arbeitsvermögen der im Gefäss enthaltenen Wassermasse in der Zeit  $dt$  erleidet, die rechte Seite die gleichzeitig verrichtete Arbeit. Dabei bezeichnet  $m$  das Massentheilchen, welches während der Zeit  $dt$  unten ausströmt und gleichzeitig auch durch alle Querschnitte des Gefässes hindurchgeht. Später etwa zu berücksichtigende Widerstandsarbeiten oder Arbeitsverluste können in Gl. I leicht angebracht werden; aus diesem besonderen Grunde ist der gemeinsame Faktor  $m$  noch nicht gestrichen worden.

Will man nun aber  $w$  berechnen, so bedenke man, dass nach Gl. 1.

$$F_0 w_0 = F w, \quad \text{daher} \quad w_0 = w \frac{F}{F_0}.$$

Dann entsteht nach Gl. I

$$w^2 \left( 1 - \frac{F^2}{F_0^2} \right) = 2g \left( h + \frac{p_0 - p}{\gamma} \right),$$

$$4) \quad \text{oder } w = \sqrt{\frac{2g \left( h + \frac{p_0 - p}{\gamma} \right)}{1 - \frac{F^2}{F_0^2}}}.$$

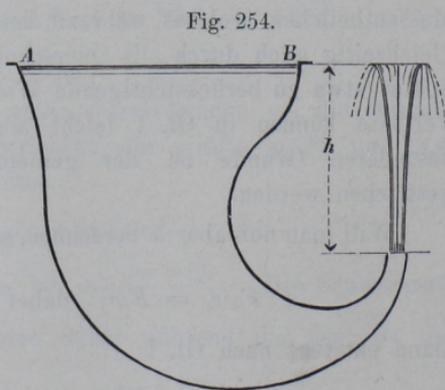
Diese Geschwindigkeit bezeichnen wir als ideale Ausflussgeschwindigkeit, weil bei ihrer Berechnung die Reibung vernachlässigt wurde; die wirkliche Geschwindigkeit ist kleiner (s. S. 237). Es ist  $p_0 - p$  der Druckunterschied zwischen Wasserspiegel und Öffnung,  $\frac{p_0 - p}{\gamma}$  die entsprechende Wassersäule; diese tritt zu  $h$  hinzu und bildet mit ihr die gesammte wirksame Druckhöhe. In den weitaus meisten Fällen ist  $p = p_0$ . Da es sich nun nicht empfiehlt, wegen der selten vorkommenden Fälle ungleicher Drücke stets mit einer unbequemen Formel zu rechnen, wollen wir  $\frac{p_0 - p}{\gamma}$  als mit in  $h$  steckend betrachten, so dass in Zukunft  $h$  die ganze wirksame Druckhöhe bedeuten soll. Dann wird einfacher

$$5) \quad w = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{F^2}{F_0^2}}}.$$

Da diese Formel nur eine ideale ist und noch der Berichtigung bedarf, so kommt es bei ihrer Ausrechnung nicht auf grosse Genauigkeit an. Ist daher, wie in den meisten Fällen, die Öffnung  $F$  klein gegen den Wasserspiegel  $F_0$ , so kann in Gl. I  $w_0^2$  gegen  $w^2$  oder in Gl. 5 die Grösse  $F^2 : F_0^2$  gegen 1 vernachlässigt und einfach

$$6) \quad w = \sqrt{2gh}$$

gesetzt werden. Hiernach ist die ideale Ausflussgeschwindigkeit gleich der Fallgeschwindigkeit, welche einer Fallhöhe gleich der wirksamen Druckhöhe entspricht; oder die Geschwindig-



keitshöhe des Ausflusses ist gleich der wirksamen Druckhöhe  $h$ .

Die vorstehenden Formeln gelten auch noch für den Fall der Fig. 254, wo der Strahl lothrecht aufwärts austritt. Hierin liegt auch eine einfache Prüfung der Rechnung; denn der mit der Geschwindigkeit  $w$  austretende Strahl muss ohne Widerstände die Höhe  $\frac{w^2}{2g} = h$  erreichen, d. h. zur Höhe des Wasserspiegels  $AB$  ansteigen. Reibung des Wassers im Gefäss und Luftwiderstand ausserhalb desselben vermindern die Steighöhe (s. S. 289).

Taucht das Gefäss nach Fig. 255 in ein Unterwasser ein, so ist die Eintauchungstiefe als eine Gegendruckhöhe aufzufassen, so dass als wirksame Druckhöhe nur der Höhenunterschied  $h$  der beiden Wasserspiegel gilt.

Da in jedem Zeittheilchen  $dt$  eine Raummenge  $F \cdot w \cdot dt$  austritt, so ist die ideelle sekundliche Ausflussmenge in Raumeinheiten ( $\text{cbm}$ )

$$7) \quad Q = F \cdot w = F \sqrt{2gh}.$$

### b) Ideelle Ausflussmenge einer Seitenöffnung.

Befindet sich die Öffnung in lothrechter Ebene, so gelten die vorstehenden Gleichungen auch für diesen Fall, wenn die Öffnung so geringe Höhenerstreckung hat (Fig. 256), dass man für alle Punkte der Öffnung die gleiche Ausflussgeschwindigkeit  $w$  annehmen darf, so dass der ausfliessende Wasserkörper wiederum ein Prisma bildet. Es passt für diesen Fall die Entwicklung der Gl. I (S. 231) vollständig, wenn man dabei die Höhe  $h$  vom Wasserspiegel bis zum Schwerpunkte der Öffnung rechnet.

Hat die Öffnung aber eine grössere Höhenerstreckung, so ist die Annahme einer überall gleichen Geschwindigkeit nicht mehr

Fig. 255.

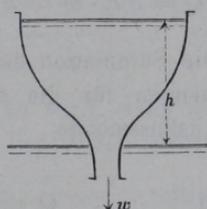
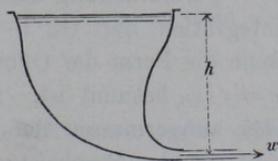


Fig. 256.



zulässig. Man denkt sich nun (Fig 257) aus der Öffnung  $F$  einen wagerechten Streifen von der Höhe  $dz$ , der Breite  $x$  und der Fläche  $dF = x \cdot dz$ , welcher um  $z$  unter dem Wasserspiegel liegt, herausgenommen, berechnet für diesen Streifen die Ausflussgeschwindigkeit  $w = \sqrt{2gz}$  und die sekundliche Ausflussmenge in Raumeinheiten (cbm)

$$dQ = dF \cdot w = dF \cdot \sqrt{2gz}.$$

Die Summation der Ausflussmengen für die sämtlichen Streifen giebt dann die gesammte Ausflussmenge

$$1) \quad Q = \sqrt{2g} \int_{z=h}^{z=H} x \sqrt{z} dz,$$

wenn Ober- und Unterkante der Öffnung um  $h$  bzw.  $H$  unter dem Wasserspiegel liegen. Die Geschwindigkeit  $w = \sqrt{2gz}$  lässt sich durch eine Parabel  $ABC$  mit lothrechter Achse und vom Parameter  $g$  darstellen. Die sekundliche Wassermenge ist offenbar ein prismatischer Wasserkörper, dessen Querschnitt die Ausflussöffnung, der aber aussen nicht rechtwinklig, sondern durch eine parabolische Cylinderfläche  $BC$ , rechtwinklig zur Bildebene, begrenzt ist.

**Vereinfachung der Berechnung.** Die Integration der Gl. 1 ist nur möglich, wenn die Form der Öffnung gegeben, also  $x = f(z)$ , bekannt ist. Liegt die Öffnung aber einigermaßen tief unter Wasser, so lässt sich das Parabelstück  $BC$  annähernd mit einer Geraden vertauschen, eine mittlere Geschwindigkeit, eine mittlere Druckhöhe  $z_0$ , nämlich diejenige des Schwerpunktes  $S$  der Öffnung einführen.

Fig. 257.

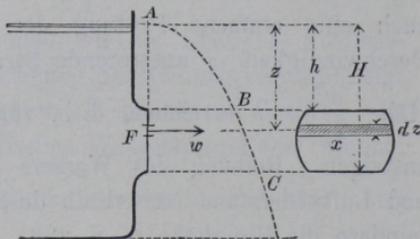
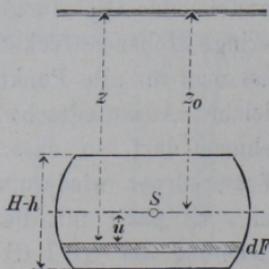


Fig. 258.



Liegt nämlich (Fig. 258) der Schwerpunkt  $S$  um  $z_0$  unter dem Wasserspiegel, so entspricht dem Streifen  $dF$  in der Tiefe  $u$  unter dem Schwerpunkte eine Druckhöhe  $z = z_0 + u$ . Dann ist dessen Ausflussmenge

$$\begin{aligned} dQ &= dF \sqrt{2gz} = dF \sqrt{2g(z_0 + u)} \\ &= dF \sqrt{2gz_0} \left(1 + \frac{u}{z_0}\right)^{1/2} \end{aligned}$$

oder, nach der binomischen Reihe

$$dQ = dF \sqrt{2gz_0} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{u}{z_0} - \frac{1}{8} \frac{u^2}{z_0^2} + \dots \right\}.$$

Ist nun die Höhe der Öffnung  $H - h \leq 1/2 z_0$ , so wird, wenn der Schwerpunkt ziemlich in der Mitte der Höhe liegt, der grösste Werth von  $u \leq 1/4 z_0$ , daher im Allgemeinen  $\frac{u}{z_0} \leq \frac{1}{4}$ , mithin

$$\frac{1}{8} \frac{u^2}{z_0^2} \leq \frac{1}{128},$$

also so klein, dass man das dritte Glied der Reihe vernachlässigen kann. Benutzt man daher von der binomischen Reihe nur die beiden ersten Glieder, so wird

$$\begin{aligned} dQ &= \sqrt{2gz_0} \left\{ dF + \frac{1}{2} \frac{dF \cdot u}{z_0} \right\} \quad \text{und} \\ Q &= \sqrt{2gz_0} \left\{ F + \frac{1}{2z_0} \int dF \cdot u \right\}. \end{aligned}$$

Es ist aber in Bezug auf den Schwerpunkt  $\int dF \cdot u = 0$ , also

$$2) \quad Q = F \sqrt{2gz_0}.$$

Diese von der Form der Öffnung ganz unabhängige, daher sehr bequeme Gleichung ist also anwendbar, wenn

$$2(H - h) \leq z_0,$$

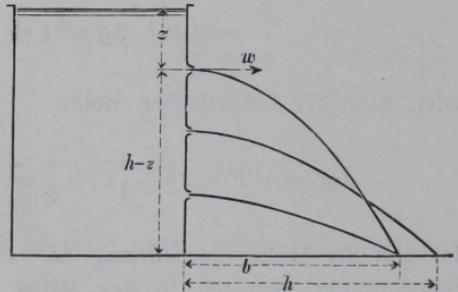
d. h. wenn die Tiefe des Schwerpunktes unter Wasser mindestens gleich der doppelten Höhe der Öffnung ist.

**Beispiel:** Ein prismatisches Gefäss stehe auf wagrechtem Boden und sei bis zu einer Höhe  $h$  mit Wasser gefüllt. In welcher Tiefe  $z$  unter Wasser muss eine kleine Öffnung angebracht werden, damit der Strahl möglichst grosse Sprungweite  $b$  habe? Je tiefer man die Öffnung legt, um so grösser wird  $w$ , um so kleiner aber die Höhenentwicklung der Parabel, und umgekehrt. Mit  $w = \sqrt{2gz}$  wird Gl. 1, S. 228:

$$b = 2 \sqrt{(h-z)z}.$$

Hierin sind  $z$  und  $h-z$  vertauschbar. Eine Öffnung in der Tiefe  $z = \frac{1}{4}h$  giebt also dieselbe Sprungweite wie eine solche in  $z = \frac{3}{4}h$ . Seinen grössten Werth erreicht aber  $b$  für  $z = \frac{1}{2}h$ . Denn  $(h-z)z$  ist der Inhalt eines Rechtecks vom Umfange  $2h$ . Ein Rechteck von gegebenem Umfange hat aber als Quadrat (von der Seite  $\frac{1}{2}h$ ) den grössten Inhalt, nämlich  $\frac{1}{4}h^2$ , mithin ergiebt  $z = \frac{1}{2}h$ ,  $b_{max} = h$ . Es entsteht dann die Wurfparabel grösster Wurfweite (1. Theil, S. 51), welche den Boden unter  $45^\circ$  schneidet.

Fig. 259.



**Rechteckige Öffnung.** Mit unveränderlichem  $x = b$  wird Gl. 1, S. 234:

$$3) \quad Q = b \sqrt{2g} \int_h^H z^{1/2} dz = \frac{2}{3} b \sqrt{2g} \{H^{3/2} - h^{3/2}\}.$$

Reicht die Öffnung bis zum Wasserspiegel, so hat man einen freien Überfall, und es wird mit  $h = 0$

$$4) \quad Q = \frac{2}{3} b \sqrt{2g} H^{3/2} = \frac{2}{3} b H \sqrt{2gH}.$$

**Beispiel:** Für die Schützenöffnung eines Gerinnes (Fig. 260) sei  $b = 1$  m,  $h = 1,4$  m,  $H = 2$  m, dann ist nach Gl. 3:

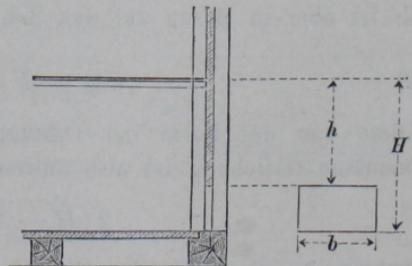
$$Q = \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 4,43 \{2,83 - 1,66\} \\ = 3,455 \text{ cbm/s.}$$

Es ist in diesem Falle  $2(H-h) = 1,2$  m,  $z_0 = 1,7$  m, und die Annäherungsformel Gl. 2, S. 235 liefert:

$$Q = 0,6 \cdot 4,43 \cdot \sqrt{1,7} = 3,466 \text{ cbm/s.}$$

der Unterschied beider Rechnungen ist nur unerheblich.

Fig. 260.



Sogar beim freien Überfalle, wo die Anwendung der Gl. 2 gar keine Berechtigung mehr hat, liefert letztere

$$Q = bH\sqrt{2g \cdot 0,5H} = 0,707 bH\sqrt{2gH}, \text{ w\u00e4hrend Gleichung 4 ergibt:} \\ 0,667 bH\sqrt{2gH}.$$

Also auch in diesem \u00e4ussersten Falle betr\u00e4gt der Unterschied nur 6%.

**Trapezf\u00f6rmige \u00d6ffnung.** Nach Fig. 261 ist

$$\frac{x-b}{a-b} = \frac{z-h}{H-h}, \text{ oder}$$

$$x = b + \frac{a-b}{H-h}(z-h),$$

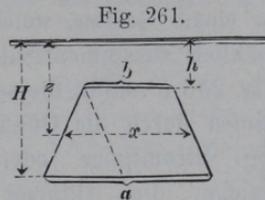


Fig. 261.

daher nach Gl. 1, S. 234

$$Q = \sqrt{2g} \int_h^H \left\{ b + \frac{a-b}{H-h}(z-h) \right\} z^{1/2} dz$$

$$= \sqrt{2g} \left\{ \frac{2}{3} \frac{bH - ah}{H-h} (H^{3/2} - h^{3/2}) + \frac{2}{5} \frac{a-b}{H-h} (H^{5/2} - h^{5/2}) \right\} \text{ oder}$$

$$5) Q = \frac{2\sqrt{2g}}{H-h} \left\{ \frac{bH - ah}{3} (H^{3/2} - h^{3/2}) + \frac{a-b}{5} (H^{5/2} - h^{5/2}) \right\}.$$

Diese Formel ist so verwickelt, dass man meist Gl. 2, S. 235 vorziehen wird.

### e) Wirkliche Ausflussgeschwindigkeit und Ausflussmenge.

**Geschwindigkeits-Ziffer** (Geschwindigkeits-Koeffizient). Die bisherigen Formeln wurden entwickelt unter der Annahme reibungsloser Fl\u00fcssigkeit. F\u00fcr eine kleine \u00d6ffnung ergab sich

$$w = \sqrt{2gh}.$$

Die wirkliche Ausflussgeschwindigkeit ist wegen der Reibungswiderst\u00e4nde, die im Gef\u00e4ss auftreten, kleiner und wird erhalten, indem man den ideellen Werth noch mit einer Berichtigungs-ziffer  $\varphi$  multiplicirt. Dann ist in Wirklichkeit

$$1) w = \varphi \sqrt{2gh}.$$

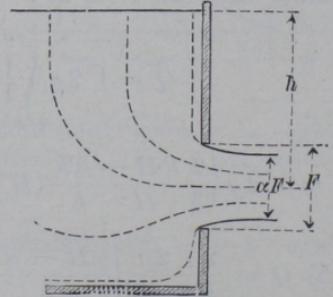
Die Geschwindigkeitsziffer  $\varphi$  weicht nur wenig von der Einheit ab, beträgt bei kleiner Druckhöhe  $\varphi = 0,96$ , wächst aber nach Versuchen von Weisbach (Freiberg i. S.) mit zunehmender Druckhöhe bis auf 0,99 an. Wir werden in den weiteren Beispielen stets mit

$$2) \quad \varphi = 0,96 \quad \text{rechnen.}$$

**Einschnürung (Kontraktion). Ausflussziffer (Ausflusskoeffizient).**

In einem Gefässe, welches sich nach der Ausflussöffnung hin allmählich zusammenzieht, wie Fig. 252 (S. 229), Fig. 254 (S. 232), Fig. 256 (S. 233), fließen die einzelnen Wassertheilchen in parallelen Linien durch die Öffnung und bilden sog. Stromlinien oder Wasserfäden, welche die Öffnung rechtwinklig schneiden, so dass die sekundliche Ausflussmenge  $Q = F \cdot w$  als ein Prisma vom Querschnitte  $F$  angesehen werden kann. Befindet sich aber die Öffnung in einer ebenen Wand (Fig. 262), so fließen die Wassertheilchen in ganz verschiedenen Richtungen der Öffnung zu, wie in der Figur durch Stromlinien angedeutet ist. Diejenigen Theilchen, welche an der Wand entlang strömen, können ihre Bewegungsrichtung nicht plötzlich um  $90^\circ$  ändern (weil jeder Knick in der Bahnlinie eine unendliche grosse Normalbeschleunigung, d. h. unendlich grosse Kräfte erfordern würde), sondern gehen in gekrümmten Bahnlinien um die Innenkante der Öffnung herum. Erst ausserhalb des Gefässes in einer gewissen Entfernung von dem Öffnungs-Querschnitte  $F$  haben sich die Wasserfäden wieder parallel gelagert und bilden einen Strahlquerschnitt  $\alpha F$  von der Geschwindigkeit  $w = \varphi \sqrt{2gh}$ , dessen sek. Wassermenge zu  $Q = \alpha F w = \alpha \varphi F \sqrt{2gh}$  berechnet werden kann.

Fig. 262.

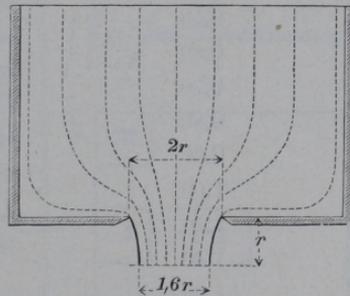


Diese Erscheinung heisst die **Einschnürung (Kontraktion)** des Strahles, und die Grösse  $\alpha$ , mit der die Öffnung  $F$  multiplicirt werden muss, um den Querschnitt  $\alpha F$  des zusammengezogenen Strahles zu liefern, heisst **Einschnürungs-Ziffer (Kontraktions-Koeffizient)**. Da aber in der letzten Gleichung für  $Q$  das Produkt

$\alpha\varphi$  zweier Berichtigungsziffern vorkommt, so kann man dieses Produkt zu einer Grösse  $\mu = \alpha\varphi$  vereinigen. Da nun die ideelle Ausflussmenge  $F\sqrt{2gh}$  (S. 233) noch mit  $\mu$  multiplicirt werden muss, um die wirkliche zu liefern, so nennt man  $\mu$  die **Ausfluss-Ziffer** (Ausfluss-Koeffizient).

Während die Geschwindigkeitsziffer nur wenig schwankt, auch nur wenig von der Einheit abweicht, ist die Einschnürungsziffer  $\alpha$  und somit auch die Ausflussziffer  $\mu = \alpha\varphi$  von vielen Umständen abhängig, z. B. auch von der Dicke und Beschaffenheit der Wandung, in welche die Öffnung eingeschnitten ist. Bestimmte Erscheinungen treten auf, wenn die Öffnung sich in dünner Wand befindet, oder wenn der Einfluss des Öffnungsrandes durch Zuschärfung nach Fig. 263 nahezu beseitigt ist. Befindet sich dann ausserdem die Öffnung verhältnismässig weit von anschliessenden Wänden entfernt, so kann man für diesen Grundfall der Einschnürung ziemlich bestimmt

Fig. 263.



$$\alpha = 0,64 \text{ und } \mu = 0,96 \cdot 0,64 = 0,61$$

setzen. Ist die Öffnung ein Kreis vom Halbmesser  $r$ , so erfolgt eine Einschnürung auf  $0,8r$ , u. zw. befindet sich dieselbe im Abstände  $r$  von der Mündung.

Über die **Ausflussziffern für rechteckige Seitenöffnungen** in dünner Wand haben die französischen Artillerie-Offiziere Poncelet und Lesbros 1828—1834 Versuche angestellt. Dabei wurde die Höhe des Wasserspiegels in einer solchen Entfernung von der Wand gemessen, wo der Spiegel noch wagerecht war, während er nach der Wand hin sich etwas senkte. Es kommt dabei wesentlich auf die Grösse der kleinsten Seite  $b$  der Öffnung an, gleichgültig, ob dieselbe lothrecht oder wagerecht gerichtet ist. Einige Ergebnisse der Versuche enthält folgende Tabelle.

Ausflussziffer  $\mu$  für rechtwinklige Seitenöffnungen in dünner Wand.

Höhe $h$ des Wasserspiegels über der Oberkante der Öffnung	Kleinste Seite der Öffnung		
	0,05 m	0,1 m	0,2 m
0,10	0,631	0,615	0,600
0,15	0,631	0,616	0,600
0,20	0,630	0,617	0,601
0,30	0,630	0,618	0,602
0,40	0,629	0,618	0,603
0,50	0,628	0,617	0,604
0,60	0,628	0,617	0,604
0,70	0,627	0,617	0,605
0,80	0,627	0,616	0,605
0,90	0,626	0,616	0,605
1,00	0,626	0,615	0,605
1,20	0,624	0,614	0,604
1,40	0,621	0,612	0,603
1,60	0,618	0,611	0,602
1,80	0,615	0,609	0,602
2,00	0,613	0,607	0,601
3,00	0,606	0,603	0,601

Mit diesen Ziffern ist  $\frac{2}{3} b \sqrt{2g} \{H^{3/2} - h^{3/2}\}$  (Gl. 3, S. 236) zu multipliciren. Ausführlichere Angaben findet man in Rühlmann's Hydromechanik.

**Schützenöffnungen.** Befindet sich die Öffnung nicht in dünner Wand, wird sie vielmehr, wie bei Schützen, durch rechtwinklig zugeschnittene Bretter gebildet, so kann man, wenn die Unterkante der Öffnung hoch über der Sohle liegt,  $\mu = 0,6$ , wenn sie mit dieser in gleicher Höhe liegt (Fig. 260),  $\mu = 0,68$  im Mittel setzen. Für das Beispiel auf S. 236 würde also mit  $\mu = 0,68$  die wirkliche sekundl. Ausflussmenge werden  $Q = 0,68 \cdot 3,455 = 2,35 \text{ cbm}$ .

**Unvollständige Einschnürung** (partielle Kontraktion) findet statt, wenn die Öffnung an einem Theil ihres Umfanges von Wänden eingeschlossen wird, so dass an diesen Stellen ein seitliches Zuströmen von Wasserfäden nicht vorkommt, also die Ursache

der Einschnürung theilweise fortfällt. Der Strahl bekommt in Folge dieser Ungleichmässigkeit eine abweichende Richtung, und die Ausflussmenge, also auch die Ausflussziffer wird grösser. In Figur 264 findet der Zufluss in der Querrichtung von der rechten Seite statt, nicht aber von der linken Seite. Ist  $u$  der ganze Umfang der Öffnung,  $m \cdot u$  der Theil des Umfanges, an welchem die Öffnung eingefasst ist, so ist nach Versuchen von Bidone (1831) und Weisbach die für solche Fälle anzuwendende Ausflussziffer  $\mu_p$  von der Grösse  $m$  abhängig. Ist  $\mu_0$  die Ausflussziffer unter sonst gleichen Verhältnissen für den Grundfall (dass die Wände nach allen Richtungen weit genug entfernt sind), d. h. für eine Öffnung I im Grundrisse (Fig. 264), so gilt

für rechteckige Öffnungen

$$3) \quad \mu_{pr} = \mu_0 (1 + 0,155 m),$$

für kreisförmige Öffnungen

$$4) \quad \mu_{pk} = \mu_0 (1 + 0,128 m).$$

Für die Öffnung II würde  $m = 1/4$ , daher

$$\mu_p = 1,039 \mu_0;$$

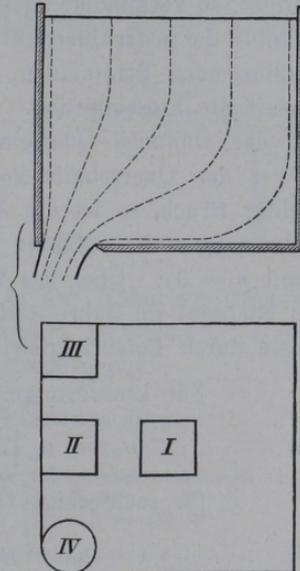
für die Öffnung III mit  $m = 1/2$

$$\mu_p = 1,078 \mu_0;$$

für die Öffnung IV mit  $m = 1/4$

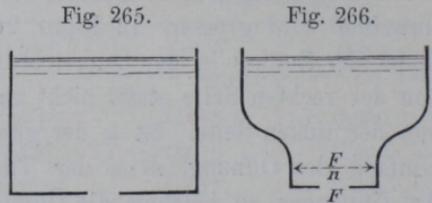
$$\mu_p = 1,032 \mu_0.$$

Fig. 264.



**Unvollkommene Einschnürung.** Auch wenn die Wandungen nicht ganz an den Rand der Öffnung herantreten, sondern sich von allen Seiten der Öffnung nur nähern, kann eine Verminderung der Einschnürung entstehen. Für den Grundfall war vorausgesetzt, dass die Öffnung von allen Wänden verhältnismässig weit entfernt sei, so dass binnenseits der Öffnung sich ein grosser Querschnitt,

daher eine geringe Geschwindigkeit fand (Fig. 265). Verengt sich aber das Gefäß nach der Mündung hin, so dass das Wasser der Öffnung mit nicht ganz geringer Geschwindigkeit zu-



strömt, so vermindert sich der Einfluss der in der Querrichtung zufließenden Stromfäden und damit die Einschnürung. Ist  $F$  der Öffnungs-Querschnitt,  $F/n$  der Querschnitt vor der Öffnung (Fig. 266), worin  $n$  ein echter Bruch, so ist die Ausflussziffer  $\mu_u$  bei unvollkommener Einschnürung zurückzuführen auf  $\mu_0$  in dem entsprechenden Grundfalle (mit  $n = 0$ ). Über das Verhältnis  $\mu_u : \mu_0$  hat Weisbach (Freiberg in Sachsen) im Jahre 1842 Versuche angestellt und deren Ergebnisse durch Potentialgleichungen dargestellt.

Für kreisförmige Öffnung ist nach Weisbach

$$5) \quad \mu_{uk} = \mu_0 \left[ 1 + 0,04564 (14,821^n - 1) \right],$$

für rechteckige Öffnung

$$6) \quad \mu_{ur} = \mu_0 \left[ 1 + 0,076 (9^n - 1) \right].$$

Dafür kann man annähernd setzen

bei kreisförmiger Öffnung

$$7) \quad \mu_{uk} = \mu_0 (1 + 0,126 n + 0,06 n^2 + 0,427 n^3)$$

mit den Ergebnissen:

$$n = 0,1 \quad 0,2 \quad 0,3 \quad 0,4 \quad 0,5 \quad 0,6 \quad 0,7 \quad 0,8 \quad 0,9 \quad 1,0$$

$$\frac{\mu_{uk}}{\mu_0} = 1,014 \quad 1,031 \quad 1,055 \quad 1,087 \quad 1,131 \quad 1,189 \quad 1,264 \quad 1,358 \quad 1,473 \quad 1,613;$$

bei rechteckiger Öffnung

$$8) \quad \mu_{ur} = \mu_0 (1 + 0,175 n + 0,06 n^2 + 0,373 n^3)$$

mit den Ergebnissen:

$$n = 0,1 \quad 0,2 \quad 0,3 \quad 0,4 \quad 0,5 \quad 0,6 \quad 0,7 \quad 0,8 \quad 0,9 \quad 1,0$$

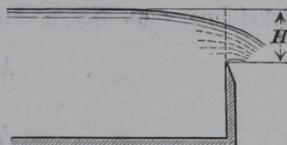
$$\frac{\mu_{ur}}{\mu_0} = 1,019 \quad 1,040 \quad 1,068 \quad 1,104 \quad 1,149 \quad 1,207 \quad 1,279 \quad 1,369 \quad 1,478 \quad 1,608.$$

**Ausflussziffer  $\mu$  für rechteckige Überfälle.** Aus Gl. 4, S. 236 wird

$$9) \quad Q = \frac{2}{3} \mu b H \sqrt{2gH}.$$

Darin bedeutet  $b$  die Breite des Überfalles,  $H$  die Höhe des Wasserspiegels über der Unterkante der Öffnung. Für die Ziffer  $\mu$  gilt nach Versuchen der französischen Artillerie-Offiziere Poncelet und Lesbros folgende Tabelle, wobei zu bemerken ist, dass die Öffnung sich in dünner lothrechter Wand befand und dass die Höhe  $H$  in mindestens 1 m Abstand von der Öffnung gemessen wurde. Der Spiegel senkt sich nämlich (Fig. 267) in der Nähe der Öffnung; in Folge dessen wird der Strahlquerschnitt vermindert. Dieser Einfluss findet in der Zahl  $\mu$  seine Berücksichtigung.

Fig. 267.



**Ausflussziffer  $\mu$  für rechteckige Überfälle in dünner lothrechter Wand.**

$H$	$b = 0,2 \text{ m}$	$b = 0,6 \text{ m}$
0,02 m	0,626	
0,04	0,611	
0,06	0,602	0,618
0,08	0,596	
0,10	0,593	0,606
0,15	0,590	0,600
0,20	0,585	0,593
0,30		0,587
0,40		0,587
0,50		0,587
0,60		0,585

**d) Widerstandshöhen und Widerstandsziffern.**

Auf S. 237 wurde die wirkliche Ausflussgeschwindigkeit  $w = \varphi \sqrt{2gh}$  aus der ideellen  $= \sqrt{2gh}$  abgeleitet durch Multiplikation der letzteren mit einer Geschwindigkeitsziffer  $\varphi < 1$ .

Mit Rücksicht darauf aber, dass bei der ideellen Ausflussbewegung die wirksame Druckhöhe  $h$  sich einfach in eine gleiche Geschwindigkeitshöhe  $\frac{w^2}{2g}$  umsetzte, kann man die Beziehung zwischen den beiden Geschwindigkeiten auch so auffassen, als ob ein gewisser Theil der wirksamen Druckhöhe  $h$  durch Reibung aufgezehrt und für die Erzeugung von Geschwindigkeit unbrauchbar gemacht würde. Bezeichnet man diesen Theil der wirksamen Druckhöhe mit  $z_0$ , so muss

$$h - z_0 = \frac{w^2}{2g} \quad \text{oder}$$

$$h = \frac{w^2}{2g} + z_0 \quad \text{sein.}$$

Da nun der Erfahrung zufolge

$$w = \varphi \sqrt{2gh}, \quad \text{also } h = \frac{1}{\varphi^2} \frac{w^2}{2g} \text{ ist, so wird}$$

$$z_0 = \frac{w^2}{2g} \left( \frac{1}{\varphi^2} - 1 \right).$$

Man setzt nun

$$1) \quad \frac{1}{\varphi^2} - 1 = \zeta_0$$

und bezeichnet  $\zeta_0$  als **Widerstandsziffer für die Reibung im Gefässe**. Mit  $\varphi = 0,96$  wird

$$2) \quad \zeta_0 = 0,085.$$

Der durch Reibung verursachte Druckhöhen-Verlust

$$3) \quad z_0 = \zeta_0 \frac{w^2}{2g}$$

heisst die **Widerstandshöhe in Folge der Reibung im Gefässe**. Mit Benutzung dieser Hilfsgrösse kann man nun schreiben

$$h = \frac{w^2}{2g} + \zeta_0 \frac{w^2}{2g},$$

indem man die gesammte wirksame Druckhöhe  $h$  zerlegt in denjenigen Theil  $\frac{w^2}{2g}$ , der zur Erzeugung der Geschwindigkeit  $w$  zur Verwerthung kommt, und die Widerstandshöhe der Gefässreibung. Daraus wird dann

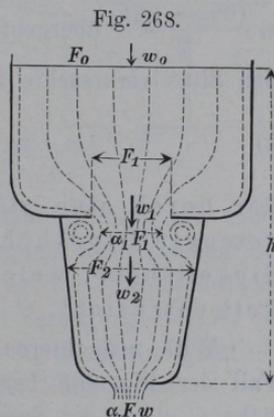
$$4) \quad w = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \zeta_0}},$$

was mit  $w = \varphi \sqrt{2gh}$  gleichbedeutend ist.

Die Benutzung der Widerstandshöhen wird besonders nützlich, wenn man mit einer verwickelteren Wasserbewegung zu thun hat, bei der verschiedene Druckhöhenverluste in Frage kommen.

e) Druckhöhenverlust in Folge plötzlicher Querschnittsänderung.

a) **Plötzliche Erweiterung.** In einem Gefässe sei (Fig. 268) im Wasserspiegel der Querschnitt  $F_0$ , die Geschwindigkeit  $w_0$ ; in einer Zwischenwand befinde sich eine Öffnung  $F_1$ , unterhalb derselben finde eine Einschnürung auf  $\alpha_1 F_1$  mit einer Geschwindigkeit  $w_1$  statt, dann folge eine plötzliche Erweiterung des Gefässes auf  $F_2$  mit einer (kleineren) Geschwindigkeit  $w_2$ ; die Ausflussöffnung habe die Grösse  $F$ , der unterhalb derselben eingeschnürte Strahl den Querschnitt  $\alpha F$  mit der Geschwindigkeit  $w$ . An den Seiten des eingeschnürten Strahles  $\alpha_1 F_1$  im Innern befindet sich Wasser, welches nur Wirbelbewegungen ausführt, an der regelmässigen strömenden Bewegung aber nicht theilnimmt. Da während einer Zeiteinheit durch alle Querschnitte die gleiche Wassermenge hindurchströmt, so muss



$$1) \quad F_0 w_0 = \alpha_1 F_1 w_1 = F_2 w_2 = \alpha F w$$

sein und da  $\alpha_1 F_1 < F_2$ , so muss  $w_1 > w_2$  sein. Es trifft somit unterhalb der Zwischenwand das mit der Geschwindigkeit  $w_1$  strömende Wasser auf eine mit geringerer Geschwindigkeit  $w_2$  vorausgehende Wassermasse, womit ein Verlust an Arbeitsvermögen durch Stoss verbunden ist.

In der Hauptgleichung I, S. 231, war  $m g$  das während eines Zeittheilchens  $dt$  durch irgend einen (d. h. jeden) Querschnitt strömende Wassergewicht,  $m g h$  die während derselben Zeit von dem Gewichte der gesammten im Gefässe befindlichen Wassermasse verrichtete Arbeit. Im Anschluss an die betreffende Entwicklung (S. 230) soll nun der während der Zeit  $dt$  durch Stoss erfolgende Verlust an Arbeitsvermögen berechnet werden. Man stellt sich die

Sache so vor, als ob die Masse  $m$  mit der Geschwindigkeit  $w_1$  auf eine mit der Geschwindigkeit  $w_2$  vorausgehende Masse  $M_2$  stiesse; da nun Wasser nahezu unzusammendrückbar ist, so beträgt der Verlust an Arbeitsvermögen während der Zeit  $dt$  nach Gl. 11, S. 130 mit  $k = 0$

$$\frac{m \cdot M_2}{m + M_2} \frac{(w_1 - w_2)^2}{2},$$

was mit Rücksicht darauf, das  $m$  gegen  $M_2$  unendlich klein ist, in  $m \frac{(w_1 - w_2)^2}{2}$  übergeht; setzt man dies  $= mgz_1$ , so ist  $z_1$  der durch den Stoss verursachte Druckhöhenverlust, u. zw.

$$2) \quad z_1 = \frac{(w_1 - w_2)^2}{2g}, \quad \text{d. h.}$$

der durch eine plötzliche Querschnittsvergrößerung erzeugte Druckhöhenverlust ist gleich der Geschwindigkeitshöhe, welche der relativen Stossgeschwindigkeit entspricht.

Will man hiernach die Ausflussgeschwindigkeit  $w$  für den Fall der Fig. 268 berechnen, so setzt man die wirksame Druckhöhe  $h$  gleich der Summe der einzelnen Theile, in welche sie sich zerlegt. Will man die Geschwindigkeit  $w_0$  im Wasserspiegel auch berücksichtigen, so ist  $\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g}$  der zur Erzeugung von Geschwindigkeit verwertete Theil;  $\zeta_0 \frac{w^2}{2g}$  wird durch Reibung,  $\frac{(w_1 - w_2)^2}{2g}$  durch Stoss aufgezehrt. Also ist

$$3) \quad h = \frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} + \zeta_0 \frac{w^2}{2g} + \frac{(w_1 - w_2)^2}{2g}.$$

Nach Gl. 1 ist nun  $w_0 = w \frac{\alpha F}{F_0}$ ,  $w_1 = w \frac{\alpha F}{\alpha_1 F_1}$ ,  $w_2 = w \frac{\alpha F}{F_2}$ ,

mithin  $h = \frac{w^2}{2g} \left\{ 1 - \frac{\alpha^2 F^2}{F_0^2} + \zeta_0 + \alpha^2 F^2 \left( \frac{1}{\alpha_1 F_1} - \frac{1}{F_2} \right)^2 \right\}$ , oder

$$4) \quad w = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{\alpha^2 F^2}{F_0^2} + \zeta_0 + \alpha^2 F^2 \left( \frac{1}{\alpha_1 F_1} - \frac{1}{F_2} \right)^2}}.$$

Befinden sich die Öffnungen  $F_1$  und  $F$  in dünner Wand, so darf man meist  $\alpha = \alpha_1 = 0,64$  setzen.

In dem Falle der Fig. 269 wäre  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha = 0,64$  zu setzen. Würde auch die Öffnung  $F$  durch allmähliche Verengung wie in Fig. 252 gebildet, so hätte man auch  $\alpha = 1$  zu setzen.

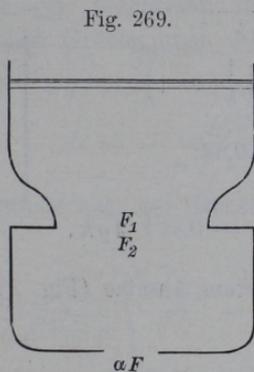


Fig. 269.

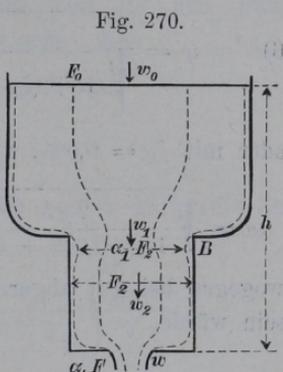


Fig. 270.

$\beta$ ) **Plötzliche Verengung** würde einen Stossverlust nicht erzeugen, wenn nicht dicht unter der Verengung eine Einschnürung und sogleich daneben wieder eine Ausdehnung des Strahles auf den vollen Gefäßquerschnitt erfolgte. An der Verengung auf  $F_2$  bei  $B$  (Fig. 270) ist der Strahlquerschnitt  $\alpha_1 F_2$ , die Geschwindigkeit  $w_1$ , unmittelbar darunter  $F_2$  bzw.  $w_2$ , daher der Stossverlust

$$\frac{(w_1 - w_2)^2}{2g} = \frac{w_2^2}{2g} \left( \frac{1}{\alpha_1} - 1 \right)^2,$$

weil  $\alpha_1 w_1 = w_2$ . Sonach wird

$$5) \quad w = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{\alpha^2 F^2}{F_0^2} + \zeta_0 + \frac{\alpha^2 F^2}{F_2^2} \left( \frac{1}{\alpha_1} - 1 \right)^2}}.$$

Mit  $\alpha_1 = 0,64$  wird

$$\left( \frac{1}{\alpha_1} - 1 \right)^2 = 0,32.$$

Schliesst sich an ein Gefäß unten ein kurzes cylindrisches Ansatzrohr (Fig. 271) ohne Abrundung oder Abschrägung beim Anschlusse, so entsteht beim Eintritt in das Rohr eine Einschnürung auf  $\alpha F$  mit sogleich folgender

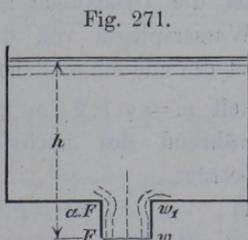


Fig. 271.

Ausweitung auf den Querschnitt  $F$ ; somit wird, wenn  $F_0$  sehr gross gegen  $F$ :

$$6) \quad w = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \zeta_0 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2}}$$

oder mit  $\zeta_0 = 0,085$ ,  $\alpha = 0,64$ :

$$w = \sqrt{\frac{2gh}{1 + 0,085 + 0,32}} = 0,84 \sqrt{2gh},$$

wogegen bei gut abgerundetem Ansatz (Fig. 272)  $w = 0,96 \sqrt{2gh}$  sein würde.

#### f) Ausfluss aus einer Bodenöffnung unter veränderlicher Druckhöhe.

Die Formel  $w = \varphi \sqrt{2gh}$  gilt unter der Voraussetzung, dass die Bodenöffnung klein ist und dass genügender Zufluss erfolgt, um die Druckhöhe unveränderlich zu erhalten, sowie unter der Annahme, dass der Beharrungszustand bereits eingetreten sei. Findet der Zufluss nun nicht in richtiger Menge oder gar nicht statt, so ändert sich die Höhenlage des Wasserspiegels und damit die Druckhöhe. Annäherungsweise verwendet man für die nun veränderliche Ausflussgeschwindigkeit  $w$  dieselbe Gleichung wie für den Beharrungszustand, indem man mit veränderlicher Druckhöhe  $z$  einfach  $w = \varphi \sqrt{2gz}$  setzt.

$\alpha$ ) Allmähliche Entleerung ohne Zufluss. Zu Anfang, zur Zeit  $t = 0$ , sei  $F_0$  der Wasserspiegel in der Höhe  $h$  über der Öffnung (Fig. 273); nach  $t$  Zeiteinheiten sei die Druckhöhe auf  $z$  vermindert, der Wasserspiegel von der Grösse  $F_z$ ; dann ist die augenblickliche Ausflussgeschwindigkeit  $w = \varphi \sqrt{2gz}$ , und die Ausflussmenge während des nächsten Zeittheilchens  $dt$  beträgt

$$1) \quad dQ = \mu F \sqrt{2gz} \cdot dt.$$

Um hieraus  $dt$  als Differentialfunktion von  $z$  finden zu können, bedenke man, dass in dem Zeittheilchen  $dt$

Fig. 272.

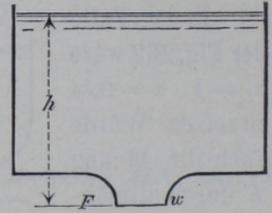
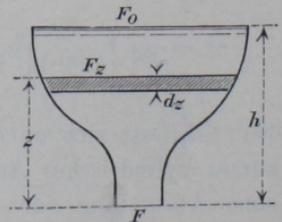


Fig. 273.



der Wasserspiegel um  $dz$  sinkt, dass dieses  $dz$  aber mit negativem Zeichen zu schreiben ist, weil  $z$  mit wachsendem  $t$  abnimmt. Der sinkende Wasserspiegel beschreibt in der Zeit  $dt$  den Raum  $-F_z \cdot dz$ , und diese Grösse muss  $= dQ$  sein. Aus

$$2) \quad \mu F \sqrt{2gz} dt = -F_z dz \quad \text{wird dann}$$

$$3) \quad dt = -\frac{F_z dz}{\mu F \sqrt{2gz}}.$$

Daher ist zur Veränderung der Druckhöhe von  $h$  auf  $z$  die Zeit erforderlich

$$4) \quad t = -\frac{1}{\mu F \sqrt{2g}} \int_h^z \frac{F_z dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\mu F \sqrt{2g}} \int_z^h \frac{F_z dz}{\sqrt{z}},$$

weil den Zeitwerthen  $t = 0$  und  $t = t$  bzw. die Werthe  $z = h$  und  $z = z$  entsprechen.

**Entleerung eines prismatischen Gefässes** (Fig. 274). Mit  $F_z = F_0$  wird

$$5) \quad t = \frac{F_0}{\mu F \sqrt{2g}} \int_z^h z^{-1/2} dz = \frac{2F_0}{\mu F \sqrt{2g}} (\sqrt{h} - \sqrt{z}).$$

Für völlige Entleerung wird mit  $z = 0$

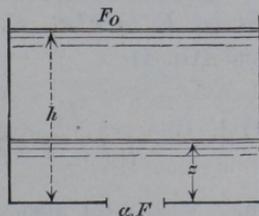
$$6) \quad t = \frac{2F_0 \sqrt{h}}{\mu F \sqrt{2g}}.$$

Multiplicirt man nun in Zähler und Nenner mit  $\sqrt{h}$ , so kann man im Zähler den ursprünglichen Gefässinhalt  $V = F_0 h$ , im Nenner die dem anfänglichen Zustand entsprechende sekundliche Ausflussmenge  $Q_0 = \mu F \sqrt{2gh}$  einführen und erhält

$$7) \quad t = 2 \frac{V}{Q_0}.$$

Behielte die Druckhöhe den ursprünglichen Werth  $h$ , so würde der Ausfluss einer dem Gefässinhalte  $V$  gleichen Wassermenge die Zeit  $V:Q_0$  erfordern; wegen der kleiner werdenden Druckhöhe erfordert die Entleerung das Doppelte jener Zeit.

Fig. 274.



**Wasseruhr mit cylindrischem Gefässe.** Ein Cylinder von  $0,391^m$  Weite und  $1^m$  Höhe habe im Boden eine kreisförmige Öffnung von  $0,002^m$  Durchmesser mit gut abgerundetem kurzen Mundstücke, so dass  $\alpha = 1$  und  $\mu = \alpha \varphi = 0,96$  gesetzt werden kann. Die allmähliche Senkung des Wasserspiegels soll zur Zeitmessung benutzt werden. Gl. 5 wird in diesem Falle

$$t = \frac{2 \cdot 0,391^2}{0,96 \cdot 0,002^2 \sqrt{2g}} (\sqrt{h} - \sqrt{z}) = 18000 (\sqrt{h} - \sqrt{z}).$$

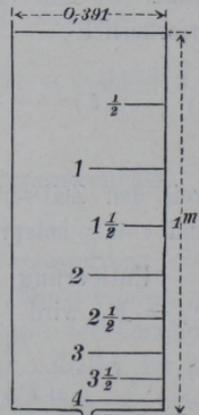
Ist die ursprüngliche Höhe des Wasserspiegels über der Mündung  $h = 1^m$ , so wird für eine beliebige Zeit  $t$

$$\sqrt{z} = 1 - \frac{t}{18000}.$$

Hiernach kann man für Werthe von  $t$ , die je um  $1/2$  Stunde abnehmen, leicht  $z$  berechnen.

$t = 1/2$ Stunde	= 1800 s.	gibt $z = 0,81^m$
$t = 1$	" = 3600 s.	" $z = 0,64$
$t = 1 1/2$	"	$z = 0,49$
$t = 2$	"	$z = 0,36$
$t = 2 1/2$	"	$z = 0,25$
$t = 3$	"	$z = 0,16$
$t = 3 1/2$	"	$z = 0,09$
$t = 4$	"	$z = 0,04$

Fig. 275.



Für die letzten Theile der Entleerung trifft übrigens Gl. 5 nicht mehr zu, hat nur ideellen Werth, weil sich zuletzt um die Öffnung ein Strudel und in der Mitte der Öffnung ein von Wasser nicht erfüllter Trichter bildet, so dass der Ausfluss verlangsamt wird.

**Entleerung eines trichterförmigen Gefässes.** Das untere Ende des kegelförmigen Gefässes (Fig. 276) sei zu einer Öffnung erweitert, die in der Höhe der geometrischen Spitze des Kegels liegt. Es ist  $F_z = x^2 \pi$ ,  $F_0 = r^2 \pi$ ,  $x : r = z : h$ , also  $F_z = F_0 \cdot z^2 : h^2$  und (Gl. 4)

$$8) \quad t = \frac{F_0}{\mu F h^2 \sqrt{2g}} \int_z^h z^{3/2} dz = \frac{2}{5} \frac{F_0}{\mu F h^2 \sqrt{2g}} (h^{5/2} - z^{5/2});$$

für  $z = 0$  wird dann mit  $V = 1/3 r^2 \pi h$  und  $Q_0 = \mu F \sqrt{2gh}$ :

$$9) \quad t = \frac{6}{5} \frac{V}{Q_0} = 1,2 \frac{V}{Q_0}.$$

Für die Entleerung eines halbkugelförmigen oder halbellipsoidischen (bis zum grössten Querschnitte gefüllten) Beckens findet man

$$10) \quad t = \frac{7}{5} \frac{V}{Q_0} = 1,4 \frac{V}{Q_0},$$

für die Entleerung eines paraboloidischen Gefässes

$$11) \quad t = \frac{4}{3} \frac{V}{Q_0} = 1,33 \frac{V}{Q_0}.$$

Der Zahlenfaktor auf der rechten Seite dieser Gleichungen war = 2 für ein prismatisches Gefäss; er ist < 2 für jedes nach unten verengte Gefäss und umgekehrt; er nähert sich um so mehr der Einheit, je schneller sich das Gefäss nach unten verengt. Beim Beginne des Ausflusses sinkt nämlich der Wasserspiegel schnell; mit abnehmender Druckhöhe und Geschwindigkeit geht aber der weitere Ausfluss langsamer von statten, u. zw. um so mehr, wenn das Gefäss unten noch verhältnismässig weit ist, so dass noch ziemlich viel Wasser bei der geringen Geschwindigkeit ausfliessen muss.

**Gefässform für gleichmässige Senkung des Wasserspiegels.**  
Die Geschwindigkeit, mit der der Wasserspiegel sinkt, ist

$$12) \quad v = \frac{-dz}{dt} = \frac{\mu F \sqrt{2gz}}{F_z} \text{ (Gl. 3);}$$

soll diese sich nicht ändern, sondern gleich dem Anfangswerthe

$$\frac{\mu F \sqrt{2gz}}{F_0} = \frac{Q_0}{F_0}$$

bleiben, so muss

$$13) \quad \sqrt{z} : \sqrt{h} = F_z : F_0 \text{ sein.}$$

Soll die Innenfläche des Gefässes eine Umdrehungsfläche sein, so wird mit

$$F_z = x^2 \pi \text{ und } x^2 : r^2 = \sqrt{z} : \sqrt{h},$$

$$14) \quad x^4 : r^4 = z : h.$$

Dies ist die Gleichung der gesuchten Meridianlinie, die man eine Parabel vierten Grades nennt. Eine bei A (Fig. 277) an die

Fig. 276.

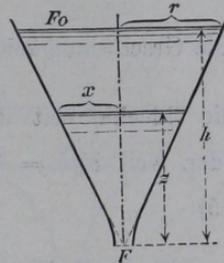
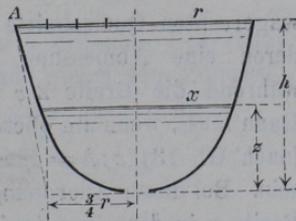


Fig. 277.



Meridianlinie gelegte Tangente hat gegen die lothrechte Achse ein Neigungsverhältnis  $1/4 r : h$ , Der Inhalt des Gefässes ist

$$V = \pi \int_0^h x^2 dz = \frac{\pi r^2}{V h} \int_0^h \sqrt{z} dz = \frac{2}{3} F_0 h.$$

Die Geschwindigkeit des sinkenden Wasserspiegels beträgt  $v = \frac{Q_0}{F_0}$ ,

die (ideelle) Zeit der vollständigen Entleerung  $t = h : v = \frac{F_0 h}{Q_0}$ ,

oder, weil  $F_0 h = 3/2 V$ :

$$15) \quad t = \frac{3}{2} \frac{V}{Q_0} = 1,5 \frac{V}{Q_0}.$$

Ist die Meridianlinie der Innenwand eines Gefässes eine Parabel  $n$ ten Grades mit  $x^n : r^n = z : h$ , so ist das Neigungsverhältnis einer bei  $A$  angelegten Tangente gegen die Achse  $1/n r : h$ , der Inhalt des Gefässes

$$16) \quad V = \frac{F_0 h}{\frac{2}{n} + 1},$$

die (ideelle) Zeit der Entleerung

$$17) \quad t = \frac{4 + 2n}{4 + n} \frac{V}{Q_0}.$$

$n = \frac{1}{2}$  (Fig. 278) giebt

$$18) \quad t = \frac{10}{9} \frac{V}{Q_0} = 1,1 \frac{V}{Q_0}.$$

Will man ein Gefäss mit gleichförmig sinkendem Wasserspiegel als Wasseruhr benutzen und für die Anbringung der Theilung eine ebene Wand zur Verfügung haben, so kann man die Gefässform auch derartig anordnen, dass die

wagerechten Querschnitte Rechtecke sind, deren eine Abmessung durchweg  $= b$ , während die Breite  $2x$  veränderlich ist. Dann muss, wenn am oberen Rande  $x = a$ , (nach Gl. 13)  $z : h = b^2 x^2 : b^2 a^2 = x^2 : a^2$  sein. Bei dieser Anordnung folgt die halbe Breite  $x$  in der einen Ansicht dem Gesetze einer gewöhnlichen (quadratischen) Parabel

mit  $V = 2/3 F_0 h$  und  $t = \frac{3}{2} \frac{V}{Q_0}$ .

Fig. 278.

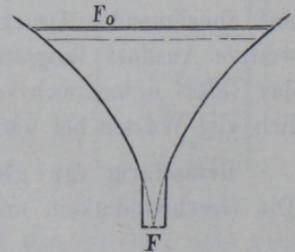
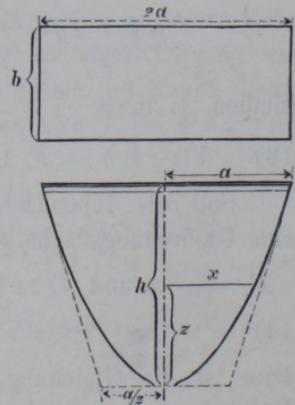


Fig. 269.



$\beta$ ) **Ausfluss unter veränderlicher Druckhöhe bei Zufluss von oben.** Erfolgt ein Zufluss von  $q$  cbm/s. (Fig. 280), so besteht die Ausflussmenge  $dQ = \mu F \sqrt{2gz} dt$  während der Zeit  $dt$  aus dem der Senkung des Wasserspiegels  $F_z$  um  $-dz$  entsprechenden Wasserkörper  $-F_z dz$  und dem Zuflusse  $q dt$ ; sonach ist statt Gl. 2, S. 249, zu setzen:

$$\mu F \sqrt{2gz} dt = -F_z dz + q dt;$$

die Geschwindigkeit des sinkenden Wasserspiegels wird

$$19) \quad v = \frac{-dz}{dt} = \frac{\mu F \sqrt{2gz} - q}{F_z},$$

$$dt = -\frac{F_z dz}{\mu F \sqrt{2gz} - q} \quad \text{und}$$

$$20) \quad t = -\int_h^z \frac{F_z dz}{\mu F \sqrt{2gz} - q} = \int_z^h \frac{F_z dz}{\mu F \sqrt{2gz} - q}.$$

Für ein prismatisches Gefäss mit  $F_z = F_0$  (Fig. 281) wird

$$t = \frac{F_0}{\mu F \sqrt{2g}} \int_z^h \frac{dz}{\sqrt{z} - \frac{q}{\mu F \sqrt{2g}}}.$$

Behufs der Integration setze man

$$\frac{q}{\mu F \sqrt{2g}} = \sqrt{a}, \quad \sqrt{z} = y,$$

dann ist wegen  $q = \mu F \sqrt{2ga}$  die Grösse  $a$  diejenige Druckhöhe, bei welcher die sekundl. Ausflussmenge gerade gleich dem Zuflusse  $q$  sein würde; es ist ferner  $z = y^2$ ,  $dz = 2y dy$ ; man schreibe

$$\begin{aligned} 2 \int \frac{y dy}{y - \sqrt{a}} &= 2 \int \frac{y - \sqrt{a} + \sqrt{a}}{y - \sqrt{a}} dy = \\ 2 \int dy + 2\sqrt{a} \int \frac{dy}{y - \sqrt{a}} &= 2y + 2\sqrt{a} \ln(y - \sqrt{a}) \\ &= 2\sqrt{z} + 2\sqrt{a} \ln(\sqrt{z} - \sqrt{a}), \quad \text{daher} \end{aligned}$$

Fig. 280.

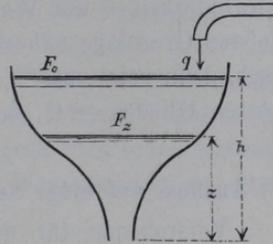
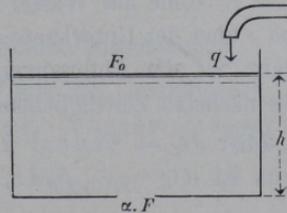


Fig. 281.



$$21) \quad t = \frac{2 F_0}{\mu F \sqrt{2g}} \left\{ \sqrt{h} - \sqrt{z} + \sqrt{a} \ln \frac{\sqrt{h} - \sqrt{a}}{\sqrt{z} - \sqrt{a}} \right\}.$$

In diesem Fall ist wegen des Zuflusses eine völlige Entleerung unmöglich, denn für  $z = a$ , d. h.  $\mu F \sqrt{2gz} = q$  würde nach Gl. 19 die Geschwindigkeit  $v$  des Wasserspiegels Null. Der hierdurch bedingten tiefsten Grenzlage nähert sich aber der Wasserspiegel nur asymptotisch, denn setzt man  $z = a$  in Gl. 21 ein, so wird der Nenner des letzten Gliedes  $= 0$ , d. h.  $t = \infty$ .

### g) Ausfluss aus einer Seitenöffnung bei veränderlicher Druckhöhe.

Vorstehende, für den Ausfluss aus Bodenöffnungen entwickelte Gleichungen für theilweise Entleerung gelten annähernd auch für den Ausfluss aus niedrigen Seitenöffnungen, solange der Wasserspiegel oberhalb der Öffnung verbleibt.

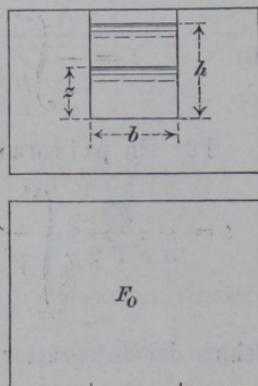
Wir betrachten nun einen rechteckigen Kasten (Fig. 282) von der Grundfläche  $F_0$  der sich, ohne Zufluss zu erhalten, durch einen rechteckigen Ausschnitt einer Seitenwand entleeren möge. Zu Anfang ( $t = 0$ ) stehe das Wasser um  $h$ , zur Zeit  $t$  um  $z$  über der Unterkante des Ausschnittes. Dann ist die Abflussmenge  $dQ$  während des nächsten Zeittheilchens  $dt$  nach Gl. 9, S. 243:  $dQ = {}^{2/3} \mu b z \sqrt{2gz} dt$ ; andererseits ist  $dQ = -F_0 dz$ , somit

$$dt = - \frac{3}{2} \frac{F_0}{\mu b \sqrt{2g}} \frac{dz}{z \sqrt{z}} \quad \text{und}$$

$$t = - \frac{3}{2} \frac{F_0}{\mu b \sqrt{2g}} \int_h^z \frac{dz}{z^{3/2}} = \frac{3 F_0}{\mu b \sqrt{2g}} \left( \frac{1}{\sqrt{z}} - \frac{1}{\sqrt{h}} \right).$$

$z = 0$  verlangt  $t = \infty$ . Hiernach ist also eine Entleerung bis zur Unterkante des Einschnittes in endlicher Zeit nicht möglich, der Wasserspiegel nähert sich nur asymptotisch der Unterkante. Beim Ausflusse durch eine Bodenöffnung ergab sich für völlige Entleerung

Fig. 282.



ein endlicher Zeitwerth. Der Grund der Verschiedenheit beider Fälle ist folgender: Bei einer Bodenöffnung ist gegen das Ende des Ausflusses die Druckhöhe unendlich klein, die Öffnung endlich, die sekundl. Ausflussmenge unendlich klein; daher kann die unendlich kleine noch vorhandene Wassermenge in endlicher Zeit ausfliessen. Bei der Seitenöffnung aber wird mit der Druckhöhe auch der Querschnitt des ausfliessenden Strahles unendlich klein, die sekundliche Ausflussmenge daher unendlich klein zweiter Ordnung, so dass zum Ausfliessen der unendlich kleinen letzten Wassermenge eine unendlich grosse Zeit nöthig ist. Übrigens wird schon während einer endlichen Zeit die noch vorhandene Wasserschicht so dünn, dass sie thatsächlich nicht mehr fliesst.

**Beispiel:** Es sei die Grundfläche des Gefässes  $F_0 = 3 \text{ qm}$ , die Breite des Einschnittes  $b = 0,1 \text{ m}$ , die ursprüngliche Wasserhöhe  $h = 1 \text{ m}$ ,  $\mu = 0,6$ . Dann wird

$$t = \frac{3 \cdot 3}{0,6 \cdot 0,1 \cdot 4,43} \left( \frac{1}{\sqrt{z}} - 1 \right) = 33,9 \left( \frac{1}{\sqrt{z}} - 1 \right).$$

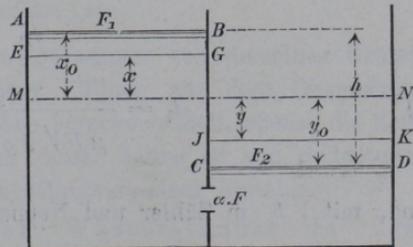
$$\text{Für } z = \frac{1}{4} \text{ m ist } t = 33,9 \text{ s. ;}$$

$$\text{für } z = 0,01 \text{ m ist } t = 9 \cdot 33,9 = 305,1 \text{ s. ;}$$

$$\text{für } z = 0,0001 \text{ m ist } t = 99 \cdot 33,9 = 3356 \text{ s. .}$$

### h) Ausgleichung des Wassers in Schleusenammern.

Sind 2 Schleusenammern (Fig. 283) mit den Grundflächen  $F_1$  und  $F_2$  durch eine beiderseits unter Wasser liegende Schützenöffnung  $F$  verbunden, so wird, wenn die Wasserstände  $AB$  und  $CD$  der Kammern zu Anfang einen Höhenunterschied  $h$  hatten, nach einer gewissen Zeit in beiden Kammern sich ein Ausgleichswasserspiegel  $MN$  bilden, der von den ursprünglichen Wasserspiegeln um  $x_0$



bezw.  $y_0$  absteht. Nach  $t$  Sekunden seien die beiden Wasserspiegel  $EG$  und  $JK$  um  $x$  bzw.  $y$  vom Ausgleich entfernt; dann ist im

Zeitpunkte  $t$  die wirksame Druckhöhe  $x + y$ , daher die Durchflussgeschwindigkeit der Schützenöffnung

$$w = \varphi \sqrt{2g(x + y)}$$

und die Durchflussmenge während der Zeit  $dt$ :

$$dQ = \mu F dt \sqrt{2g(x + y)}.$$

Nun ist offenbar

$$F_1 x = F_2 y \quad \text{und} \quad F_1 x_0 = F_2 y_0,$$

$$1) \quad x + y = y \left( \frac{F_2}{F_1} + 1 \right); \quad h = x_0 + y_0 = y_0 \left( \frac{F_2}{F_1} + 1 \right);$$

ferner, weil in der Zeit  $dt$  die Tiefe sich um  $-dy$  ändert,

$$dQ = \mu F dt \sqrt{2gy \left( \frac{F_2}{F_1} + 1 \right)} = -F_2 dy; \quad \text{mithin}$$

$$2) \quad dt = \frac{-F_2 dy}{\mu F V \sqrt{2g} \sqrt{\frac{F_2}{F_1} + 1} \sqrt{y}}.$$

Für  $t = 0$  ist  $y = y_0$ ; für  $t = t_1$  ist  $y = 0$ , wenn  $t_1$  die Zeit bis zur Ausgleichung bedeutet. Also

$$t_1 = \frac{F_2}{\mu F V \sqrt{2g} \sqrt{\frac{F_2}{F_1} + 1}} \int_0^{y_0} y^{-1/2} dy = \frac{2 F_2 \sqrt{y_0}}{\mu F V \sqrt{2g} \sqrt{\frac{F_2}{F_1} + 1}}$$

oder wegen  $y_0 = \frac{h}{\frac{F_2}{F_1} + 1}$ :

$$4) \quad t_1 = \frac{2 F_2 \sqrt{h}}{\mu F V \sqrt{2g} \left( \frac{F_2}{F_1} + 1 \right)}$$

und, mit  $\sqrt{h}$  in Zähler und Nenner multiplicirt:

$$5) \quad t_1 = \frac{2 F_2 h}{\mu F V \sqrt{2gh} \left( \frac{F_2}{F_1} + 1 \right)}.$$

Multipliziert man in Zähler und Nenner mit  $F_1 : F_2$ , so kann man auch schreiben:

$$6) \quad t_1 = \frac{2 F_1 h}{\mu F \sqrt{2gh} \left(1 + \frac{F_1}{F_2}\right)}$$

Die ganze überströmende Wassermenge beträgt

$$V = F_2 y_0 = \frac{F_2 h}{\frac{F_2}{F_1} + 1},$$

und da die sekundl. Durchflussmenge zu Anfang

$$Q_0 = \mu F \sqrt{2gh},$$

so ist, wie Gl. 7, S. 249:

$$7) \quad t_1 = 2 \frac{V}{Q_0}.$$

Füllt sich die Schleusenammer aus einem ausgedehnten Oberwasser für welches  $F_1 = \infty$  zu setzen ist (Fig. 284), so wird  $V = F_2 h$  und

$$8) \quad t_1 = \frac{2 F_2 h}{\mu F \sqrt{2gh}}.$$

Ähnliches gilt bei der Entleerung einer Schleusenammer in ein ausgedehntes Unterwasser.

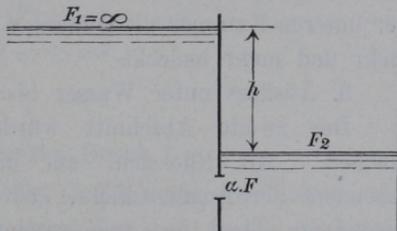
**Beispiel:** Es sei (Fig. 283)  $F_1 = F_2 = 400 \text{ qm}$ ;  $F = 0,5 \text{ qm}$ ,  $h = 2 \text{ m}$ ;  $\mu$  kann im Mittel  $= 0,6$  gesetzt werden. Dann ist  $y_0 = 1/2 h = 1 \text{ m}$ , also  $V = 400 \text{ cbm}$ ;  $Q_0 = 0,6 \cdot 0,5 \cdot 4,43 \sqrt{2} = 1,88$ , und nach Gl. 7:

$$t_1 = 426 \text{ s.} = 7,1 \text{ min.}$$

Ist nur eine einzelne Schleusenammer von derselben Grösse vorhanden, so wird die Zeit einer Füllung aus dem Oberwasser doppelt so gross sein, wie die oben berechnete Zeit, ebenso die Zeit der Entleerung. Die Berechnung dieser Zeiten ist von Bedeutung für die Beurtheilung der Leistungsfähigkeit eines Kanales.

Ausgleichungszeit des Wasserstandes in den Kammern gekuppelter Schleusen, wenn die Öffnung zu Anfang nicht beiderseitig unter Wasser liegt (Fig. 285). Der Schwerpunkt der Öffnung  $F$  liege anfangs um  $h_1$

Fig. 284.



unter dem Oberwasser, um  $h_2$  über dem Unterwasser. Dann sind drei Abschnitte des Durchflusses zu unterscheiden:

1. Ausfluss ins Freie durch die niedrige Seitenöffnung, bis das Wasser der unteren Kammer die Unterkante der Öffnung erreicht.

2. Ausfluss, theils frei, theils unter Wasser, während das Wasser der unteren Kammer die Öffnung mehr und mehr bedeckt.

3. Ausfluss unter Wasser bis zur Ausglei chung.

Der zweite Abschnitt würde die Berechnung umständlich machen. Mit Rücksicht auf die Unsicherheit dieser Formeln, besonders der Ausflussziffern, lässt man daher diesen Abschnitt als besonderen Theil fort und vereinigt ihn mit den anderen beiden, indem man den ersten mit Ausfluss ins Freie bis zu dem Augenblicke rechnet, wo das Wasser der unteren Kammer den Schwerpunkt der Öffnung erreicht, den übrigen Theil des Durchflusses als Ausfluss unter Wasser behandelt.

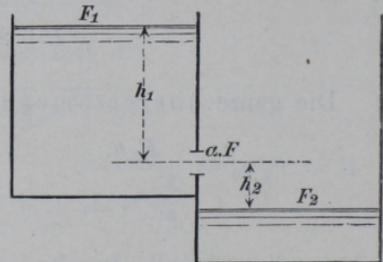
Während das Wasser der unteren Kammer um  $h_2$  steigt, muss dasjenige der oberen Kammer um  $h_2 F_2 : F_1$  sinken. Es erfolgt also während des freien Ausflusses aus der als niedrig vorausgesetzten Öffnung eine Verminderung der Druckhöhe von  $h_1$  auf  $h_1 - h_2 \frac{F_2}{F_1}$ , wozu nach Gl. 5, S. 249 eine Zeit

$$t_1 = \frac{2 F_1}{\mu F \sqrt{2g}} \left( \sqrt{h_1} - \sqrt{h_1 - h_2 \frac{F_2}{F_1}} \right)$$

erforderlich ist. Für die nun beginnende Ausglei chung durch eine Öffnung unter Wasser gilt Gl. 6, S. 257, wenn darin  $h$  durch den jetzt bestehenden Höhenunterschied  $h_1 - h_2 \frac{F_2}{F_1}$  ersetzt wird. Die entsprechende Zeit ist also

$$t_2 = \frac{2 F_1 \sqrt{h_1 - h_2 \frac{F_2}{F_1}}}{\mu F \sqrt{2g} \left( \frac{F_1}{F_2} + 1 \right)}$$

Fig. 285.



Die Gesamtzeit  $t_1 + t_2$  wird also

$$t = \frac{2 F_1}{\mu F \sqrt{2g}} \left\{ \sqrt{h_1} - \left( 1 - \frac{1}{\frac{F_1}{F_2} + 1} \right) \sqrt{h_1 - h_2 \frac{F_2}{F_1}} \right\} \quad \text{oder}$$

$$9) \quad t = \frac{2 F_1}{\mu F \sqrt{2g}} \left\{ \sqrt{h_1} - \frac{F_1}{F_1 + F_2} \sqrt{h_1 - h_2 \frac{F_2}{F_1}} \right\}.$$

**Beispiel:** Es sei wiederum  $F_1 = F_2 = 400 \text{ qm}$ ;  $h_1 = 1,5 \text{ m}$ ;  $h_2 = 0,5 \text{ m}$ ;  $F = 0,5 \text{ qm}$ ,  $\mu = 0,6$ , dann wird  $\mu F \sqrt{2g} = 1,329$  und

$$t = 433 \text{ s.} = 7,2 \text{ min.},$$

nicht viel mehr als auf S. 257.

### i) Hydraulischer Druck.

Ist das in Fig. 286 dargestellte Gefäß unten geschlossen, oben dem Drucke  $p_0$ , etwa dem Atmosphärendruck ausgesetzt, so beträgt in einem Querschnitte  $MN$ , der um  $y$  unter dem Wasserspiegel liegt, der hydrostatische Druck nach S. 168

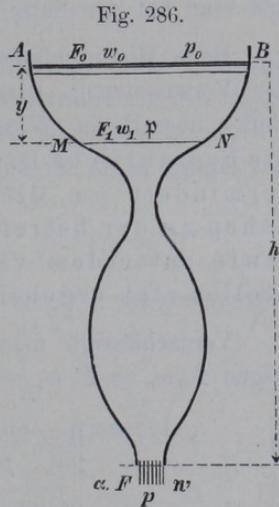
$$p_1 = p_0 + \gamma y,$$

wenn  $\gamma$  das Gewicht der Körpereinheit (eines Kubikmeters) Wasser ist. Findet aber eine Ausflussbewegung statt, so tritt eine bedeutende Änderung in den Druckverhältnissen ein. Der im Bewegungszustande herrschende Druck wird der hydrodynamische oder hydraulische Druck genannt und möge mit  $p$  bezeichnet werden. Wir berechnen denselben unter der Annahme, dass der Beharrungszustand eingetreten sei, dass also für die Geschwindigkeiten und die Druckhöhe Gl. I, S. 231 gelte, aber mit Berücksichtigung der Widerstände.

Für das ganze Gefäß besteht daher die Beziehung

$$1) \quad h + \frac{p_0 - p}{\gamma} = \frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} + z_h;$$

darin soll  $z_h$  die gesammte Widerstandshöhe oder den gesammten Druckhöhenverlust zwischen Wasserspiegel und Mündung bedeuten.



Sind (wie in Fig. 286) keine plötzlichen Querschnittsänderungen vorhanden, so ist  $z_h = z_0$  (Gl. 3, S. 244), anderenfalls wären noch entsprechende  $z_1$  (Gl. 2, S. 246) hinzuzufügen.

Betrachtet man aber nur die Wassermenge zwischen  $AB$  und  $MN$ , so ist  $w_1$  die Ausflussgeschwindigkeit,  $p$  der Gegendruck; nennt man dann  $z_y$  die auf die Höhe  $y$  kommende Widerstandshöhe, so wird, entsprechend der Gl. 1:

$$2) \quad y + \frac{p_0 - p}{\gamma} = \frac{w_1^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} + z_y \quad \text{oder}$$

$$3) \quad \frac{p}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + y - \left( \frac{w_1^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} \right) - z_y.$$

Mit  $p$  als hydraulischem Druck ist  $p:\gamma$  die hydraulische Druckhöhe bei  $MN$ ,  $\frac{p_0}{\gamma} + y$  die hydrostatische Druckhöhe daselbst, und man hat den Satz:

Beim Hindurchfließen des Wassers durch ein Gefäß ist unter der Voraussetzung, dass der Beharrungszustand besteht und das Gefäß überall von Wasser erfüllt ist, in irgend einem Querschnitte die hydraulische Druckhöhe gleich der hydrostatischen, vermindert um die Differenz der Geschwindigkeitshöhen an der betreffenden Stelle und im Wasserspiegel, sowie ausserdem vermindert um die zwischen beiden Stellen sich ergebende Widerstandshöhe.

Vernachlässigt man die Widerstandshöhe  $z_y$ , so kann man wegen  $F_0 w_0 = F_1 w_1 = \alpha F w$  auch schreiben

$$4) \quad \frac{p}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + y - \frac{w_0^2}{2g} \left( \frac{F_0^2}{F_1^2} - 1 \right).$$

Ist also an der Stelle  $MN$  der Querschnitt  $F_1 < F_0$ , so ist die Differenz der Geschwindigkeitshöhen positiv, mithin die hydraulische Druckhöhe kleiner als die hydrostatische, u. zw. um so mehr, je kleiner der Querschnitt  $F_1$  ist. Dadurch also, dass man die vorher geschlossene Öffnung frei macht, vermindert man den Druck auf die Gefässwände in allen den Querschnitten des Gefässes, die kleiner sind als der Wasserspiegel-Querschnitt, und umgekehrt. An

einem Querschnitte, der mit dem Wasserspiegel-Querschnitte gleiche Grösse hat, entsteht durch Eintritt der Bewegung keine Änderung des Druckes. Sind die Querschnitte  $F$  und  $F_1$  klein gegen  $F_0$  und ist  $p = p_0$ , so kann man

$$\frac{w_1^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} = \frac{w_1^2}{2g} = \frac{w^2}{2g} \cdot \frac{\alpha^2 F^2}{F_1^2} = h \frac{\alpha^2 F^2}{F_1^2}$$

setzen, und wenn man noch annimmt, dass an der Mündung keine Einschnürung vorkommt,

$$5) \quad \frac{p}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + y - h \frac{F^2}{F_1^2}.$$

Eine Verkleinerung des Querschnittes  $F_1$  kann eine bemerkenswerthe Verminderung des hydraulischen Druckes hervorbringen. Es wird  $p < p_0$ , d. h. der innere Druck kleiner als der äussere Luftdruck, wenn

$$6) \quad y < h \frac{F^2}{F_1^2} \quad \text{oder} \quad \frac{F_1}{F} < \sqrt{\frac{h}{y}}.$$

Durch eine in der Wand angebrachte Öffnung würde in diesem Falle nicht etwa Wasser herausfliessen, sondern durch den überwiegenden Druck der äusseren Atmosphäre Luft ins Innere des Gefässes hineingedrückt oder, wie man dann zu sagen pflegt, von dem strömenden Wasser angesogen werden. Der Überschuss des äusseren Druckes gegen den inneren kann durch einen etwa mit Wasser gefüllten Minderdruckmesser (s. Fig. 240, S. 217) kenntlich gemacht werden. Wenn der äussere Überdruck die Wassersäule  $x$  im Gleichwichte hält, so ist

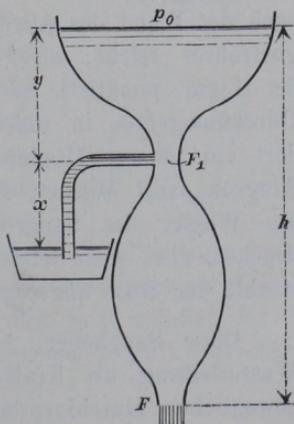
$$\frac{p}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} - x,$$

also nach Gl. 5:

$$-x = y - h \frac{F^2}{F_1^2} \quad \text{oder}$$

$$x + y = h \frac{F^2}{F_1^2}.$$

Fig. 287.

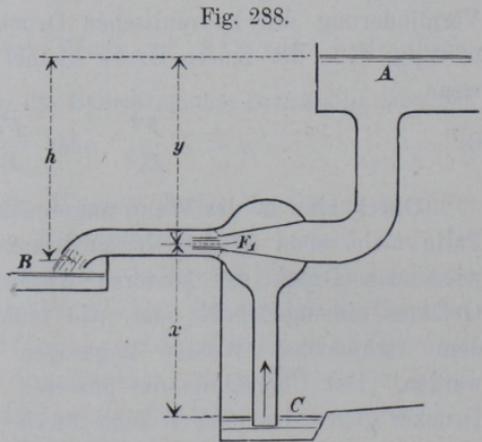


Ist aber  $x + y < h \frac{F^2}{F_1^2}$  (Fig. 287), so wird der äussere Atmosphärendruck das Wasser in dem seitlichen Messrohr aufwärts und in das Gefäss drücken, oder der innere Minderdruck das Wasser aus dem kleinen Nebengefäss ansaugen und mit fortführen. Dieses Ansaugen findet statt, wenn

$$8) \quad \frac{F_1}{F} < \sqrt{\frac{h}{x + y}} \quad \text{ist.}$$

Auf diesem Verhalten beruht die Wirkungsweise des **Saughebers** oder der Saugstrahlpumpe (Fig. 288). Das zum Betriebe dienende Wasser fliesst aus dem

Gerinne *A* abwärts durch eine Röhre, welche sich zu einer engen Düse  $F_1$  zusammenzieht. Diese wird von einem Gehäuse umschlossen, an welches sich nach unten das Saugrohr, nach links das Ausgussrohr anschliesst. Denkt man sich zunächst bei  $F_1$  eine Wand, welche von dem Rande der Düse nach der Wand des Aus-



gussrohres reicht, also das Saugrohr von letzterem trennt (in der Figur punktirt), so hat man ein von *A* bis *B* reichendes Durchflussgefäss, in welchem  $F_1$  eine enge Stelle bildet, so dass dort ein innerer Minderdruck entsteht. Denkt man sich nun das Saugrohr voll Wasser, so wird, wenn die Bedingung 8 erfüllt ist, das Wasser des Saugrohres gegen die gedachte Abschlusswand drücken, also, wenn letztere nun fortgedacht wird, von dem Wasserstrahle der Düse angesogen und nach *B* mitgenommen werden.

Diese Saugheber, bei denen nicht selten das Wasser einer Wasserleitung als Kraftquelle dient, haben den Vortheil, keine beweglichen Maschinentheile zu enthalten und deshalb keiner besonderen Wartung zu bedürfen.

Nach Gl. 5, S. 261 kann man durch fortgesetzte Verkleinerung des Querschnittes  $F_1$  die hydraulische Druckhöhe selbst bis auf Null vermindern; es ist dazu erforderlich, dass

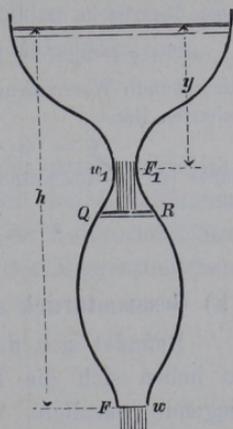
$$9) \quad \frac{F_1}{F} = \sqrt{\frac{h}{y + \frac{p_0}{\gamma}}}$$

sei. Macht man aber  $F_1$  noch kleiner als Gl. 9 entspricht, so würde der hydraulische Druck rechnermässig negativ werden. Weil aber negative Drücke in vollkommen flüssigen Körpern unmöglich sind, so hört für

$$10) \quad \frac{F_1}{F} < \sqrt{\frac{h}{y + \frac{p_0}{\gamma}}}$$

die Gültigkeit der Gl. 5, S. 261 und damit auch die Gültigkeit der Hauptgleichung I, S. 231 für die Ausflussgeschwindigkeit, aus welcher die Gleichung für den hydraulischen Druck entstand, auf. Innerhalb desjenigen Gefässtheiles, der der Bedingung 10 entspricht, herrscht ein Druck Null; die Wassertheilchen pressen sich nicht gegen die Wandung, füllen daher das Gefäss nicht vollkommen aus, sondern fallen in dem drucklosen Raume frei herunter. An derjenigen Stelle des Gefässes, wo der Druck  $p$  wieder positiv zu werden beginnt, bildet sich ein neuer Wasserspiegel  $QR$  (Fig. 289). Man sagt in solchem Falle „die Wassersäule reisst ab“. Denkt man sich das Gefäss aus einem biegsamen Stoffe, etwa Blei, so kann man durch Zusammendrücken leicht einen so kleinen Querschnitt  $F_1$  hervorbringen, dass die Trennung stattfindet. Dadurch wird aber zugleich die Ausflussmenge vermindert. An dem engen Querschnitt  $F_1$  ergibt sich jetzt nämlich für die Geschwindigkeit  $w_1$ , weil bei  $F_1$  der Gegendruck Null herrscht,

Fig. 289.



$$w_1 = \sqrt{2g \left( y + \frac{p_0}{\gamma} \right)}$$

sonach wird an der unteren Öffnung

$$w = w_1 \frac{F_1}{F} = \frac{F_1}{F} \sqrt{2g \left( y + \frac{p_0}{\gamma} \right)}.$$

Dieser Werth ist  $\leq \sqrt{2gh}$ , wenn die Bedingung 10 erfüllt ist.

Die Hauptgleichung für die ideelle Ausflussgeschwindigkeit auf S. 231 gilt demnach nur, wenn der nach S. 260, Gl. 3 berechnete Druck  $p$  an allen Stellen des Gefäßes sich positiv ergibt.

**Beispiel:** Schliesst sich an ein weites Gefäß von 1 m Wassertiefe scharfkantig ein lothrechttes Rohr von 12 m Länge (Fig. 290), so gilt in einer Tiefe  $y > 1$  m für den hydraulischen Druck  $p$  (Gl. 5) wegen  $F_1 = F$ :

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + y - h,$$

$$\text{also } p \begin{cases} \leq 0 & \text{für } y \leq h - \frac{p_0}{\gamma}, \\ > 0 & \text{für } y > h - \frac{p_0}{\gamma}, \end{cases}$$

d. h. in diesem Falle ( $h = 13$  m) für  $y \leq 3$  m. Die Röhre wird daher nur auf die untere Länge  $h_0 = 10$  m ausgefüllt; oben, wo das Rohr sich dem Gefäß anschliesst, reisst die Wassersäule ab; die Geschwindigkeit beim Eintritt in das Rohr wird

$$w_1 = \varphi \sqrt{2g(1 + h_0)} = 0,96 \sqrt{2g \cdot 11} = 14,1;$$

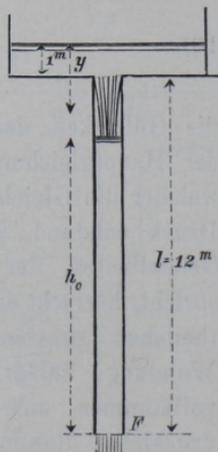
die sekundl. Wassermenge wegen der Einschnürung am scharfen Rande

$$Q = 0,64 \cdot 14,1 \cdot F = 9,02 F;$$

daher ist die Geschwindigkeit am unteren Ende

$$w = \frac{Q}{F} = 9,02 \text{ m/s.}$$

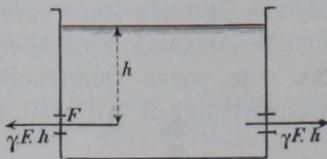
Fig. 290.



### k) Gesamtdruck ausströmenden Wassers auf die Gefäßwände.

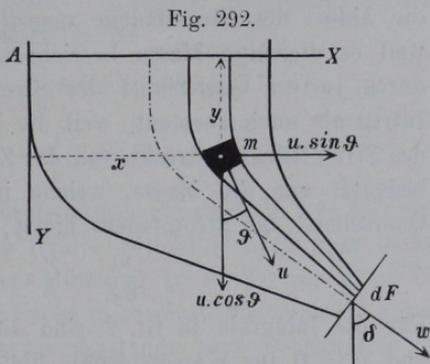
Befindet sich das Wasser in einem Gefäß in Ruhe (Fig. 291), so heben sich die Druckkräfte  $\gamma F h$  auf zwei einander gegenüber liegende parallele Wandflächenstücke auf. Entfernt man plötzlich das linksseitige Flächenstück  $F$ , so wird nun die nach rechts gerichtete Kraft  $\gamma F h$  nicht mehr aufgehoben, so dass das Gefäß jetzt einen überschüssigen Seitendruck nach rechts erfährt, während links das Wasser auszuströmen beginnt. Mit der Ausbildung des

Fig. 291.



Beharrungszustandes der Ausflussbewegung vergrößert sich aber, wie gezeigt werden soll, der einseitige Druck fast auf das Doppelte der hydrostatischen Druckkraft.

Zur Entwicklung benutzen wir ein Gefäß (Fig. 292) mit einer ziemlich bestimmt erkennbaren einfach gekrümmten Mittellinie; diese sei oben lothrecht, bilde aber an der Mündung mit der Lothrechten einen Winkel  $\delta$ . Man trenne aus der Wassermenge des Gefäßes einen Stromfaden heraus, der an der Öffnung  $F$  den Querschnitt  $dF$  hat und alle diejenigen Wassertheilchen enthält, welche demnächst in Folge gegenseitiger Verdrängung durch den Öffnungstheil  $dF$  ausfließen werden. Diejenige Wassermasse, welche durch  $dF$  während der Zeit  $dt$  ausströmt, welche daher gleichzeitig auch durch jeden anderen Querschnitt des Wasserfadens fließen muss, sei das Massentheilchen



$$1) \quad m = \frac{\gamma}{g} \cdot x \cdot dF \cdot w \cdot dt.$$

Hierin ist  $w$  die mittlere Geschwindigkeit des Ausflusstrahles. Ein solches Massentheilchen des Stromfadens mit den Koordinaten  $x$  und  $y$  habe die Geschwindigkeit  $u$ , die mit der Lothrechten den Winkel  $\vartheta$  bilde. Die Seitengeschwindigkeiten des Massentheilchen sind dann

$$\frac{dx}{dt} = u \sin \vartheta \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dt} = u \cos \vartheta,$$

die entsprechenden Beschleunigungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d(u \sin \vartheta)}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d(u \cos \vartheta)}{dt}.$$

Die entsprechenden Ergänzungskräfte sind

$$\frac{m \, d(u \sin \vartheta)}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{m \, d(u \cos \vartheta)}{dt}$$

mit dem Sinne nach links, bezw. nach oben.

Für die ganze Masse des Stromfadens ergeben sich dann die Ergänzungskräfte

$$2) \quad dX = \frac{m}{dt} \int_{w_0, 0}^{w, \delta} d(u \sin \vartheta) \quad \text{bezw.} \quad dY = \frac{m}{dt} \int_{w_0, 0}^{w, \delta} d(u \cos \vartheta).$$

Diese Ergänzungskräfte bezeichnen wir noch als Differentiale, weil die Masse des Stromfadens unendlich klein ist;  $m$  ist konstant, weil es diejenige Masse bezeichnet, die in einem Zeittheilchen  $dt$  durch jeden Querschnitt des Stromfadens geht;  $dt$  ist für obige Integrale auch konstant, weil die Integration sich über die Länge des Stromfadens erstreckt, von der Zeit aber unabhängig ist.  $m \cdot dt$  bedeutet nun die Masse, welche in jeder Sekunde durch jeden Querschnitt des Stromfadens fließt; nach Gl. 1 ist

$$\frac{m}{dt} = \frac{\gamma}{g} \alpha \cdot dF \cdot w.$$

Für die Integrale in Gl. 2 sind die unteren Grenzwerte  $u = w_0$  und  $\vartheta = 0$  im Wasserspiegel, die oberen:  $u = w$  und  $\vartheta = \delta$  an der Mündung. Bei Herstellung der unbestimmten Integrale heben sich Integral- und Differentialzeichen auf; daher wird

$$dX = \frac{\gamma}{g} \alpha \cdot dF \cdot w (w \cdot \sin \delta - 0)$$

$$dY = \frac{\gamma}{g} \alpha \cdot dF w (w \cos \delta - w_0).$$

Nehmen wir, für die meisten Fälle zutreffend,  $w_0$  als sehr klein an, so werden die Ergänzungskräfte für die ganze Wassermenge im Gefäß erhalten, indem man  $dF$  mit  $F$  vertauscht, nämlich

$$3) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = \frac{\gamma}{g} \alpha \cdot F \cdot w^2 \cdot \sin \delta, \\ Y = \frac{\gamma}{g} \alpha \cdot F \cdot w^2 \cdot \cos \delta. \end{array} \right.$$

Die Lage dieser beiden Kräfte hängt von der Form des Gefäßes ab und hat gewöhnlich kein besonderes Interesse. An irgend einem Punkt angreifend gedacht, lassen sie sich zu einer Mittelkraft

$$4) \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{\gamma}{g} \alpha \cdot F \cdot w^2$$

zusammensetzen, die mit der Lothrechten einen Winkel  $\varepsilon$  bildet, mit

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{X}{Y} = \operatorname{tg} \delta.$$

Die gesammte Ergänzungskraft  $R$  hat hiernach mit  $w$  gleiche Richtung, aber entgegengesetzten Sinn. Mit ihr müssen die äusseren Kräfte, die auf die Wassermasse im Gefässe wirken, im Gleichgewichte sein; es sind dies die Schwere  $Mg$  und der Druck der Gefässwände gegen das Wasser. Nennt man  $H$  den wagerechten nach rechts gerichteten,  $V$  den lothrechten aufwärts gerichteten Druck der Gefässwände gegen das Wasser, so ist

$$5) \left\{ \begin{aligned} H &= X = \frac{\gamma}{g} \alpha F w^2 \sin \delta, \\ V &= Mg - \frac{\gamma}{g} \alpha F w^2 \cos \delta. \end{aligned} \right.$$

Nach dem Satze der Wechselwirkung (Theil 1, S. 34) übt das Wasser auf die Gefässwände die Kräfte  $H$  und  $V$  nach links bzw. abwärts aus. Bei geschlossener Mündung ( $w = 0$ ) war  $H = 0$ ,  $V = Mg$ ; mithin kann man die Sache so ansehen, wie wenn als Folge der Ausflussbewegung im Beharrungszustande zwei Druckkräfte  $X$  und  $Y$  entstehen, die von dem strömenden Wasser auf das Gefäss ausgeübt werden und zu den im Ruhezustande wirkenden Druckkräften hinzukommen.  $X$  hat entgegengesetzten Sinn mit  $w \sin \delta$ ,  $Y$  bildet eine Verminderung des Bodendruckes. Die Gesamtkraft  $R$ , entgegengesetzten Sinnes mit  $w$ , heisst die Reaktion des ausfliessenden Wassers. Man kann auch schreiben

$$6) \quad R = 2\gamma \cdot \alpha \cdot F \cdot \frac{w^2}{2g},$$

und wenn man noch  $w^2 = \varphi^2 \cdot 2gh$  setzt,

$$7) \quad \begin{aligned} R &= 2 \cdot \gamma \cdot \alpha \cdot F \cdot \varphi^2 \cdot h \\ &= 2 \cdot \varphi \cdot \mu \gamma \cdot F \cdot h, \end{aligned}$$

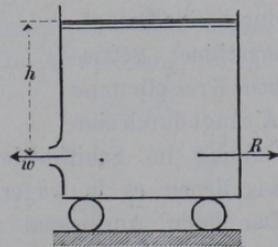
oder mit  $Q = \alpha F w$  als sekundl. Ausflussmenge

$$8) \quad R = \frac{\gamma}{g} Q w.$$

Findet (wie in Fig. 292) an der Mündung keine Einschnürung statt, so dass  $\mu = \varphi$ , so ist, weil  $\varphi^2$  nicht viel von der Einheit abweicht,  $R$  fast das Doppelte der hydrostatischen Druckkraft  $\gamma F h$  gegen die Mündung, wie S. 265 gesagt wurde.

Hat  $w$  wagerechte Richtung, so wird, mit  $\delta = 90^\circ$ ,  $R = 2\varphi \cdot \mu \cdot \gamma \cdot F \cdot h$  ebenfalls wagerecht (Fig. 293).

Fig. 293.



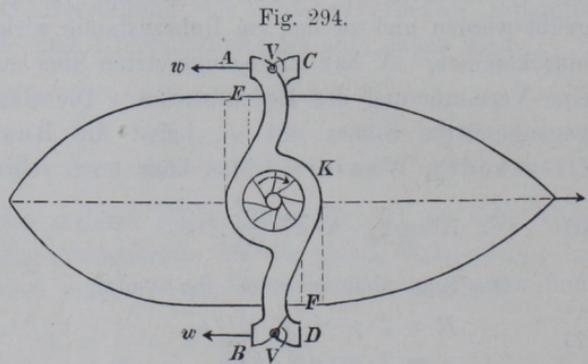
Eine gleichförmige Verschiebung des Gefäßes ändert an den Kräften nichts. Es wird  $w = \varphi \sqrt{2gh}$  die scheinbare (relative) Ausflussgeschwindigkeit des Wassers in Bezug auf das Gefäß; macht man daher das Gefäß leicht beweglich, so wird der Seitendruck  $R$  des ausfliessenden Wassers einen ebenso grossen Widerstand überwinden können.

**Beispiel:** Auf einem Eisenbahnwagen sei ein Wasserbehälter angebracht, der unten eine Seitenöffnung mit gut abgerundetem Mundstücke von  $0,12$  m Durchmesser enthält. Der Wasserspiegel liege um  $h = 2$  m über der Öffnung. Das ausfliessende Wasser erzeugt eine wagerechte Druckkraft gegen das Gefäss und somit gegen den Wagen von  $2 \cdot 1000 \cdot 0,12^2 \frac{\pi}{4} \cdot 0,96^2 \cdot 2 = \text{rund } 42 \text{ kg}$ .

Rechnet man die Widerstandsziffer des Eisenbahnwagens  $= 1/400$  (s. 1. Theil, S. 255), so darf der Wagen ein Gesamtgewicht  $= 400 \cdot 42 = 16\,800 \text{ kg}$  haben, wenn er durch den Wasserausfluss in langsamer Bewegung erhalten werden soll.

Vorstehendes Beispiel entspricht keinem wirklichen Gebrauche, stützt sich vielmehr nur auf künstliche Annahmen. Thatsächliche Anwendung aber findet der Wasserstrahl zum Betriebe von Schiffen, sog. Strahlschiffen

(Reaktionsschiffen) (Fig. 294). Eine durch eine Dampfmaschine getriebene Kreiselpumpe  $K$  saugt durch eine



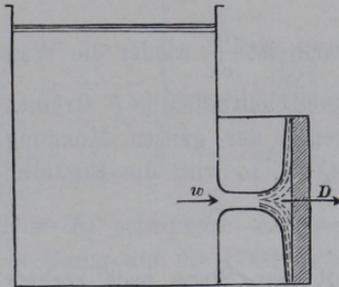
Öffnung im Schiffsboden Wasser an und presst dies in Röhren, aus denen es in wagerechter Richtung zur Ausströmung gelangt. Der beim Ausfliessen auf die Röhren und somit auf das Schiff ausgeübte Rückdruck dient zum Forttreiben des Schiffes. Beim Vorwärtsfahren (nach rechts) strömt das Wasser nach rückwärts aus den Öffnungen  $A$  und  $B$ . Durch Umstellung von Klappen  $V$  kann man den Ausfluss auch bei  $C$  und  $D$  bewirken, um das Schiff zeitweise rückwärts zu treiben. Ausfluss bei  $A$  und  $D$  bewirkt Rechtsdrehung, bei  $B$  und  $C$  Linksdrehung des Schiffes ohne Zuhilfenahme des Steuers. Die hieraus ersichtliche gute

Steuerfähigkeit des Strahlschiffes hat zur Folge gehabt, dass diese Schiffsanordnung, welche sich für den gewöhnlichen Schiffsverkehr nicht vortheilhaft erwies, in neuerer Zeit für Rettungsboote Anwendung gefunden hat (s. Génie civil, 11. September 1892, S. 332 und 27. April 1895, S. 407; Engineering 11. Oktober 1895, S. 411). Ausflussrohre *E* und *F* (punktirt) geben die Möglichkeit, auch in der Querrichtung Triebkräfte wirksam zu machen, was in der Nähe eines hülfsbedürftigen Schiffes von Wichtigkeit sein kann.

**1) Druck eines Wasserstrahles gegen eine denselben auffangende Fläche.**

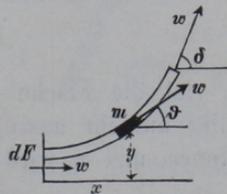
Trifft ein Wasserstrahl mit der Geschwindigkeit *w* in der Nähe der Mündung auf eine feste Fläche (Fig. 295), so erfährt der Strahl eine Änderung seiner Form, indem die einzelnen Stromfäden abgelenkt werden; da nun zu jeder Grössen- oder Richtungsänderung der Geschwindigkeit eine Kraft erforderlich ist, so muss die feste Fläche auf den Wasserstrahl Kräfte ausüben.

Fig. 295.



Die Fläche sei zunächst rechtwinklig zu *w*, dann wird der Strahl sich nach allen Seiten auf der Fläche ausbreiten und wird nahezu einen Umdrehungskörper bilden, dessen Achse in der Mittellinie des Strahles liegt. Die Abweichung, welche durch die Einwirkung der Schwere herbeigeführt wird, kann meist vernachlässigt werden; dann darf man annehmen, dass die Wassertheilchen ihre Geschwindigkeit nur der Richtung nach ändern. Dort, wo die Achse des Strahles die Fläche trifft, entstehen Wirbelbewegungen, die keine besondere Beachtung erfordern.

Fig. 296.



Ein Längentheilchen eines Stromfadens (Fig. 296) habe wieder, wie auf S. 265, die Masse

$$m = \frac{\gamma}{g} \alpha \cdot dF \cdot w dt$$

und die Koordinaten  $x$  und  $y$ , dann wird

$$\frac{dx}{dt} = w \cos \vartheta, \quad \frac{dy}{dt} = w \sin \vartheta;$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d(w \cos \vartheta)}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d(w \sin \vartheta)}{dt},$$

mit den Ergänzungskräften

$$- m \cdot \frac{d(w \cos \vartheta)}{dt} \quad \text{und} \quad - m \frac{d(w \sin \vartheta)}{dt}.$$

Letztere wird durch den Beitrag eines anderen Stromfadens, der zum betrachteten symmetrisch ist, aufgehoben; die Ergänzungskraft in der  $x$ -Richtung wird für den ganzen Stromfaden, wenn derselbe eine gesammte Ablenkung  $\delta$  erfährt,

$$dX = - \frac{m}{dt} \int_0^\delta d(w \cos \vartheta) = - \frac{m}{dt} w (\cos \delta - 1) = \frac{m}{dt} w (1 - \cos \delta).$$

Darin ist  $\frac{m}{dt}$  wieder die Wassermasse, welche sekundlich durch den Querschnittstheil  $dF$  strömt. Ist nun  $Q$  die sekundliche Wassermenge der ganzen Mündung in  $\text{cbm}$ , die sekundliche Masse also  $\gamma Q : g$ , so wird die Ergänzungskraft für den ganzen Strahl

$$X = \frac{\gamma}{g} Q w (1 - \cos \delta)$$

mit dem Sinne nach rechts; ebenso gross, aber dem Strahl entgegen gerichtet, ist die äussere Kraft, die die Fläche auf den Strahl behufs der Ablenkung ausübt, während die Kraft  $D$ , mit welcher der Strahl auf die Fläche wirkt, nach dem Satze der Wechselwirkung wieder mit  $X$  völlig übereinstimmt, d. h.

$$1) \quad D = \frac{\gamma}{g} \cdot Q \cdot w (1 - \cos \delta).$$

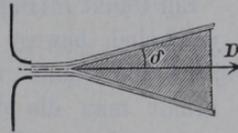
Ist die Fläche eben und gross genug, dass der Strahl sich völlig auf ihr auszubreiten vermag, so kann man  $\delta = 90^\circ$  annehmen, und es wird dann

$$2) \quad D = \frac{\gamma}{g} Q w,$$

d. h. ebenso gross wie (nach Gl. 8, S. 267) der Rückdruck des ausfliessenden Wassers auf das Gefäss. Befestigt man daher die Platte an dem Gefässe, so geben der Rückdruck auf das Gefäss und der

Druck des Strahles gegen die Platte die Summe Null, so dass das Ganze, in wagerechtem Sinne leicht beweglich gemacht, nicht in Bewegung gerathen wird. Der Druck  $D$  des im Beharrungszustande befindlichen Strahles gegen die Platte ist (S. 267) fast doppelt so gross wie der Druck auf die Platte sein würde, wenn sie die Mündung verschlösse.

Fig. 297.



Wird der Strahl nach Fig. 297 gegen die Spitze eines Kegels geführt, so ist in Gl. 1 für  $\delta$  etwa der Neigungswinkel der Kegel­seiten gegen die Achse zu setzen.

Ist dem Strahl aber die hohle Seite einer Umdrehungsfläche entgegen gestellt (Fig. 298), so hat man in Gl. 1  $\cos \delta$  mit  $\cos(\pi - \delta) = -\cos \delta$  zu vertauschen, weil die Stromfäden im Ganzen um  $\pi - \delta$  abgelenkt werden, und es ist

Fig. 298.

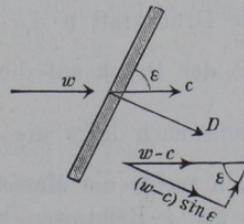
$$3) \quad D = \frac{\gamma}{g} Q w (1 + \cos \delta).$$

Weicht die Fläche mit der Geschwindigkeit  $c$  im Sinne des Strahles aus, so ist an Stelle von  $w$  in den vorstehenden Gleichungen selbstverständlich die scheinbare (relative) Geschwindigkeit  $w - c$  des Strahles in Bezug auf die Fläche einzuführen, es wird aus Gl. 1:

$$4) \quad D = \frac{\gamma}{g} Q (w - c) (1 - \cos \delta).$$

Ist die den Strahl auffangende, mit der Geschwindigkeit  $c$  ( $\parallel w$ ) ausweichende Ebene gegen die Richtungen von  $w$  und  $c$  um den Winkel  $\varepsilon$  geneigt, so zerlegt man die scheinbare Geschwindigkeit  $w - c$  in die Seitengeschwindigkeiten  $(w - c) \cos \varepsilon$  parallel der Ebene und  $(w - c) \sin \varepsilon$  rechtwinklig dazu. Erstere hat, abgesehen von der Reibung, die wir vernachlässigen, keine Einwirkung auf die Ebene, und letztere bewirkt, da vollkommene Flüssigkeiten nur rechtwinklige Druckkräfte ausüben, einen Normaldruck

Fig. 299.



$$5) \quad D = \frac{\gamma}{g} Q (w - c) \sin \varepsilon.$$

### m) L. Eulers Grundgleichungen für die Bewegung tropfbarflüssiger Körper ohne Reibung.

Ein Punkt  $P$  (Fig. 300) des flüssigen Körpers, dessen Koordinaten  $x, y, z$  sind, bewege sich während des Zeittheilchens  $dt$  nach  $P_1$ : projiziert man dann  $PP_1 = ds$  in der Richtung der drei Achsen, so erhält man die drei Projektionen  $dx, dy$  und  $dz$ . Das Parallelepiped dieser drei Seiten enthalte das Massentheilchen

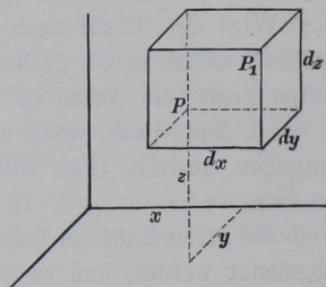
$$m = \frac{\gamma}{g} dx \cdot dy \cdot dz.$$

Die Geschwindigkeit desselben sei

$$w = \frac{ds}{dt}, \text{ zerlegt in}$$

$$w_x = \frac{dx}{dt}; \quad w_y = \frac{dy}{dt}; \quad w_z = \frac{dz}{dt}.$$

Fig. 300.



Der bei der Bewegung herrschende (also hydraulische) Druck im Punkt  $P$  werde  $p$  genannt. Dieser Druck  $p$  ist an einer Stelle  $P$  nach allen Richtungen derselbe (vergl. S. 157), wechselt aber in dem flüssigen Körper von Ort zu Ort und ist auch im Allgemeinen mit der Zeit veränderlich. Auf das Massentheilchen wirke eine Massenkraft  $m \cdot R$  mit den Seitenkräften  $m \cdot X, m \cdot Y$  und  $m \cdot Z$ .

In der Richtung der  $x$ -Achse wirkt auf das Massentheilchen  $m$  auf der linken Seite des Parallelepipedes mit dem Sinne nach rechts die Druckkraft  $p \cdot dy \cdot dz$ , auf der rechten Seite des Parallelepipedes, wo der Druck auf die Flächeneinheit  $p + \frac{\partial p}{\partial x} dx$  beträgt, mit dem Sinne nach links die Kraft  $\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dy \cdot dz$ . Endlich wirkt nach rechts die Massenkraft  $m \cdot X$ . Daher wird die Beschleunigung in der  $x$ -Richtung:

$$\frac{dw_x}{dt} = X - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx \cdot dy \cdot dz}{m} \quad \text{oder, weil}$$

$$m = \frac{\gamma}{g} \cdot dx \cdot dy \cdot dz:$$

$$1) \quad \frac{dw_x}{dt} = X - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{g}{\gamma}.$$

Die Geschwindigkeit  $w$  in dem Punkte  $P$  des flüssigen Körpers ist nun im Allgemeinen eine Funktion von  $x$ ,  $y$ ,  $z$  und  $t$ , und weil bei der Bewegung von  $P$  nach  $P_1$  sich alle diese vier Grössen ändern, so ist  $dw_x$  in Gl. 1 ein totales Differential, mithin

$$dw_x = \frac{\delta w_x}{\delta x} dx + \frac{\delta w_x}{\delta y} dy + \frac{\delta w_x}{\delta z} dz + \frac{\delta w_x}{\delta t} dt.$$

Hiernach wird aus Gl. 1:

$$\frac{g}{\gamma} \frac{\delta p}{\delta x} = X - \left\{ \frac{\delta w_x}{\delta x} \frac{dx}{dt} + \frac{\delta w_x}{\delta y} \frac{dy}{dt} + \frac{\delta w_x}{\delta z} \frac{dz}{dt} + \frac{\delta w_x}{\delta t} \right\}$$

oder auch, weil

$$\frac{dx}{dt} = w_x; \quad \frac{dy}{dt} = w_y; \quad \frac{dz}{dt} = w_z;$$

$$2) \quad \frac{g}{\gamma} \frac{\delta p}{\delta x} = X - \left\{ w_x \frac{\delta w_x}{\delta x} + w_y \frac{\delta w_x}{\delta y} + w_z \frac{\delta w_x}{\delta z} + \frac{\delta w_x}{\delta t} \right\}$$

und ebenso für die beiden anderen Achsenrichtungen:

$$3) \quad \frac{g}{\gamma} \frac{\delta p}{\delta y} = Y - \left\{ w_x \frac{\delta w_y}{\delta x} + w_y \frac{\delta w_y}{\delta y} + w_z \frac{\delta w_y}{\delta z} + \frac{\delta w_y}{\delta t} \right\},$$

$$4) \quad \frac{g}{\gamma} \frac{\delta p}{\delta z} = Z - \left\{ w_x \frac{\delta w_z}{\delta x} + w_y \frac{\delta w_z}{\delta y} + w_z \frac{\delta w_z}{\delta z} + \frac{\delta w_z}{\delta t} \right\}.$$

In den Raum des Parallelepipeds  $PP_1$  tritt während der Zeit  $dt$  links durch den Querschnitt  $dy \cdot dz$  mit der Geschwindigkeit  $w_x$  die Raummenge ein:  $dy \cdot dz \cdot w_x \cdot dt$ , rechts aber wegen der Geschwindigkeit  $w_x + \frac{\delta w_x}{\delta x} dx$  die Menge  $dy \cdot dz \cdot \left( w_x + \frac{\delta w_x}{\delta x} dx \right) \cdot dt$  aus; der Überschuss des Abflusses ist also

$$dy \cdot dz \cdot \frac{\delta w_x}{\delta x} \cdot dx \cdot dt.$$

Der Überschuss des Abflusses in der  $y$ -Richtung beträgt

$$dx \cdot dz \cdot \frac{\delta w_y}{\delta y} \cdot dy \cdot dt,$$

in der  $z$ -Richtung:

$$dx \cdot dy \cdot \frac{\delta w_z}{\delta z} \cdot dz \cdot dt.$$

Der Gesamt-Überschuss beträgt mithin:

$$dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt \cdot \left( \frac{\delta w_x}{\delta x} + \frac{\delta w_y}{\delta y} + \frac{\delta w_z}{\delta z} \right).$$

Unter der Annahme nun, dass sich innerhalb des flüssigen Körpers kein leerer Raum befinde und dass die Flüssigkeit nicht zusammendrückbar sei, muss der das Massentheilchen enthaltende Raum unveränderlich, d. h. vorstehender Gesamt-Überschuss Null sein, oder

$$5) \quad \frac{\delta w}{\delta x} + \frac{\delta w_y}{\delta y} + \frac{\delta w_z}{\delta z} = 0.$$

Diese Gleichung heisst die *Kontinuitäts-Gleichung*.

Man kann letztere Gleichung auch noch in anderer Weise ableiten: Der Rauminhalt des Massentheilchens  $m$  ist  $dx \cdot dy \cdot dz$ ; soll dieser mit der Zeit sich nicht ändern, so muss

$$6) \quad \frac{\delta(dx \cdot dy \cdot dz)}{\delta t} = 0 \text{ sein; oder}$$

$$7) \quad dy \cdot dz \frac{\delta dx}{\delta t} + dx \cdot dz \cdot \frac{\delta dy}{\delta t} + dx \cdot dy \cdot \frac{\delta dz}{\delta t} = 0.$$

Darin bedeutet  $\delta dx$  die Zunahme der Länge  $dx$  während der Zeit  $dt$ . Da nun die Geschwindigkeit in der  $x$ -Richtung im Punkte  $P$  mit den Koordinaten  $x, y, z$  die Grösse  $w_x$ , im Punkte  $P_1$  aber die Grösse  $w_x + \frac{\delta w_x}{\delta x} dx$  hat, so muss sich die Kante  $dx$  während der Zeit  $dt$  um  $\frac{\delta w_x}{\delta x} dx \cdot dt$  vergrössern, mithin ist obiges

$$\delta dx = \frac{\delta w_x}{\delta x} \cdot dx \cdot dt; \text{ ebenso}$$

$$\delta dy = \frac{\delta w_y}{\delta y} \cdot dy \cdot dt \text{ und}$$

$$\delta dz = \frac{\delta w_z}{\delta z} \cdot dz \cdot dt.$$

Hiernach wird aus Gl. 7:

$$dx \cdot dy \cdot dz \left( \frac{\delta w_x}{\delta x} + \frac{\delta w_y}{\delta y} + \frac{\delta w_z}{\delta z} \right) = 0,$$

was ebenfalls zu Gl. 5 führt.

Gleichungen 2—7 sind die allgemeinen Gleichungen für die Bewegung reibungsloser tropfbar-flüssiger Körper, welche Leonhard Euler (geb. 1707 zu Basel, gest. 1783 zu Petersburg) im Jahre 1755 aufgestellt hat.

Es soll nun angenommen werden, dass der Beharrungszustand eingetreten sei, d. h., dass an jeder Stelle des Gefässes oder Raumes, in dem die Flüssigkeit sich bewegt, die Geschwindigkeit  $w$  und der Druck  $p$  von der Zeit unabhängig, dass also  $w$  und  $p$  nur Funktionen von  $x, y$  und  $z$  seien. Ebenso sollen auch die Beschleunigungen  $X, Y$  und  $Z$  nur Funktionen des Ortes sein.

Multipliziert man Gl. 1 mit  $w_x dt = dx$ , so wird

$$w_x \cdot dw_x = X \cdot dx - \frac{g}{\gamma} \frac{\delta p}{\delta x} dx \quad \text{oder}$$

$$\frac{d(w_x^2)}{2} = X dx - \frac{g}{\gamma} \frac{\delta p}{\delta x} dx.$$

Ebenso gilt:

$$\frac{d(w_y^2)}{2} = Y dy - \frac{g}{\gamma} \frac{\delta p}{\delta y} dy \quad \text{und}$$

$$\frac{d(w_z^2)}{2} = Z dz - \frac{g}{\gamma} \frac{\delta p}{\delta z} dz.$$

Weil nun  $p$  eine  $f(x, y, z)$ , so ist

$$\frac{\delta p}{\delta x} dx + \frac{\delta p}{\delta y} dy + \frac{\delta p}{\delta z} dz = dp;$$

mithin ergibt die Addition obiger drei Gleichungen, weil

$$w^2 = w_x^2 + w_y^2 + w_z^2;$$

$$d\left(\frac{w^2}{2}\right) = X dx + Y dy + Z dz - \frac{g}{\gamma} dp.$$

Ist nun an einer Stelle mit den Koordinaten  $x_0, y_0, z_0$  die Geschwindigkeit  $w_0$ , der Druck  $p_0$ , so ergibt die Integration

$$8) \quad \frac{w^2}{2} - \frac{w_0^2}{2} = \int_{x_0 y_0 z_0}^{x y z} (X dx + Y dy + Z dz) - \frac{g}{\gamma} (p - p_0).$$

In dem besonderen Falle des Ruhezustandes wäre  $w = w_0$ , auch ginge der hydraulische Druck  $p$  über in den hydrostatischen Druck  $p$ , und man hätte, in Übereinstimmung mit Gl. 2, S. 226:

$$0 = \int_{x_0 y_0 z_0}^{x y z} X dx + Y dy + Z dz - \frac{g}{\gamma} (p - p_0).$$

Hiernach kann man

$$\int_{x_0 y_0 z_0}^{x y z} X dx - Y dy + Z dz$$

vertauschen mit  $\frac{g}{\gamma} (p - p_0)$ , wenn  $p$  und  $p_0$  die hydrostatischen Drücke an den Stellen  $x, y, z$  und  $x_0, y_0, z_0$  sind, die den

gegebenen Massenkräften im Ruhezustand entsprechen würden. Durch deren Einführung vereinfacht sich Gl. 8 zu

$$\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} = \frac{p - p_0}{\gamma} - \frac{\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_0}{\gamma}.$$

Bezieht sich die Geschwindigkeit  $w_0$  auf einen freien Wasserspiegel, so ist dort der hydraulische Druck  $\mathfrak{p}_0$  gleich dem hydrostatischen Drucke  $p_0$ , mithin

$$\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} = \frac{p - \mathfrak{p}}{\gamma} \quad \text{oder}$$

$$9) \quad \frac{\mathfrak{p}}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} - \left( \frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} \right).$$

Wir haben hiermit das Gesetz der hydraulischen Druckhöhe (s. S. 260) auf anderem Wege erhalten.

Ist noch die Schwere die einzige wirkende Wasserkraft und richtet man die positive  $y$ -Achse lothrecht abwärts, so ist

$$p = p_0 + \gamma y \quad \text{also}$$

$$\frac{\mathfrak{p}}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + y - \left( \frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} \right).$$

Hat man also ein Gefäß, aus dem das Wasser durch eine um  $h$  unter dem Wasserspiegel liegende Öffnung mit der Geschwindigkeit  $w$  ausströmt und herrscht an der Mündung ein Gegendruck  $p_m$ , so ist auch der hydraulische Druck  $\mathfrak{p}$  dort  $= p_m$ , und man erhält für  $y = h$ :

$$\frac{p_m}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + h - \left( \frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} \right)$$

oder die bekannte Gleichung (S. 259)

$$\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} = h + \frac{p_0 - p_m}{\gamma}.$$

An die Stelle der Continuitätsgleichung (Gl. 5, S. 274) tritt hier

$$F_0 w_0 = F w.$$

## 2. Bewegung des Wassers in Röhren.

### a) Leitungswiderstand gerader cylindrischer Röhren.

Beim Durchfließen einer längeren Röhre vom Querschnitt  $F$  und der Länge  $l$  zeigt sich ein besonderer Widerstand, ein besonderer Druckhöhenverlust oder eine Widerstandshöhe  $z$ . Dieser