

Nun sind  $X, Y, Z$  die Projektionen von  $R$ ;  $dx, dy, dz$  diejenigen von  $ds$  auf die 3 Achsen, mithin ist

$$R \cos \alpha = X; \quad R \cos \beta = Y; \quad R \cos \delta = Z;$$

$$ds \cos \alpha_1 = dx; \quad ds \cos \beta_1 = dy; \quad ds \cos \delta_1 = dz.$$

Daher wird

$$R ds \cos \vartheta = X dx + Y dy + Z dz.$$

Weil nun für Kurventheilchen innerhalb einer Niveaufläche die Gl. 3 gilt, so muss

$$5) \quad R ds \cos \vartheta = 0, \quad \text{d. h. } \vartheta = 90^\circ$$

sein. Oder:

Eine Niveaufläche steht in jedem ihrer Punkte rechtwinklig zu der für den betreffenden Punkt gültigen Massenkraft  $R \cdot m$ . Diese Sätze sind von Leonhard Euler (geb. zu Basel 1707, gest. zu Petersburg 1783) im Jahre 1755 entwickelt worden.

Aus vorstehendem Satze folgt unmittelbar, dass, wenn die Schwere die einzige Massenkraft ist, die Niveauflächen wagerechte Ebenen sind (S. 168). Da die freie Oberfläche einer Flüssigkeit ebenfalls eine Niveaufläche sein muss, so finden auch die Entwicklungen über die Gestalt der freien Oberfläche (S. 194 und 196) hier noch eine festere Begründung.

## B. Bewegung flüssiger Körper.

### I. Ausfluss des Wassers aus Gefässen.

Wird in der Seitenwand eines mit Wasser gefüllten Gefässes (Fig. 251) bei  $A$  eine kleine Öffnung frei gemacht, so entsteht ein ausfliessender Wasserstrahl. Die einzelnen Wassertheilchen führen eine parabolische Wurfbewegung aus (Theil 1, S. 49). Ist  $w$  die wagerechte Geschwindigkeit, mit der ein Wassertheilchen bei  $A$

das Gefäß verlässt,  $a$  die Höhe von  $A$  über dem Boden,  $t$  die Zeit der Bewegung von  $A$  bis  $B$ , so wird unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes  $a = \frac{1}{2}gt^2$ ;  $b = wt$ , mithin

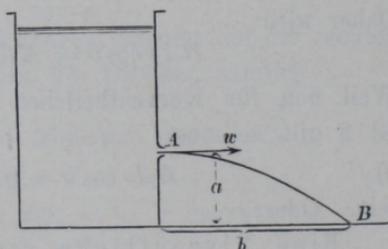
$$1) \quad \frac{b}{w} = \sqrt{\frac{2a}{g}},$$

so dass bei bekanntem  $a$  aus der Sprungweite  $b$  des Strahles die Ausflussgeschwindigkeit  $w$  berechnet werden kann.

War die Öffnung geschlossen, demnach alles im Gefässe befindliche Wasser in Ruhe, und macht man die Öffnung plötzlich frei, so wird die ganze im Gefässe befindliche Wassermasse in Beschleunigung gerathen; die Geschwindigkeit, mit der die einzelnen, auf einander folgenden Wassertropfen aus der Öffnung treten, ist nicht die gleiche, sondern eine allmählich wachsende; daher wächst auch die Sprungweite  $b$ . Jedoch lehrt die Erfahrung, dass die Veränderung von  $b$  und  $w$  sehr schnell erfolgt, dass sich schon nach sehr kurzer Zeit (meist schon nach 1 Sekunde) eine bestimmte Sprungweite  $b$  und somit eine bestimmte Geschwindigkeit  $w$  gebildet hat, die nun unverändert dieselbe bleibt, wenn der Wasserspiegel im Gefässe durch Zufluss stets auf gleicher Höhe erhalten wird. Gleichzeitig hiermit werden sich nun an allen Stellen des Gefässes dauernde Bewegungs- und Druckverhältnisse gebildet haben. Diesen Zustand nennt man **Beharrungszustand**. In allen nachfolgenden Untersuchungen nehmen wir an, dass der Beharrungszustand eingetreten sei und lassen die höchst verwickelten Verhältnisse vor dem Eintritte desselben, die meist noch nicht einmal 1 Sekunde währen, ausser Acht.

Zunächst wird das Wasser als eine vollkommen reibungslose Flüssigkeit angesehen, auch wird angenommen, dass das Gefäss an allen Stellen zwischen Wasserspiegel und Öffnung von Wasser erfüllt sei, keine leeren Räume enthalte. Unter welchen Bedingungen letztere vorkommen, wird später (S. 263) erörtert. Auch sollen plötzliche Querschnittsänderungen im Gefässe vorläufig noch nicht angenommen werden.

Fig. 251.



### a) Ideelle Ausflussgeschwindigkeit und Ausflussmenge einer Bodenöffnung.

Das Wasser ergiesse sich (Fig. 252) durch eine in wagerechter Ebene liegende Öffnung  $DC = F$ . Das Gefäß habe von der Mitte des Wasserspiegels bis zur Mitte der Ausflussöffnung eine ziemlich bestimmt ausgesprochene Mittellinie und verenge sich nach der Öffnung hin allmählich. Dann wird man annehmen können, dass die durch die Öffnung  $F$  austretenden Wassertheilchen mit gleichen Geschwindigkeiten durch den Öffnungs-Querschnitt hindurchgehen. Es tritt während eines Zeittheilchens  $dt$  ein prismatischer Wasserkörper  $F \cdot w \cdot dt$  unten aus. Dessen Masse sei das Massentheilchen

$$m = \frac{\gamma}{g} \cdot F \cdot w \cdot dt$$

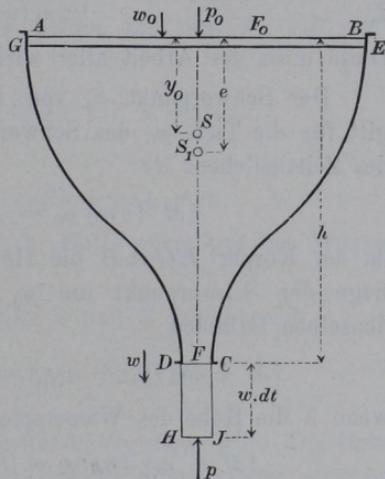
1)

$$= \frac{\gamma}{g} \cdot F_0 \cdot w_0 \cdot dt.$$

Das gleiche Massentheilchen muss nämlich oben verschwinden. Ist daher  $F_0$  der Wasserspiegel,  $w_0$  die Geschwindigkeit, mit der er sinkt, so muss offenbar  $F_0 \cdot w_0 \cdot dt = F \cdot w \cdot dt$  sein.

Wir wollen nun den Satz der Arbeit (1. Theil, S 143) auf die im Gefässe befindliche Wassermasse, u. zw. für ein Zeittheilchen  $dt$  anwenden. Hinsichtlich des Zuflusses im Wasserspiegel werde angenommen, dass der Spiegel zuerst während der Zeit  $dt$  um  $w_0 \cdot dt$ , d. h. von  $AB$  nach  $EG$  sinkt und dass dann plötzlich eine Wasserschicht  $ABEG$  zum Ersatze wieder aufgebracht werde. Der Wasserkörper  $EGDC$ , der zu Anfang und zu Ende des Zeittheilchens vorhanden war, habe die Masse  $M$  und wegen des Beharrungszustandes ein unveränderliches Arbeitsvermögen  $E$ . Die gesammte Wassermasse im Gefäss ist dann  $M + m$ , von denen  $m$  sich zu Anfang oben vorfindet, nach der Zeit  $dt$  aber unten. Die-

Fig. 252.



selbe Stelle des Gefässes wird nach einander von verschiedenen Massentheilchen eingenommen, die an dieser Stelle stets die gleiche Geschwindigkeit haben, nur durch andere vertauscht sind.

Zu Ende des Zeittheilchens  $dt$  ist das gesammte Arbeitsvermögen der Wassermasse  $M + m$  offenbar  $E + \frac{1}{2} m w^2$ , zu Anfang aber, wo die Masse  $m$  mit der Geschwindigkeit  $w_0$  sich oben befand:  $E + \frac{1}{2} m w_0^2$ . Daher entsteht in dem Zeittheilchen  $dt$  eine Zunahme an Arbeitsvermögen

$$2) \quad \frac{1}{2} m (w^2 - w_0^2).$$

Diese muss der Arbeit aller wirkenden Kräfte gleich sein.

Der Schwerpunkt  $S_1$  von  $M$  liege um  $e$  unter  $AB$ . Dann gilt für die Tiefe  $y_0$  des Schwerpunktes  $S$  von  $M + m$  zu Anfang des Zeittheilchens  $dt$ :

$$(M + m) y_0 = M e + m \cdot \frac{1}{2} w_0 dt,$$

da der Körper  $EGAB$  die Höhe  $w_0 dt$  hat. Nach der Zeit  $dt$  liege der Schwerpunkt um  $y_0 + dy_0$  unter  $AB$ , dann ist aus denselben Gründen

$$(M + m) (y_0 + dy_0) = M e + m (h + \frac{1}{2} w dt),$$

wenn  $h$  die Höhe des Wasserspiegels über der Öffnung. Daher wird

$$(M + m) dy_0 = m (h + \frac{1}{2} w dt - \frac{1}{2} w_0 dt)$$

und, wenn man rechts die unendlich kleinen Grössen gegen  $h$  vernachlässigt,  $(M + m) dy_0 = m h$ . Das Gewicht von  $M + m$  verrichtet also in der Zeit  $dt$  die Arbeit (1. Theil, S. 139)

$$(M + m) g dy_0 = m g h.$$

Steht nun der Wasserspiegel unter einem Drucke  $p_0$ , die Öffnung unter dem Drucke  $p$ , so verrichten die Kräfte  $p_0 F_0$  und  $p F$  während der Zeit  $dt$  die Arbeiten

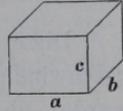
$$p_0 F_0 w_0 dt - p F w dt,$$

was wegen Gl. 1 zu schreiben ist  $m g \frac{p_0 - p}{\gamma}$ . Die Schwerkraft und die Drücke  $p_0$  und  $p$  leisten daher während der Zeit  $dt$  die Arbeit

$$3) \quad m g \left( h + \frac{p_0 - p}{\gamma} \right).$$

Die Druckkräfte des Gefässes gegen die Wassermasse verrichten keine Arbeit, da sie überall rechtwinklig zur Bewegungsrichtung stehen. Die inneren Kräfte im Wasser leisten aber ebenfalls keine Arbeit, denn sie sind reine Normalkräfte, die einem Gleiten keinen Widerstand entgegensetzen und nur bei einer Änderung des Rauminhaltes Arbeit verrichten könnten. Trennt man nämlich an einer Stelle, wo der Druck  $p'$  herrscht, ein kleines Parallelepiped  $a \cdot b \cdot c$  heraus (Fig. 253), so verrichten die Druckkräfte, wenn die Seiten sich um  $da$ ,  $db$ ,  $dc$  vergrössern, die Arbeit

Fig. 253.



$$- p' (b \cdot c \cdot da + a \cdot c \cdot db + a \cdot b \cdot dc).$$

Weil aber  $V = a \cdot b \cdot c$ , so ist

$$dV = b \cdot c \cdot da + a \cdot c \cdot db + a \cdot b \cdot dc;$$

mithin die Arbeit =  $- p' dV$ , d. h. Null, wenn, wie bei Wasser  $dV = 0$  ist.

Durch Gleichsetzung der Werthe 2 und 3 ergibt sich

$$I) \quad m \left( \frac{w^2}{2} - \frac{w_0^2}{2} \right) = mg \left( h + \frac{p_0 - p}{\gamma} \right);$$

welche als Grundgleichung aller Ausflussbewegungen gilt. Die linke Seite enthält die Zunahme, welche das Arbeitsvermögen der im Gefäss enthaltenen Wassermasse in der Zeit  $dt$  erleidet, die rechte Seite die gleichzeitig verrichtete Arbeit. Dabei bezeichnet  $m$  das Massentheilchen, welches während der Zeit  $dt$  unten ausströmt und gleichzeitig auch durch alle Querschnitte des Gefässes hindurchgeht. Später etwa zu berücksichtigende Widerstandsarbeiten oder Arbeitsverluste können in Gl. I leicht angebracht werden; aus diesem besonderen Grunde ist der gemeinsame Faktor  $m$  noch nicht gestrichen worden.

Will man nun aber  $w$  berechnen, so bedenke man, dass nach Gl. 1.

$$F_0 w_0 = F w, \quad \text{daher} \quad w_0 = w \frac{F}{F_0}.$$

Dann entsteht nach Gl. I

$$w^2 \left( 1 - \frac{F^2}{F_0^2} \right) = 2g \left( h + \frac{p_0 - p}{\gamma} \right),$$

$$4) \quad \text{oder } w = \sqrt{\frac{2g \left( h + \frac{p_0 - p}{\gamma} \right)}{1 - \frac{F^2}{F_0^2}}}.$$

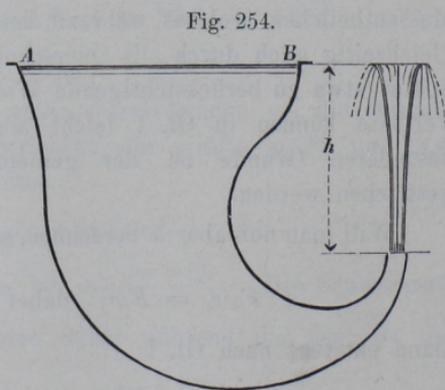
Diese Geschwindigkeit bezeichnen wir als ideale Ausflussgeschwindigkeit, weil bei ihrer Berechnung die Reibung vernachlässigt wurde; die wirkliche Geschwindigkeit ist kleiner (s. S. 237). Es ist  $p_0 - p$  der Druckunterschied zwischen Wasserspiegel und Öffnung,  $\frac{p_0 - p}{\gamma}$  die entsprechende Wassersäule; diese tritt zu  $h$  hinzu und bildet mit ihr die gesammte wirksame Druckhöhe. In den weitaus meisten Fällen ist  $p = p_0$ . Da es sich nun nicht empfiehlt, wegen der selten vorkommenden Fälle ungleicher Drücke stets mit einer unbequemen Formel zu rechnen, wollen wir  $\frac{p_0 - p}{\gamma}$  als mit in  $h$  steckend betrachten, so dass in Zukunft  $h$  die ganze wirksame Druckhöhe bedeuten soll. Dann wird einfacher

$$5) \quad w = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{F^2}{F_0^2}}}.$$

Da diese Formel nur eine ideale ist und noch der Berichtigung bedarf, so kommt es bei ihrer Ausrechnung nicht auf grosse Genauigkeit an. Ist daher, wie in den meisten Fällen, die Öffnung  $F$  klein gegen den Wasserspiegel  $F_0$ , so kann in Gl. I  $w_0^2$  gegen  $w^2$  oder in Gl. 5 die Grösse  $F^2 : F_0^2$  gegen 1 vernachlässigt und einfach

$$6) \quad w = \sqrt{2gh}$$

gesetzt werden. Hiernach ist die ideale Ausflussgeschwindigkeit gleich der Fallgeschwindigkeit, welche einer Fallhöhe gleich der wirksamen Druckhöhe entspricht; oder die Geschwindig-



keitshöhe des Ausflusses ist gleich der wirksamen Druckhöhe  $h$ .

Die vorstehenden Formeln gelten auch noch für den Fall der Fig. 254, wo der Strahl lothrecht aufwärts austritt. Hierin liegt auch eine einfache Prüfung der Rechnung; denn der mit der Geschwindigkeit  $w$  austretende Strahl muss ohne Widerstände die Höhe  $\frac{w^2}{2g} = h$  erreichen, d. h. zur Höhe des Wasserspiegels  $AB$  ansteigen. Reibung des Wassers im Gefäss und Luftwiderstand ausserhalb desselben vermindern die Steighöhe (s. S. 289).

Taucht das Gefäss nach Fig. 255 in ein Unterwasser ein, so ist die Eintauchungstiefe als eine Gegendruckhöhe aufzufassen, so dass als wirksame Druckhöhe nur der Höhenunterschied  $h$  der beiden Wasserspiegel gilt.

Da in jedem Zeittheilchen  $dt$  eine Raummenge  $F \cdot w \cdot dt$  austritt, so ist die ideelle sekundliche Ausflussmenge in Raumeinheiten ( $\text{cbm}$ )

$$7) \quad Q = F \cdot w = F \sqrt{2gh}.$$

### b) Ideelle Ausflussmenge einer Seitenöffnung.

Befindet sich die Öffnung in lothrechter Ebene, so gelten die vorstehenden Gleichungen auch für diesen Fall, wenn die Öffnung so geringe Höhenerstreckung hat (Fig. 256), dass man für alle Punkte der Öffnung die gleiche Ausflussgeschwindigkeit  $w$  annehmen darf, so dass der ausfliessende Wasserkörper wiederum ein Prisma bildet. Es passt für diesen Fall die Entwicklung der Gl. I (S. 231) vollständig, wenn man dabei die Höhe  $h$  vom Wasserspiegel bis zum Schwerpunkte der Öffnung rechnet.

Hat die Öffnung aber eine grössere Höhenerstreckung, so ist die Annahme einer überall gleichen Geschwindigkeit nicht mehr

Fig. 255.

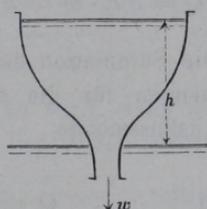
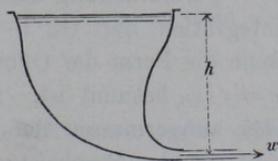


Fig. 256.



zulässig. Man denkt sich nun (Fig 257) aus der Öffnung  $F$  einen wagerechten Streifen von der Höhe  $dz$ , der Breite  $x$  und der Fläche  $dF = x \cdot dz$ , welcher um  $z$  unter dem Wasserspiegel liegt, herausgenommen, berechnet für diesen Streifen die Ausflussgeschwindigkeit  $w = \sqrt{2gz}$  und die sekundliche Ausflussmenge in Raumeinheiten (cbm)

$$dQ = dF \cdot w = dF \cdot \sqrt{2gz}.$$

Die Summation der Ausflussmengen für die sämtlichen Streifen giebt dann die gesammte Ausflussmenge

$$1) \quad Q = \sqrt{2g} \int_{z=h}^{z=H} x \sqrt{z} dz,$$

wenn Ober- und Unterkante der Öffnung um  $h$  bzw.  $H$  unter dem Wasserspiegel liegen. Die Geschwindigkeit  $w = \sqrt{2gz}$  lässt sich durch eine Parabel  $ABC$  mit lothrechter Achse und vom Parameter  $g$  darstellen. Die sekundliche Wassermenge ist offenbar ein prismatischer Wasserkörper, dessen Querschnitt die Ausflussöffnung, der aber aussen nicht rechtwinklig, sondern durch eine parabolische Cylinderfläche  $BC$ , rechtwinklig zur Bildebene, begrenzt ist.

**Vereinfachung der Berechnung.** Die Integration der Gl. 1 ist nur möglich, wenn die Form der Öffnung gegeben, also  $x = f(z)$ , bekannt ist. Liegt die Öffnung aber einigermaßen tief unter Wasser, so lässt sich das Parabelstück  $BC$  annähernd mit einer Geraden vertauschen, eine mittlere Geschwindigkeit, eine mittlere Druckhöhe  $z_0$ , nämlich diejenige des Schwerpunktes  $S$  der Öffnung einführen.

Fig. 257.

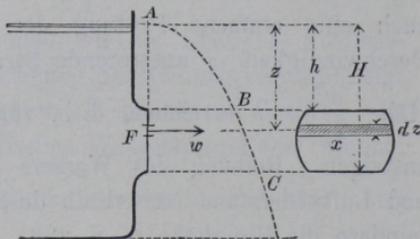
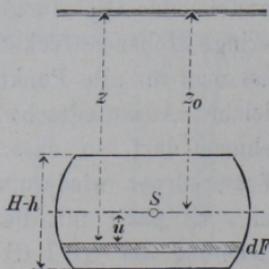


Fig. 258.



Liegt nämlich (Fig. 258) der Schwerpunkt  $S$  um  $z_0$  unter dem Wasserspiegel, so entspricht dem Streifen  $dF$  in der Tiefe  $u$  unter dem Schwerpunkte eine Druckhöhe  $z = z_0 + u$ . Dann ist dessen Ausflussmenge

$$\begin{aligned} dQ &= dF \sqrt{2gz} = dF \sqrt{2g(z_0 + u)} \\ &= dF \sqrt{2gz_0} \left(1 + \frac{u}{z_0}\right)^{1/2} \end{aligned}$$

oder, nach der binomischen Reihe

$$dQ = dF \sqrt{2gz_0} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{u}{z_0} - \frac{1}{8} \frac{u^2}{z_0^2} + \dots \right\}.$$

Ist nun die Höhe der Öffnung  $H - h \leq 1/2 z_0$ , so wird, wenn der Schwerpunkt ziemlich in der Mitte der Höhe liegt, der grösste Werth von  $u \leq 1/4 z_0$ , daher im Allgemeinen  $\frac{u}{z_0} \leq \frac{1}{4}$ , mithin

$$\frac{1}{8} \frac{u^2}{z_0^2} \leq \frac{1}{128},$$

also so klein, dass man das dritte Glied der Reihe vernachlässigen kann. Benutzt man daher von der binomischen Reihe nur die beiden ersten Glieder, so wird

$$\begin{aligned} dQ &= \sqrt{2gz_0} \left\{ dF + \frac{1}{2} \frac{dF \cdot u}{z_0} \right\} \quad \text{und} \\ Q &= \sqrt{2gz_0} \left\{ F + \frac{1}{2z_0} \int dF \cdot u \right\}. \end{aligned}$$

Es ist aber in Bezug auf den Schwerpunkt  $\int dF \cdot u = 0$ , also

$$2) \quad Q = F \sqrt{2gz_0}.$$

Diese von der Form der Öffnung ganz unabhängige, daher sehr bequeme Gleichung ist also anwendbar, wenn

$$2(H - h) \leq z_0,$$

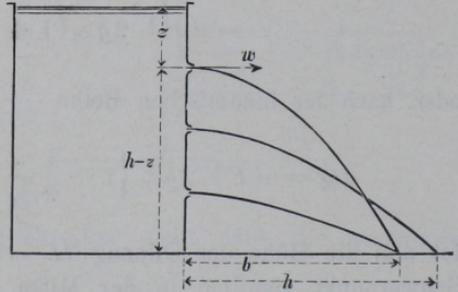
d. h. wenn die Tiefe des Schwerpunktes unter Wasser mindestens gleich der doppelten Höhe der Öffnung ist.

**Beispiel:** Ein prismatisches Gefäss stehe auf wagrechtem Boden und sei bis zu einer Höhe  $h$  mit Wasser gefüllt. In welcher Tiefe  $z$  unter Wasser muss eine kleine Öffnung angebracht werden, damit der Strahl möglichst grosse Sprungweite  $b$  habe? Je tiefer man die Öffnung legt, um so grösser wird  $w$ , um so kleiner aber die Höhenentwicklung der Parabel, und umgekehrt. Mit  $w = \sqrt{2gz}$  wird Gl. 1, S. 228:

$$b = 2 \sqrt{(h-z)z}.$$

Hierin sind  $z$  und  $h-z$  vertauschbar. Eine Öffnung in der Tiefe  $z = \frac{1}{4}h$  giebt also dieselbe Sprungweite wie eine solche in  $z = \frac{3}{4}h$ . Seinen grössten Werth erreicht aber  $b$  für  $z = \frac{1}{2}h$ . Denn  $(h-z)z$  ist der Inhalt eines Rechtecks vom Umfange  $2h$ . Ein Rechteck von gegebenem Umfange hat aber als Quadrat (von der Seite  $\frac{1}{2}h$ ) den grössten Inhalt, nämlich  $\frac{1}{4}h^2$ , mithin ergiebt  $z = \frac{1}{2}h$ ,  $b_{max} = h$ . Es entsteht dann die Wurfparabel grösster Wurfweite (1. Theil, S. 51), welche den Boden unter  $45^\circ$  schneidet.

Fig. 259.



**Rechteckige Öffnung.** Mit unveränderlichem  $x = b$  wird Gl. 1, S. 234:

$$3) \quad Q = b \sqrt{2g} \int_h^H z^{1/2} dz = \frac{2}{3} b \sqrt{2g} \{H^{3/2} - h^{3/2}\}.$$

Reicht die Öffnung bis zum Wasserspiegel, so hat man einen freien Überfall, und es wird mit  $h = 0$

$$4) \quad Q = \frac{2}{3} b \sqrt{2g} H^{3/2} = \frac{2}{3} b H \sqrt{2gH}.$$

**Beispiel:** Für die Schützenöffnung eines Gerinnes (Fig. 260) sei  $b = 1$  m,  $h = 1,4$  m,  $H = 2$  m, dann ist nach Gl. 3:

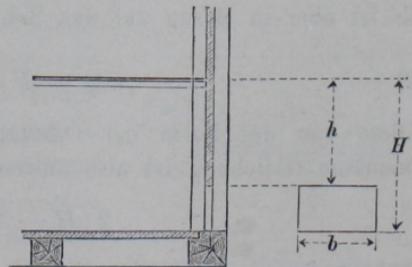
$$Q = \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 4,43 \{2,83 - 1,66\} \\ = 3,455 \text{ cbm/s.}$$

Es ist in diesem Falle  $2(H-h) = 1,2$  m,  $z_0 = 1,7$  m, und die Annäherungsformel Gl. 2, S. 235 liefert:

$$Q = 0,6 \cdot 4,43 \cdot \sqrt{1,7} = 3,466 \text{ cbm/s.}$$

der Unterschied beider Rechnungen ist nur unerheblich.

Fig. 260.



Sogar beim freien Überfalle, wo die Anwendung der Gl. 2 gar keine Berechtigung mehr hat, liefert letztere

$$Q = bH\sqrt{2g \cdot 0,5H} = 0,707 bH\sqrt{2gH}, \text{ w\u00e4hrend Gleichung 4 ergibt:}$$

$$0,667 bH\sqrt{2gH}.$$

Also auch in diesem \u00e4ussersten Falle betr\u00e4gt der Unterschied nur 6%.

**Trapezf\u00f6rmige \u00d6ffnung.** Nach Fig. 261 ist

$$\frac{x - b}{a - b} = \frac{z - h}{H - h}, \text{ oder}$$

$$x = b + \frac{a - b}{H - h}(z - h),$$

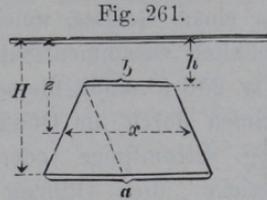


Fig. 261.

daher nach Gl. 1, S. 234

$$Q = \sqrt{2g} \int_h^H \left\{ b + \frac{a - b}{H - h}(z - h) \right\} z^{1/2} dz$$

$$= \sqrt{2g} \left\{ \frac{2}{3} \frac{bH - ah}{H - h} (H^{3/2} - h^{3/2}) + \frac{2}{5} \frac{a - b}{H - h} (H^{5/2} - h^{5/2}) \right\} \text{ oder}$$

$$5) Q = \frac{2\sqrt{2g}}{H - h} \left\{ \frac{bH - ah}{3} (H^{3/2} - h^{3/2}) + \frac{a - b}{5} (H^{5/2} - h^{5/2}) \right\}.$$

Diese Formel ist so verwickelt, dass man meist Gl. 2, S. 235 vorziehen wird.

**e) Wirkliche Ausflussgeschwindigkeit und Ausflussmenge.**

**Geschwindigkeits-Ziffer** (Geschwindigkeits-Koeffizient). Die bisherigen Formeln wurden entwickelt unter der Annahme reibungsloser Fl\u00fcssigkeit. F\u00fcr eine kleine \u00d6ffnung ergab sich

$$w = \sqrt{2gh}.$$

Die wirkliche Ausflussgeschwindigkeit ist wegen der Reibungswiderst\u00e4nde, die im Gef\u00e4ss auftreten, kleiner und wird erhalten, indem man den ideellen Werth noch mit einer Berichtigungs-ziffer  $\varphi$  multiplicirt. Dann ist in Wirklichkeit

$$1) w = \varphi \sqrt{2gh}.$$

Die Geschwindigkeitsziffer  $\varphi$  weicht nur wenig von der Einheit ab, beträgt bei kleiner Druckhöhe  $\varphi = 0,96$ , wächst aber nach Versuchen von Weisbach (Freiberg i. S.) mit zunehmender Druckhöhe bis auf 0,99 an. Wir werden in den weiteren Beispielen stets mit

$$2) \quad \varphi = 0,96 \quad \text{rechnen.}$$

**Einschnürung** (Kontraktion). **Ausflussziffer** (Ausflusskoeffizient).

In einem Gefässe, welches sich nach der Ausflussöffnung hin allmählich zusammenzieht, wie Fig. 252 (S. 229), Fig. 254 (S. 232), Fig. 256 (S. 233), fließen die einzelnen Wassertheilchen in parallelen Linien durch die Öffnung und bilden

sog. Stromlinien oder Wasserfäden,

welche die Öffnung rechtwinklig schneiden, so dass die sekundliche

Ausflussmenge  $Q = F \cdot w$  als ein Prisma vom Querschnitte  $F$  angesehen

werden kann. Befindet sich aber die

Öffnung in einer ebenen Wand (Fig. 262), so fließen die Wassertheilchen

in ganz verschiedenen Richtungen der Öffnung zu, wie in der Figur durch

Stromlinien angedeutet ist. Diejenigen

Theilchen, welche an der Wand entlang strömen, können ihre Bewegungsrichtung nicht plötzlich um  $90^\circ$  ändern (weil

jeder Knick in der Bahnlinie eine unendliche grosse Normalbeschleunigung, d. h. unendlich grosse Kräfte erfordern würde),

sondern gehen in gekrümmten Bahnlinien um die Innenkante der Öffnung herum. Erst ausserhalb des Gefässes in einer gewissen

Entfernung von dem Öffnungs-Querschnitte  $F$  haben sich die Wasserfäden wieder parallel gelagert und bilden einen Strahlquerschnitt  $\alpha F$

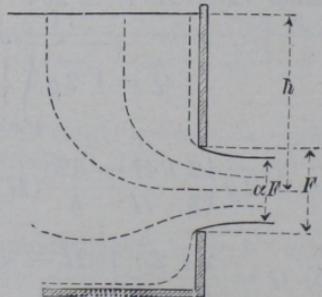
von der Geschwindigkeit  $w = \varphi \sqrt{2gh}$ , dessen sek. Wassermenge zu  $Q = \alpha F w = \alpha \varphi F \sqrt{2gh}$  berechnet werden kann.

Diese Erscheinung heisst die **Einschnürung** (Kontraktion) des Strahles, und die Grösse  $\alpha$ , mit der die Öffnung  $F$  multiplicirt

werden muss, um den Querschnitt  $\alpha F$  des zusammengezogenen Strahles zu liefern, heisst **Einschnürungs-Ziffer** (Kontraktions-

Koeffizient). Da aber in der letzten Gleichung für  $Q$  das Produkt

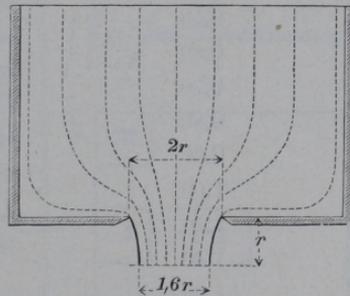
Fig. 262.



$\alpha\varphi$  zweier Berichtigungsziffern vorkommt, so kann man dieses Produkt zu einer Grösse  $\mu = \alpha\varphi$  vereinigen. Da nun die ideelle Ausflussmenge  $F\sqrt{2gh}$  (S. 233) noch mit  $\mu$  multiplicirt werden muss, um die wirkliche zu liefern, so nennt man  $\mu$  die **Ausfluss-Ziffer** (Ausfluss-Koeffizient).

Während die Geschwindigkeitsziffer nur wenig schwankt, auch nur wenig von der Einheit abweicht, ist die Einschnürungsziffer  $\alpha$  und somit auch die Ausflussziffer  $\mu = \alpha\varphi$  von vielen Umständen abhängig, z. B. auch von der Dicke und Beschaffenheit der Wandung, in welche die Öffnung eingeschnitten ist. Bestimmte Erscheinungen treten auf, wenn die Öffnung sich in dünner Wand befindet, oder wenn der Einfluss des Öffnungsrandes durch Zuschärfung nach Fig. 263 nahezu beseitigt ist. Befindet sich dann ausserdem die Öffnung verhältnismässig weit von anschliessenden Wänden entfernt, so kann man für diesen Grundfall der Einschnürung ziemlich bestimmt

Fig. 263.



$$\alpha = 0,64 \text{ und } \mu = 0,96 \cdot 0,64 = 0,61$$

setzen. Ist die Öffnung ein Kreis vom Halbmesser  $r$ , so erfolgt eine Einschnürung auf  $0,8r$ , u. zw. befindet sich dieselbe im Abstände  $r$  von der Mündung.

Über die **Ausflussziffern für rechteckige Seitenöffnungen** in dünner Wand haben die französischen Artillerie-Offiziere Poncelet und Lesbros 1828—1834 Versuche angestellt. Dabei wurde die Höhe des Wasserspiegels in einer solchen Entfernung von der Wand gemessen, wo der Spiegel noch wagerecht war, während er nach der Wand hin sich etwas senkte. Es kommt dabei wesentlich auf die Grösse der kleinsten Seite  $b$  der Öffnung an, gleichgültig, ob dieselbe lothrecht oder wagerecht gerichtet ist. Einige Ergebnisse der Versuche enthält folgende Tabelle.

Ausflussziffer  $\mu$  für rechtwinklige Seitenöffnungen in dünner Wand.

Höhe $h$ des Wasserspiegels über der Oberkante der Öffnung	Kleinste Seite der Öffnung		
	0,05 m	0,1 m	0,2 m
0,10	0,631	0,615	0,600
0,15	0,631	0,616	0,600
0,20	0,630	0,617	0,601
0,30	0,630	0,618	0,602
0,40	0,629	0,618	0,603
0,50	0,628	0,617	0,604
0,60	0,628	0,617	0,604
0,70	0,627	0,617	0,605
0,80	0,627	0,616	0,605
0,90	0,626	0,616	0,605
1,00	0,626	0,615	0,605
1,20	0,624	0,614	0,604
1,40	0,621	0,612	0,603
1,60	0,618	0,611	0,602
1,80	0,615	0,609	0,602
2,00	0,613	0,607	0,601
3,00	0,606	0,603	0,601

Mit diesen Ziffern ist  $\frac{2}{3} b \sqrt{2g} \{H^{3/2} - h^{3/2}\}$  (Gl. 3, S. 236) zu multipliciren. Ausführlichere Angaben findet man in Rühlmann's Hydromechanik.

**Schützenöffnungen.** Befindet sich die Öffnung nicht in dünner Wand, wird sie vielmehr, wie bei Schützen, durch rechtwinklig zugeschnittene Bretter gebildet, so kann man, wenn die Unterkante der Öffnung hoch über der Sohle liegt,  $\mu = 0,6$ , wenn sie mit dieser in gleicher Höhe liegt (Fig. 260),  $\mu = 0,68$  im Mittel setzen. Für das Beispiel auf S. 236 würde also mit  $\mu = 0,68$  die wirkliche sekundl. Ausflussmenge werden  $Q = 0,68 \cdot 3,455 = 2,35 \text{ cbm}$ .

**Unvollständige Einschnürung** (partielle Kontraktion) findet statt, wenn die Öffnung an einem Theil ihres Umfanges von Wänden eingeschlossen wird, so dass an diesen Stellen ein seitliches Zuströmen von Wasserfäden nicht vorkommt, also die Ursache

der Einschnürung theilweise fortfällt. Der Strahl bekommt in Folge dieser Ungleichmässigkeit eine abweichende Richtung, und die Ausflussmenge, also auch die Ausflussziffer wird grösser. In Figur 264 findet der Zufluss in der Querrichtung von der rechten Seite statt, nicht aber von der linken Seite. Ist  $u$  der ganze Umfang der Öffnung,  $m \cdot u$  der Theil des Umfanges, an welchem die Öffnung eingefasst ist, so ist nach Versuchen von Bidone (1831) und Weisbach die für solche Fälle anzuwendende Ausflussziffer  $\mu_p$  von der Grösse  $m$  abhängig. Ist  $\mu_0$  die Ausflussziffer unter sonst gleichen Verhältnissen für den Grundfall (dass die Wände nach allen Richtungen weit genug entfernt sind), d. h. für eine Öffnung I im Grundrisse (Fig. 264), so gilt

für rechteckige Öffnungen

$$3) \quad \mu_{pr} = \mu_0 (1 + 0,155 m),$$

für kreisförmige Öffnungen

$$4) \quad \mu_{pk} = \mu_0 (1 + 0,128 m).$$

Für die Öffnung II würde  $m = 1/4$ , daher

$$\mu_p = 1,039 \mu_0;$$

für die Öffnung III mit  $m = 1/2$

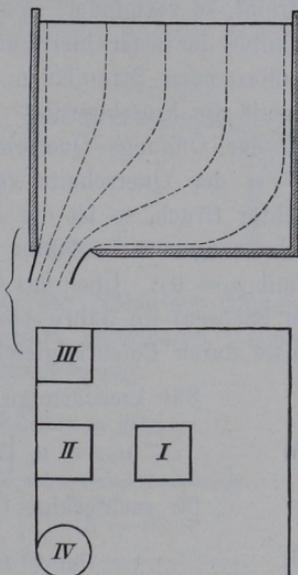
$$\mu_p = 1,078 \mu_0;$$

für die Öffnung IV mit  $m = 1/4$

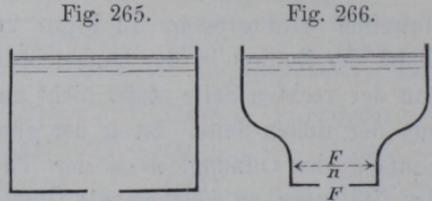
$$\mu_p = 1,032 \mu_0.$$

**Unvollkommene Einschnürung.** Auch wenn die Wandungen nicht ganz an den Rand der Öffnung herantreten, sondern sich von allen Seiten der Öffnung nur nähern, kann eine Verminderung der Einschnürung entstehen. Für den Grundfall war vorausgesetzt, dass die Öffnung von allen Wänden verhältnismässig weit entfernt sei, so dass binnenseits der Öffnung sich ein grosser Querschnitt,

Fig. 264.



daher eine geringe Geschwindigkeit fand (Fig. 265). Verengt sich aber das Gefäß nach der Mündung hin, so dass das Wasser der Öffnung mit nicht ganz geringer Geschwindigkeit zu-



strömt, so vermindert sich der Einfluss der in der Querrichtung zufließenden Stromfäden und damit die Einschnürung. Ist  $F$  der Öffnungs-Querschnitt,  $F/n$  der Querschnitt vor der Öffnung (Fig. 266), worin  $n$  ein echter Bruch, so ist die Ausflussziffer  $\mu_u$  bei unvollkommener Einschnürung zurückzuführen auf  $\mu_0$  in dem entsprechenden Grundfalle (mit  $n = 0$ ). Über das Verhältnis  $\mu_u : \mu_0$  hat Weisbach (Freiberg in Sachsen) im Jahre 1842 Versuche angestellt und deren Ergebnisse durch Potentialgleichungen dargestellt.

Für kreisförmige Öffnung ist nach Weisbach

$$5) \quad \mu_{uk} = \mu_0 \left[ 1 + 0,04564 (14,821^n - 1) \right],$$

für rechteckige Öffnung

$$6) \quad \mu_{ur} = \mu_0 \left[ 1 + 0,076 (9^n - 1) \right].$$

Dafür kann man annähernd setzen

bei kreisförmiger Öffnung

$$7) \quad \mu_{uk} = \mu_0 (1 + 0,126n + 0,06n^2 + 0,427n^3)$$

mit den Ergebnissen:

$$n = 0,1 \quad 0,2 \quad 0,3 \quad 0,4 \quad 0,5 \quad 0,6 \quad 0,7 \quad 0,8 \quad 0,9 \quad 1,0$$

$$\frac{\mu_{uk}}{\mu_0} = 1,014 \quad 1,031 \quad 1,055 \quad 1,087 \quad 1,131 \quad 1,189 \quad 1,264 \quad 1,358 \quad 1,473 \quad 1,613;$$

bei rechteckiger Öffnung

$$8) \quad \mu_{ur} = \mu_0 (1 + 0,175n + 0,06n^2 + 0,373n^3)$$

mit den Ergebnissen:

$$n = 0,1 \quad 0,2 \quad 0,3 \quad 0,4 \quad 0,5 \quad 0,6 \quad 0,7 \quad 0,8 \quad 0,9 \quad 1,0$$

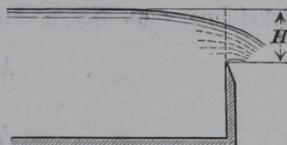
$$\frac{\mu_{ur}}{\mu_0} = 1,019 \quad 1,040 \quad 1,068 \quad 1,104 \quad 1,149 \quad 1,207 \quad 1,279 \quad 1,369 \quad 1,478 \quad 1,608.$$

**Ausflussziffer  $\mu$  für rechteckige Überfälle.** Aus Gl. 4, S. 236 wird

$$9) \quad Q = \frac{2}{3} \mu b H \sqrt{2gH}.$$

Darin bedeutet  $b$  die Breite des Überfalles,  $H$  die Höhe des Wasserspiegels über der Unterkante der Öffnung. Für die Ziffer  $\mu$  gilt nach Versuchen der französischen Artillerie-Offiziere Poncelet und Lesbros folgende Tabelle, wobei zu bemerken ist, dass die Öffnung sich in dünner lothrechter Wand befand und dass die Höhe  $H$  in mindestens 1 m Abstand von der Öffnung gemessen wurde. Der Spiegel senkt sich nämlich (Fig. 267) in der Nähe der Öffnung; in Folge dessen wird der Strahlquerschnitt vermindert. Dieser Einfluss findet in der Zahl  $\mu$  seine Berücksichtigung.

Fig. 267.



**Ausflussziffer  $\mu$  für rechteckige Überfälle in dünner lothrechter Wand.**

$H$	$b = 0,2 \text{ m}$	$b = 0,6 \text{ m}$
0,02 m	0,626	
0,04	0,611	
0,06	0,602	0,618
0,08	0,596	
0,10	0,593	0,606
0,15	0,590	0,600
0,20	0,585	0,593
0,30		0,587
0,40		0,587
0,50		0,587
0,60		0,585

**d) Widerstandshöhen und Widerstandsziffern.**

Auf S. 237 wurde die wirkliche Ausflussgeschwindigkeit  $w = \varphi \sqrt{2gh}$  aus der ideellen  $= \sqrt{2gh}$  abgeleitet durch Multiplikation der letzteren mit einer Geschwindigkeitsziffer  $\varphi < 1$ .

Mit Rücksicht darauf aber, dass bei der ideellen Ausflussbewegung die wirksame Druckhöhe  $h$  sich einfach in eine gleiche Geschwindigkeitshöhe  $\frac{w^2}{2g}$  umsetzte, kann man die Beziehung zwischen den beiden Geschwindigkeiten auch so auffassen, als ob ein gewisser Theil der wirksamen Druckhöhe  $h$  durch Reibung aufgezehrt und für die Erzeugung von Geschwindigkeit unbrauchbar gemacht würde. Bezeichnet man diesen Theil der wirksamen Druckhöhe mit  $z_0$ , so muss

$$h - z_0 = \frac{w^2}{2g} \quad \text{oder}$$

$$h = \frac{w^2}{2g} + z_0 \quad \text{sein.}$$

Da nun der Erfahrung zufolge

$$w = \varphi \sqrt{2gh}, \quad \text{also } h = \frac{1}{\varphi^2} \frac{w^2}{2g} \text{ ist, so wird}$$

$$z_0 = \frac{w^2}{2g} \left( \frac{1}{\varphi^2} - 1 \right).$$

Man setzt nun

$$1) \quad \frac{1}{\varphi^2} - 1 = \zeta_0$$

und bezeichnet  $\zeta_0$  als **Widerstandsziffer für die Reibung im Gefässe**. Mit  $\varphi = 0,96$  wird

$$2) \quad \zeta_0 = 0,085.$$

Der durch Reibung verursachte Druckhöhen-Verlust

$$3) \quad z_0 = \zeta_0 \frac{w^2}{2g}$$

heisst die **Widerstandshöhe in Folge der Reibung im Gefässe**. Mit Benutzung dieser Hilfsgrösse kann man nun schreiben

$$h = \frac{w^2}{2g} + \zeta_0 \frac{w^2}{2g},$$

indem man die gesammte wirksame Druckhöhe  $h$  zerlegt in denjenigen Theil  $\frac{w^2}{2g}$ , der zur Erzeugung der Geschwindigkeit  $w$  zur Verwerthung kommt, und die Widerstandshöhe der Gefässreibung. Daraus wird dann

$$4) \quad w = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \zeta_0}},$$

was mit  $w = \varphi \sqrt{2gh}$  gleichbedeutend ist.

Die Benutzung der Widerstandshöhen wird besonders nützlich, wenn man mit einer verwickelteren Wasserbewegung zu thun hat, bei der verschiedene Druckhöhenverluste in Frage kommen.

**e) Druckhöhenverlust in Folge plötzlicher Querschnittsänderung.**

**a) Plötzliche Erweiterung.** In einem Gefässe sei (Fig. 268) im Wasserspiegel der Querschnitt  $F_0$ , die Geschwindigkeit  $w_0$ ; in einer Zwischenwand befinde sich eine Öffnung  $F_1$ , unterhalb derselben finde eine Einschnürung auf  $\alpha_1 F_1$  mit einer Geschwindigkeit  $w_1$  statt, dann folge eine plötzliche Erweiterung des Gefässes auf  $F_2$  mit einer (kleineren) Geschwindigkeit  $w_2$ ; die Ausflussöffnung habe die Grösse  $F$ , der unterhalb derselben eingeschnürte Strahl den Querschnitt  $\alpha F$  mit der Geschwindigkeit  $w$ . An den Seiten des eingeschnürten Strahles  $\alpha_1 F_1$  im Innern befindet sich Wasser, welches nur Wirbelbewegungen ausführt, an der regelmässigen strömenden Bewegung aber nicht theilnimmt. Da während einer Zeiteinheit durch alle Querschnitte die gleiche Wassermenge hindurchströmt, so muss

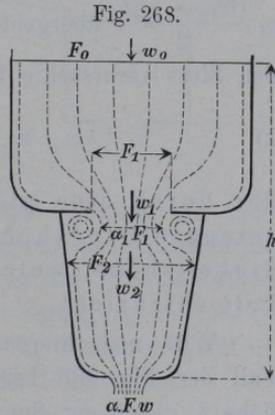


Fig. 268.

1) 
$$F_0 w_0 = \alpha_1 F_1 w_1 = F_2 w_2 = \alpha F w$$

sein und da  $\alpha_1 F_1 < F_2$ , so muss  $w_1 > w_2$  sein. Es trifft somit unterhalb der Zwischenwand das mit der Geschwindigkeit  $w_1$  strömende Wasser auf eine mit geringerer Geschwindigkeit  $w_2$  vorausgehende Wassermasse, womit ein Verlust an Arbeitsvermögen durch Stoss verbunden ist.

In der Hauptgleichung I, S. 231, war  $mg$  das während eines Zeittheilchens  $dt$  durch irgend einen (d. h. jeden) Querschnitt strömende Wassergewicht,  $mg h$  die während derselben Zeit von dem Gewichte der gesammten im Gefässe befindlichen Wassermasse verrichtete Arbeit. Im Anschluss an die betreffende Entwicklung (S. 230) soll nun der während der Zeit  $dt$  durch Stoss erfolgende Verlust an Arbeitsvermögen berechnet werden. Man stellt sich die

Sache so vor, als ob die Masse  $m$  mit der Geschwindigkeit  $w_1$  auf eine mit der Geschwindigkeit  $w_2$  vorausgehende Masse  $M_2$  stiesse; da nun Wasser nahezu unzusammendrückbar ist, so beträgt der Verlust an Arbeitsvermögen während der Zeit  $dt$  nach Gl. 11, S. 130 mit  $k = 0$

$$\frac{m \cdot M_2}{m + M_2} \frac{(w_1 - w_2)^2}{2},$$

was mit Rücksicht darauf, das  $m$  gegen  $M_2$  unendlich klein ist, in  $m \frac{(w_1 - w_2)^2}{2}$  übergeht; setzt man dies  $= mgz_1$ , so ist  $z_1$  der durch den Stoss verursachte Druckhöhenverlust, u. zw.

$$2) \quad z_1 = \frac{(w_1 - w_2)^2}{2g}, \quad \text{d. h.}$$

der durch eine plötzliche Querschnittsvergrößerung erzeugte Druckhöhenverlust ist gleich der Geschwindigkeitshöhe, welche der relativen Stossgeschwindigkeit entspricht.

Will man hiernach die Ausflussgeschwindigkeit  $w$  für den Fall der Fig. 268 berechnen, so setzt man die wirksame Druckhöhe  $h$  gleich der Summe der einzelnen Theile, in welche sie sich zerlegt. Will man die Geschwindigkeit  $w_0$  im Wasserspiegel auch berücksichtigen, so ist  $\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g}$  der zur Erzeugung von Geschwindigkeit verwertete Theil;  $\zeta_0 \frac{w^2}{2g}$  wird durch Reibung,  $\frac{(w_1 - w_2)^2}{2g}$  durch Stoss aufgezehrt. Also ist

$$3) \quad h = \frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} + \zeta_0 \frac{w^2}{2g} + \frac{(w_1 - w_2)^2}{2g}.$$

Nach Gl. 1 ist nun  $w_0 = w \frac{\alpha F}{F_0}$ ,  $w_1 = w \frac{\alpha F}{\alpha_1 F_1}$ ,  $w_2 = w \frac{\alpha F}{F_2}$ ,

mithin  $h = \frac{w^2}{2g} \left\{ 1 - \frac{\alpha^2 F^2}{F_0^2} + \zeta_0 + \alpha^2 F^2 \left( \frac{1}{\alpha_1 F_1} - \frac{1}{F_2} \right)^2 \right\}$ , oder

$$4) \quad w = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{\alpha^2 F^2}{F_0^2} + \zeta_0 + \alpha^2 F^2 \left( \frac{1}{\alpha_1 F_1} - \frac{1}{F_2} \right)^2}}.$$

Befinden sich die Öffnungen  $F_1$  und  $F$  in dünner Wand, so darf man meist  $\alpha = \alpha_1 = 0,64$  setzen.

In dem Falle der Fig. 269 wäre  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha = 0,64$  zu setzen. Würde auch die Öffnung  $F$  durch allmähliche Verengung wie in Fig. 252 gebildet, so hätte man auch  $\alpha = 1$  zu setzen.

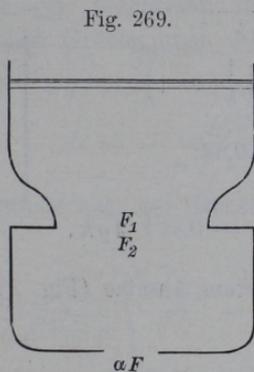


Fig. 269.

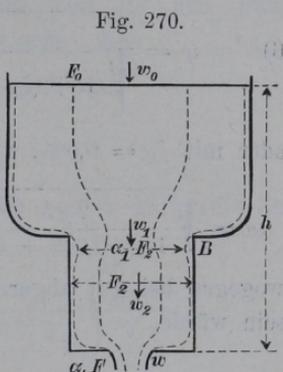


Fig. 270.

$\beta$ ) **Plötzliche Verengung** würde einen Stossverlust nicht erzeugen, wenn nicht dicht unter der Verengung eine Einschnürung und sogleich daneben wieder eine Ausdehnung des Strahles auf den vollen Gefäßquerschnitt erfolgte. An der Verengung auf  $F_2$  bei  $B$  (Fig. 270) ist der Strahlquerschnitt  $\alpha_1 F_2$ , die Geschwindigkeit  $w_1$ , unmittelbar darunter  $F_2$  bzw.  $w_2$ , daher der Stossverlust

$$\frac{(w_1 - w_2)^2}{2g} = \frac{w_2^2}{2g} \left( \frac{1}{\alpha_1} - 1 \right)^2,$$

weil  $\alpha_1 w_1 = w_2$ . Sonach wird

$$5) \quad w = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{\alpha^2 F^2}{F_0^2} + \zeta_0 + \frac{\alpha^2 F^2}{F_2^2} \left( \frac{1}{\alpha_1} - 1 \right)^2}}.$$

Mit  $\alpha_1 = 0,64$  wird

$$\left( \frac{1}{\alpha_1} - 1 \right)^2 = 0,32.$$

Schliesst sich an ein Gefäß unten ein kurzes cylindrisches Ansatzrohr (Fig. 271) ohne Abrundung oder Abschrägung beim Anschlusse, so entsteht beim Eintritt in das Rohr eine Einschnürung auf  $\alpha F$  mit sogleich folgender

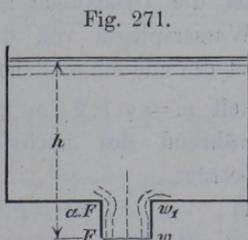


Fig. 271.

Ausweitung auf den Querschnitt  $F$ ; somit wird, wenn  $F_0$  sehr gross gegen  $F$ :

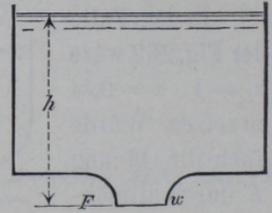
$$6) \quad w = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \zeta_0 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2}}$$

oder mit  $\zeta_0 = 0,085$ ,  $\alpha = 0,64$ :

$$w = \sqrt{\frac{2gh}{1 + 0,085 + 0,32}} = 0,84 \sqrt{2gh},$$

wogegen bei gut abgerundetem Ansatz (Fig. 272)  $w = 0,96 \sqrt{2gh}$  sein würde.

Fig. 272.



### f) Ausfluss aus einer Bodenöffnung unter veränderlicher Druckhöhe.

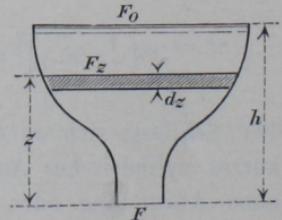
Die Formel  $w = \varphi \sqrt{2gh}$  gilt unter der Voraussetzung, dass die Bodenöffnung klein ist und dass genügender Zufluss erfolgt, um die Druckhöhe unveränderlich zu erhalten, sowie unter der Annahme, dass der Beharrungszustand bereits eingetreten sei. Findet der Zufluss nun nicht in richtiger Menge oder gar nicht statt, so ändert sich die Höhenlage des Wasserspiegels und damit die Druckhöhe. Annäherungsweise verwendet man für die nun veränderliche Ausflussgeschwindigkeit  $w$  dieselbe Gleichung wie für den Beharrungszustand, indem man mit veränderlicher Druckhöhe  $z$  einfach  $w = \varphi \sqrt{2gz}$  setzt.

$\alpha$ ) Allmähliche Entleerung ohne Zufluss. Zu Anfang, zur Zeit  $t = 0$ , sei  $F_0$  der Wasserspiegel in der Höhe  $h$  über der Öffnung (Fig. 273); nach  $t$  Zeiteinheiten sei die Druckhöhe auf  $z$  vermindert, der Wasserspiegel von der Grösse  $F_z$ ; dann ist die augenblickliche Ausflussgeschwindigkeit  $w = \varphi \sqrt{2gz}$ , und die Ausflussmenge während des nächsten Zeittheilchens  $dt$  beträgt

$$1) \quad dQ = \mu F \sqrt{2gz} \cdot dt.$$

Um hieraus  $dt$  als Differentialfunktion von  $z$  finden zu können, bedenke man, dass in dem Zeittheilchen  $dt$

Fig. 273.



der Wasserspiegel um  $dz$  sinkt, dass dieses  $dz$  aber mit negativem Zeichen zu schreiben ist, weil  $z$  mit wachsendem  $t$  abnimmt. Der sinkende Wasserspiegel beschreibt in der Zeit  $dt$  den Raum  $-F_z \cdot dz$ , und diese Grösse muss  $= dQ$  sein. Aus

$$2) \quad \mu F \sqrt{2gz} dt = -F_z dz \quad \text{wird dann}$$

$$3) \quad dt = -\frac{F_z dz}{\mu F \sqrt{2gz}}.$$

Daher ist zur Veränderung der Druckhöhe von  $h$  auf  $z$  die Zeit erforderlich

$$4) \quad t = -\frac{1}{\mu F \sqrt{2g}} \int_h^z \frac{F_z dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\mu F \sqrt{2g}} \int_z^h \frac{F_z dz}{\sqrt{z}},$$

weil den Zeitwerthen  $t = 0$  und  $t = t$  bzw. die Werthe  $z = h$  und  $z = z$  entsprechen.

**Entleerung eines prismatischen Gefässes** (Fig. 274). Mit  $F_z = F_0$  wird

$$5) \quad t = \frac{F_0}{\mu F \sqrt{2g}} \int_z^h z^{-1/2} dz = \frac{2F_0}{\mu F \sqrt{2g}} (\sqrt{h} - \sqrt{z}).$$

Für völlige Entleerung wird mit  $z = 0$

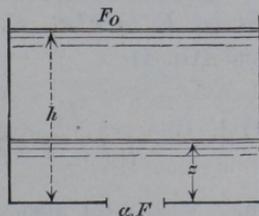
$$6) \quad t = \frac{2F_0 \sqrt{h}}{\mu F \sqrt{2g}}.$$

Multipliziert man nun in Zähler und Nenner mit  $\sqrt{h}$ , so kann man im Zähler den ursprünglichen Gefässinhalt  $V = F_0 h$ , im Nenner die dem anfänglichen Zustand entsprechende sekundliche Ausflussmenge  $Q_0 = \mu F \sqrt{2gh}$  einführen und erhält

$$7) \quad t = 2 \frac{V}{Q_0}.$$

Behielte die Druckhöhe den ursprünglichen Werth  $h$ , so würde der Ausfluss einer dem Gefässinhalte  $V$  gleichen Wassermenge die Zeit  $V:Q_0$  erfordern; wegen der kleiner werdenden Druckhöhe erfordert die Entleerung das Doppelte jener Zeit.

Fig. 274.



**Wasseruhr mit cylindrischem Gefässe.** Ein Cylinder von  $0,391^m$  Weite und  $1^m$  Höhe habe im Boden eine kreisförmige Öffnung von  $0,002^m$  Durchmesser mit gut abgerundetem kurzen Mundstücke, so dass  $\alpha = 1$  und  $\mu = \alpha \varphi = 0,96$  gesetzt werden kann. Die allmähliche Senkung des Wasserspiegels soll zur Zeitmessung benutzt werden. Gl. 5 wird in diesem Falle

$$t = \frac{2 \cdot 0,391^2}{0,96 \cdot 0,002^2 \sqrt{2g}} (\sqrt{h} - \sqrt{z}) = 18000 (\sqrt{h} - \sqrt{z}).$$

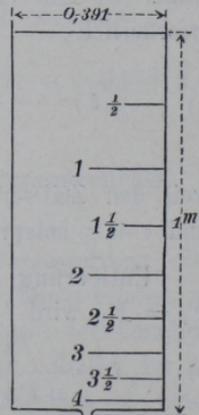
Ist die ursprüngliche Höhe des Wasserspiegels über der Mündung  $h = 1^m$ , so wird für eine beliebige Zeit  $t$

$$\sqrt{z} = 1 - \frac{t}{18000}.$$

Hiernach kann man für Werthe von  $t$ , die je um  $1/2$  Stunde abnehmen, leicht  $z$  berechnen.

$t = 1/2$ Stunde	= 1800 s.	gibt $z = 0,81^m$
$t = 1$	" = 3600 s.	" $z = 0,64$
$t = 1 1/2$	"	$z = 0,49$
$t = 2$	"	$z = 0,36$
$t = 2 1/2$	"	$z = 0,25$
$t = 3$	"	$z = 0,16$
$t = 3 1/2$	"	$z = 0,09$
$t = 4$	"	$z = 0,04$

Fig. 275.



Für die letzten Theile der Entleerung trifft übrigens Gl. 5 nicht mehr zu, hat nur ideellen Werth, weil sich zuletzt um die Öffnung ein Strudel und in der Mitte der Öffnung ein von Wasser nicht erfüllter Trichter bildet, so dass der Ausfluss verlangsamt wird.

**Entleerung eines trichterförmigen Gefässes.** Das untere Ende des kegelförmigen Gefässes (Fig. 276) sei zu einer Öffnung erweitert, die in der Höhe der geometrischen Spitze des Kegels liegt. Es ist  $F_z = x^2 \pi$ ,  $F_0 = r^2 \pi$ ,  $x : r = z : h$ , also  $F_z = F_0 \cdot z^2 : h^2$  und (Gl. 4)

$$8) \quad t = \frac{F_0}{\mu F h^2 \sqrt{2g}} \int_z^h z^{3/2} dz = \frac{2}{5} \frac{F_0}{\mu F h^2 \sqrt{2g}} (h^{5/2} - z^{5/2});$$

für  $z = 0$  wird dann mit  $V = 1/3 r^2 \pi h$  und  $Q_0 = \mu F \sqrt{2gh}$ :

$$9) \quad t = \frac{6}{5} \frac{V}{Q_0} = 1,2 \frac{V}{Q_0}.$$

Für die Entleerung eines halbkugelförmigen oder halbellipsoidischen (bis zum grössten Querschnitte gefüllten) Beckens findet man

$$10) \quad t = \frac{7}{5} \frac{V}{Q_0} = 1,4 \frac{V}{Q_0},$$

für die Entleerung eines paraboloidischen Gefässes

$$11) \quad t = \frac{4}{3} \frac{V}{Q_0} = 1,33 \frac{V}{Q_0}.$$

Der Zahlenfaktor auf der rechten Seite dieser Gleichungen war = 2 für ein prismatisches Gefäss; er ist < 2 für jedes nach unten verengte Gefäss und umgekehrt; er nähert sich um so mehr der Einheit, je schneller sich das Gefäss nach unten verengt. Beim Beginne des Ausflusses sinkt nämlich der Wasserspiegel schnell; mit abnehmender Druckhöhe und Geschwindigkeit geht aber der weitere Ausfluss langsamer von statten, u. zw. um so mehr, wenn das Gefäss unten noch verhältnismässig weit ist, so dass noch ziemlich viel Wasser bei der geringen Geschwindigkeit ausfliessen muss.

**Gefässform für gleichmässige Senkung des Wasserspiegels.**  
Die Geschwindigkeit, mit der der Wasserspiegel sinkt, ist

$$12) \quad v = \frac{-dz}{dt} = \frac{\mu F \sqrt{2gz}}{F_z} \text{ (Gl. 3);}$$

soll diese sich nicht ändern, sondern gleich dem Anfangswerthe

$$\frac{\mu F \sqrt{2gh}}{F_0} = \frac{Q_0}{F_0}$$

bleiben, so muss

$$13) \quad \sqrt{z} : \sqrt{h} = F_z : F_0 \text{ sein.}$$

Soll die Innenfläche des Gefässes eine Umdrehungsfläche sein, so wird mit

$$F_z = x^2 \pi \text{ und } x^2 : r^2 = \sqrt{z} : \sqrt{h},$$

$$14) \quad x^4 : r^4 = z : h.$$

Dies ist die Gleichung der gesuchten Meridianlinie, die man eine Parabel vierten Grades nennt. Eine bei A (Fig. 277) an die

Fig. 276.

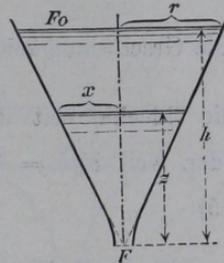
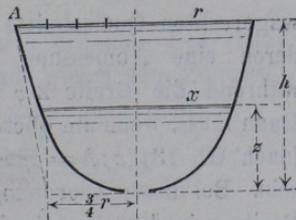


Fig. 277.



Meridianlinie gelegte Tangente hat gegen die lothrechte Achse ein Neigungsverhältnis  $1/4 r : h$ , Der Inhalt des Gefässes ist

$$V = \pi \int_0^h x^2 dz = \frac{\pi r^2}{V h} \int_0^h \sqrt{z} dz = \frac{2}{3} F_0 h.$$

Die Geschwindigkeit des sinkenden Wasserspiegels beträgt  $v = \frac{Q_0}{F_0}$ ,

die (ideelle) Zeit der vollständigen Entleerung  $t = h : v = \frac{F_0 h}{Q_0}$ ,

oder, weil  $F_0 h = 3/2 V$ :

$$15) \quad t = \frac{3}{2} \frac{V}{Q_0} = 1,5 \frac{V}{Q_0}.$$

Ist die Meridianlinie der Innenwand eines Gefässes eine Parabel  $n$ ten Grades mit  $x^n : r^n = z : h$ , so ist das Neigungsverhältnis einer bei  $A$  angelegten Tangente gegen die Achse  $1/n r : h$ , der Inhalt des Gefässes

$$16) \quad V = \frac{F_0 h}{\frac{2}{n} + 1},$$

die (ideelle) Zeit der Entleerung

$$17) \quad t = \frac{4 + 2n}{4 + n} \frac{V}{Q_0}.$$

$n = \frac{1}{2}$  (Fig. 278) giebt

$$18) \quad t = \frac{10}{9} \frac{V}{Q_0} = 1,1 \frac{V}{Q_0}.$$

Will man ein Gefäss mit gleichförmig sinkendem Wasserspiegel als Wasseruhr benutzen und für die Anbringung der Theilung eine ebene Wand zur Verfügung haben, so kann man die Gefässform auch derartig anordnen, dass die

wagerechten Querschnitte Rechtecke sind, deren eine Abmessung durchweg  $= b$ , während die Breite  $2x$  veränderlich ist. Dann muss, wenn am oberen Rande  $x = a$ , (nach Gl. 13)  $z : h = b^2 x^2 : b^2 a^2 = x^2 : a^2$  sein. Bei dieser Anordnung folgt die halbe Breite  $x$  in der einen Ansicht dem Gesetze einer gewöhnlichen (quadratischen) Parabel

mit  $V = 2/3 F_0 h$  und  $t = \frac{3}{2} \frac{V}{Q_0}$ .

Fig. 278.

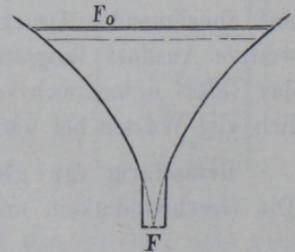
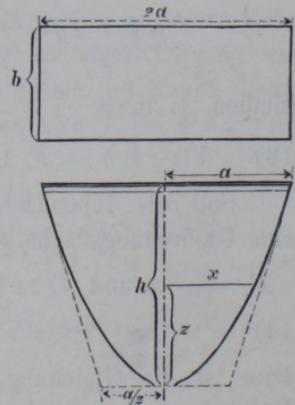


Fig. 269.



$\beta$ ) **Ausfluss unter veränderlicher Druckhöhe bei Zufluss von oben.** Erfolgt ein Zufluss von  $q$  cbm/s. (Fig. 280), so besteht die Ausflussmenge  $dQ = \mu F \sqrt{2gz} dt$  während der Zeit  $dt$  aus dem der Senkung des Wasserspiegels  $F_z$  um  $-dz$  entsprechenden Wasserkörper  $-F_z dz$  und dem Zuflusse  $q dt$ ; sonach ist statt Gl. 2, S. 249, zu setzen:

$$\mu F \sqrt{2gz} dt = -F_z dz + q dt;$$

die Geschwindigkeit des sinkenden Wasserspiegels wird

$$19) \quad v = \frac{-dz}{dt} = \frac{\mu F \sqrt{2gz} - q}{F_z},$$

$$dt = -\frac{F_z dz}{\mu F \sqrt{2gz} - q} \quad \text{und}$$

$$20) \quad t = -\int_h^z \frac{F_z dz}{\mu F \sqrt{2gz} - q} = \int_z^h \frac{F_z dz}{\mu F \sqrt{2gz} - q}.$$

Für ein prismatisches Gefäss mit  $F_z = F_0$  (Fig. 281) wird

$$t = \frac{F_0}{\mu F \sqrt{2g}} \int_z^h \frac{dz}{\sqrt{z} - \frac{q}{\mu F \sqrt{2g}}}.$$

Behufs der Integration setze man

$$\frac{q}{\mu F \sqrt{2g}} = \sqrt{a}, \quad \sqrt{z} = y,$$

dann ist wegen  $q = \mu F \sqrt{2ga}$  die Grösse  $a$  diejenige Druckhöhe, bei welcher die sekundl. Ausflussmenge gerade gleich dem Zuflusse  $q$  sein würde; es ist ferner  $z = y^2$ ,  $dz = 2y dy$ ; man schreibe

$$\begin{aligned} 2 \int \frac{y dy}{y - \sqrt{a}} &= 2 \int \frac{y - \sqrt{a} + \sqrt{a}}{y - \sqrt{a}} dy = \\ 2 \int dy + 2\sqrt{a} \int \frac{dy}{y - \sqrt{a}} &= 2y + 2\sqrt{a} \ln(y - \sqrt{a}) \\ &= 2\sqrt{z} + 2\sqrt{a} \ln(\sqrt{z} - \sqrt{a}), \quad \text{daher} \end{aligned}$$

Fig. 280.

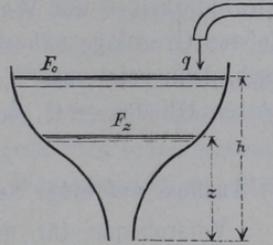
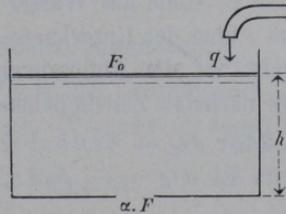


Fig. 281.



$$21) \quad t = \frac{2 F_0}{\mu F \sqrt{2g}} \left\{ \sqrt{h} - \sqrt{z} + \sqrt{a} \ln \frac{\sqrt{h} - \sqrt{a}}{\sqrt{z} - \sqrt{a}} \right\}.$$

In diesem Fall ist wegen des Zuflusses eine völlige Entleerung unmöglich, denn für  $z = a$ , d. h.  $\mu F \sqrt{2gz} = q$  würde nach Gl. 19 die Geschwindigkeit  $v$  des Wasserspiegels Null. Der hierdurch bedingten tiefsten Grenzlage nähert sich aber der Wasserspiegel nur asymptotisch, denn setzt man  $z = a$  in Gl. 21 ein, so wird der Nenner des letzten Gliedes  $= 0$ , d. h.  $t = \infty$ .

### g) Ausfluss aus einer Seitenöffnung bei veränderlicher Druckhöhe.

Vorstehende, für den Ausfluss aus Bodenöffnungen entwickelte Gleichungen für theilweise Entleerung gelten annähernd auch für den Ausfluss aus niedrigen Seitenöffnungen, solange der Wasserspiegel oberhalb der Öffnung verbleibt.

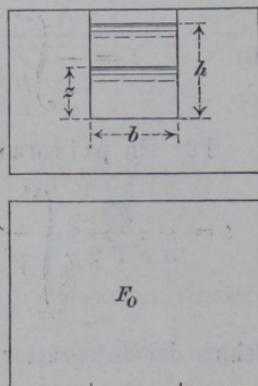
Wir betrachten nun einen rechteckigen Kasten (Fig. 282) von der Grundfläche  $F_0$  der sich, ohne Zufluss zu erhalten, durch einen rechteckigen Ausschnitt einer Seitenwand entleeren möge. Zu Anfang ( $t = 0$ ) stehe das Wasser um  $h$ , zur Zeit  $t$  um  $z$  über der Unterkante des Ausschnittes. Dann ist die Abflussmenge  $dQ$  während des nächsten Zeittheilchens  $dt$  nach Gl. 9, S. 243:  $dQ = {}^{2/3} \mu b z \sqrt{2gz} dt$ ; andererseits ist  $dQ = -F_0 dz$ , somit

$$dt = - \frac{3}{2} \frac{F_0}{\mu b \sqrt{2g}} \frac{dz}{z \sqrt{z}} \quad \text{und}$$

$$t = - \frac{3}{2} \frac{F_0}{\mu b \sqrt{2g}} \int_h^z \frac{dz}{z^{3/2}} = \frac{3 F_0}{\mu b \sqrt{2g}} \left( \frac{1}{\sqrt{z}} - \frac{1}{\sqrt{h}} \right).$$

$z = 0$  verlangt  $t = \infty$ . Hiernach ist also eine Entleerung bis zur Unterkante des Einschnittes in endlicher Zeit nicht möglich, der Wasserspiegel nähert sich nur asymptotisch der Unterkante. Beim Ausflusse durch eine Bodenöffnung ergab sich für völlige Entleerung

Fig. 282.



ein endlicher Zeitwerth. Der Grund der Verschiedenheit beider Fälle ist folgender: Bei einer Bodenöffnung ist gegen das Ende des Ausflusses die Druckhöhe unendlich klein, die Öffnung endlich, die sekundl. Ausflussmenge unendlich klein; daher kann die unendlich kleine noch vorhandene Wassermenge in endlicher Zeit ausfliessen. Bei der Seitenöffnung aber wird mit der Druckhöhe auch der Querschnitt des ausfliessenden Strahles unendlich klein, die sekundliche Ausflussmenge daher unendlich klein zweiter Ordnung, so dass zum Ausfliessen der unendlich kleinen letzten Wassermenge eine unendlich grosse Zeit nöthig ist. Übrigens wird schon während einer endlichen Zeit die noch vorhandene Wasserschicht so dünn, dass sie thatsächlich nicht mehr fliesst.

**Beispiel:** Es sei die Grundfläche des Gefässes  $F_0 = 3 \text{ qm}$ , die Breite des Einschnittes  $b = 0,1 \text{ m}$ , die ursprüngliche Wasserhöhe  $h = 1 \text{ m}$ ,  $\mu = 0,6$ . Dann wird

$$t = \frac{3 \cdot 3}{0,6 \cdot 0,1 \cdot 4,43} \left( \frac{1}{\sqrt{z}} - 1 \right) = 33,9 \left( \frac{1}{\sqrt{z}} - 1 \right).$$

$$\text{Für } z = \frac{1}{4} \text{ m ist } t = 33,9 \text{ s. ;}$$

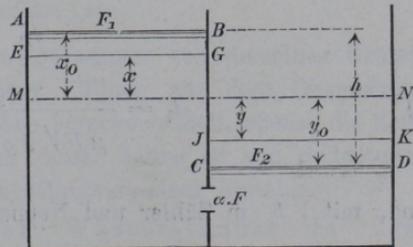
$$\text{für } z = 0,01 \text{ m ist } t = 9 \cdot 33,9 = 305,1 \text{ s. ;}$$

$$\text{für } z = 0,0001 \text{ m ist } t = 99 \cdot 33,9 = 3356 \text{ s. .}$$

### h) Ausgleichung des Wassers in Schleusenammern.

Sind 2 Schleusenammern (Fig. 283) mit den Grundflächen  $F_1$  und  $F_2$  durch eine beiderseits unter Wasser liegende Schützenöffnung  $F$  verbunden, so wird, wenn die Wasserstände  $AB$  und  $CD$  der Kammern zu Anfang einen Höhenunterschied  $h$  hatten, nach einer gewissen Zeit in beiden Kammern sich ein Ausgleichswasserspiegel  $MN$  bilden, der von den ursprünglichen Wasserspiegeln um  $x_0$  bzw.  $y_0$  abweicht. Nach  $t$  Sekunden seien die beiden Wasserspiegel  $EG$  und  $JK$  um  $x$  bzw.  $y$  vom Ausgleich entfernt; dann ist im

Fig. 283.



beiden Kammern sich ein Ausgleichswasserspiegel  $MN$  bilden, der von den ursprünglichen Wasserspiegeln um  $x_0$  bzw.  $y_0$  abweicht. Nach  $t$  Sekunden seien die beiden Wasserspiegel  $EG$  und  $JK$  um  $x$  bzw.  $y$  vom Ausgleich entfernt; dann ist im

Zeitpunkte  $t$  die wirksame Druckhöhe  $x + y$ , daher die Durchflussgeschwindigkeit der Schützenöffnung

$$w = \varphi \sqrt{2g(x + y)}$$

und die Durchflussmenge während der Zeit  $dt$ :

$$dQ = \mu F dt \sqrt{2g(x + y)}.$$

Nun ist offenbar

$$F_1 x = F_2 y \quad \text{und} \quad F_1 x_0 = F_2 y_0,$$

$$1) \quad x + y = y \left( \frac{F_2}{F_1} + 1 \right); \quad h = x_0 + y_0 = y_0 \left( \frac{F_2}{F_1} + 1 \right);$$

ferner, weil in der Zeit  $dt$  die Tiefe sich um  $-dy$  ändert,

$$dQ = \mu F dt \sqrt{2gy \left( \frac{F_2}{F_1} + 1 \right)} = -F_2 dy; \quad \text{mithin}$$

$$2) \quad dt = \frac{-F_2 dy}{\mu F V \sqrt{2g} \sqrt{\frac{F_2}{F_1} + 1} \sqrt{y}}.$$

Für  $t = 0$  ist  $y = y_0$ ; für  $t = t_1$  ist  $y = 0$ , wenn  $t_1$  die Zeit bis zur Ausgleichung bedeutet. Also

$$t_1 = \frac{F_2}{\mu F V \sqrt{2g} \sqrt{\frac{F_2}{F_1} + 1}} \int_0^{y_0} y^{-1/2} dy = \frac{2 F_2 \sqrt{y_0}}{\mu F V \sqrt{2g} \sqrt{\frac{F_2}{F_1} + 1}}$$

oder wegen  $y_0 = \frac{h}{\frac{F_2}{F_1} + 1}$ :

$$4) \quad t_1 = \frac{2 F_2 \sqrt{h}}{\mu F V \sqrt{2g} \left( \frac{F_2}{F_1} + 1 \right)}$$

und, mit  $\sqrt{h}$  in Zähler und Nenner multiplicirt:

$$5) \quad t_1 = \frac{2 F_2 h}{\mu F V \sqrt{2gh} \left( \frac{F_2}{F_1} + 1 \right)}.$$

Multipliziert man in Zähler und Nenner mit  $F_1 : F_2$ , so kann man auch schreiben:

$$6) \quad t_1 = \frac{2 F_1 h}{\mu F \sqrt{2gh} \left(1 + \frac{F_1}{F_2}\right)}$$

Die ganze überströmende Wassermenge beträgt

$$V = F_2 y_0 = \frac{F_2 h}{\frac{F_2}{F_1} + 1},$$

und da die sekundl. Durchflussmenge zu Anfang

$$Q_0 = \mu F \sqrt{2gh},$$

so ist, wie Gl. 7, S. 249:

$$7) \quad t_1 = 2 \frac{V}{Q_0}.$$

Füllt sich die Schleusenammer aus einem ausgedehnten Oberwasser für welches  $F_1 = \infty$  zu setzen ist (Fig. 284), so wird  $V = F_2 h$  und

$$8) \quad t_1 = \frac{2 F_2 h}{\mu F \sqrt{2gh}}.$$

Ähnliches gilt bei der Entleerung einer Schleusenammer in ein ausgedehntes Unterwasser.

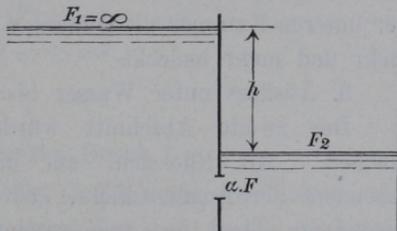
**Beispiel:** Es sei (Fig. 283)  $F_1 = F_2 = 400 \text{ qm}$ ;  $F = 0,5 \text{ qm}$ ,  $h = 2 \text{ m}$ ;  $\mu$  kann im Mittel  $= 0,6$  gesetzt werden. Dann ist  $y_0 = 1/2 h = 1 \text{ m}$ , also  $V = 400 \text{ cbm}$ ;  $Q_0 = 0,6 \cdot 0,5 \cdot 4,43 \sqrt{2} = 1,88$ , und nach Gl. 7:

$$t_1 = 426 \text{ s.} = 7,1 \text{ min.}$$

Ist nur eine einzelne Schleusenammer von derselben Grösse vorhanden, so wird die Zeit einer Füllung aus dem Oberwasser doppelt so gross sein, wie die oben berechnete Zeit, ebenso die Zeit der Entleerung. Die Berechnung dieser Zeiten ist von Bedeutung für die Beurtheilung der Leistungsfähigkeit eines Kanales.

Ausgleichszeit des Wasserstandes in den Kammern gekuppelter Schleusen, wenn die Öffnung zu Anfang nicht beiderseitig unter Wasser liegt (Fig. 285). Der Schwerpunkt der Öffnung  $F$  liege anfangs um  $h_1$

Fig. 284.



unter dem Oberwasser, um  $h_2$  über dem Unterwasser. Dann sind drei Abschnitte des Durchflusses zu unterscheiden:

1. Ausfluss ins Freie durch die niedrige Seitenöffnung, bis das Wasser der unteren Kammer die Unterkante der Öffnung erreicht.

2. Ausfluss, theils frei, theils unter Wasser, während das Wasser der unteren Kammer die Öffnung mehr und mehr bedeckt.

3. Ausfluss unter Wasser bis zur Ausglei chung.

Der zweite Abschnitt würde die Berechnung umständlich machen. Mit Rücksicht auf die Unsicherheit dieser Formeln, besonders der Ausflussziffern, lässt man daher diesen Abschnitt als besonderen Theil fort und vereinigt ihn mit den anderen beiden, indem man den ersten mit Ausfluss ins Freie bis zu dem Augenblicke rechnet, wo das Wasser der unteren Kammer den Schwerpunkt der Öffnung erreicht, den übrigen Theil des Durchflusses als Ausfluss unter Wasser behandelt.

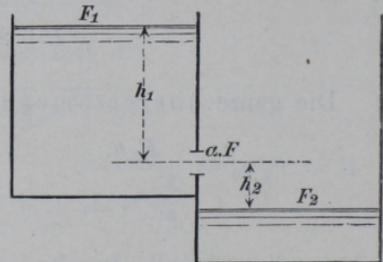
Während das Wasser der unteren Kammer um  $h_2$  steigt, muss dasjenige der oberen Kammer um  $h_2 F_2 : F_1$  sinken. Es erfolgt also während des freien Ausflusses aus der als niedrig vorausgesetzten Öffnung eine Verminderung der Druckhöhe von  $h_1$  auf  $h_1 - h_2 \frac{F_2}{F_1}$ , wozu nach Gl. 5, S. 249 eine Zeit

$$t_1 = \frac{2 F_1}{\mu F \sqrt{2g}} \left( \sqrt{h_1} - \sqrt{h_1 - h_2 \frac{F_2}{F_1}} \right)$$

erforderlich ist. Für die nun beginnende Ausglei chung durch eine Öffnung unter Wasser gilt Gl. 6, S. 257, wenn darin  $h$  durch den jetzt bestehenden Höhenunterschied  $h_1 - h_2 \frac{F_2}{F_1}$  ersetzt wird. Die entsprechende Zeit ist also

$$t_2 = \frac{2 F_1 \sqrt{h_1 - h_2 \frac{F_2}{F_1}}}{\mu F \sqrt{2g} \left( \frac{F_1}{F_2} + 1 \right)}$$

Fig. 285.



Die Gesamtzeit  $t_1 + t_2$  wird also

$$t = \frac{2 F_1}{\mu F \sqrt{2g}} \left\{ \sqrt{h_1} - \left( 1 - \frac{1}{\frac{F_1}{F_2} + 1} \right) \sqrt{h_1 - h_2 \frac{F_2}{F_1}} \right\} \quad \text{oder}$$

$$9) \quad t = \frac{2 F_1}{\mu F \sqrt{2g}} \left\{ \sqrt{h_1} - \frac{F_1}{F_1 + F_2} \sqrt{h_1 - h_2 \frac{F_2}{F_1}} \right\}.$$

**Beispiel:** Es sei wiederum  $F_1 = F_2 = 400 \text{ qm}$ ;  $h_1 = 1,5 \text{ m}$ ;  $h_2 = 0,5 \text{ m}$ ;  $F = 0,5 \text{ qm}$ ,  $\mu = 0,6$ , dann wird  $\mu F \sqrt{2g} = 1,329$  und

$$t = 433 \text{ s.} = 7,2 \text{ min.},$$

nicht viel mehr als auf S. 257.

### i) Hydraulischer Druck.

Ist das in Fig. 286 dargestellte Gefäß unten geschlossen, oben dem Drucke  $p_0$ , etwa dem Atmosphärendruck ausgesetzt, so beträgt in einem Querschnitte  $MN$ , der um  $y$  unter dem Wasserspiegel liegt, der hydrostatische Druck nach S. 168

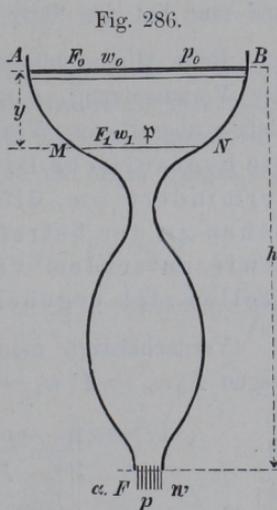
$$p_1 = p_0 + \gamma y,$$

wenn  $\gamma$  das Gewicht der Körpereinheit (eines Kubikmeters) Wasser ist. Findet aber eine Ausflussbewegung statt, so tritt eine bedeutende Änderung in den Druckverhältnissen ein. Der im Bewegungszustande herrschende Druck wird der hydrodynamische oder hydraulische Druck genannt und möge mit  $p$  bezeichnet werden. Wir berechnen denselben unter der Annahme, dass der Beharrungszustand eingetreten sei, dass also für die Geschwindigkeiten und die Druckhöhe Gl. I, S. 231 gelte, aber mit Berücksichtigung der Widerstände.

Für das ganze Gefäß besteht daher die Beziehung

$$1) \quad h + \frac{p_0 - p}{\gamma} = \frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} + z_h;$$

darin soll  $z_h$  die gesammte Widerstandshöhe oder den gesammten Druckhöhenverlust zwischen Wasserspiegel und Mündung bedeuten.



Sind (wie in Fig. 286) keine plötzlichen Querschnittsänderungen vorhanden, so ist  $z_h = z_0$  (Gl. 3, S. 244), anderenfalls wären noch entsprechende  $z_1$  (Gl. 2, S. 246) hinzuzufügen.

Betrachtet man aber nur die Wassermenge zwischen  $AB$  und  $MN$ , so ist  $w_1$  die Ausflussgeschwindigkeit,  $p$  der Gegendruck; nennt man dann  $z_y$  die auf die Höhe  $y$  kommende Widerstandshöhe, so wird, entsprechend der Gl. 1:

$$2) \quad y + \frac{p_0 - p}{\gamma} = \frac{w_1^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} + z_y \quad \text{oder}$$

$$3) \quad \frac{p}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + y - \left( \frac{w_1^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} \right) - z_y.$$

Mit  $p$  als hydraulischem Druck ist  $p:\gamma$  die hydraulische Druckhöhe bei  $MN$ ,  $\frac{p_0}{\gamma} + y$  die hydrostatische Druckhöhe daselbst, und man hat den Satz:

Beim Hindurchfließen des Wassers durch ein Gefäß ist unter der Voraussetzung, dass der Beharrungszustand besteht und das Gefäß überall von Wasser erfüllt ist, in irgend einem Querschnitte die hydraulische Druckhöhe gleich der hydrostatischen, vermindert um die Differenz der Geschwindigkeitshöhen an der betreffenden Stelle und im Wasserspiegel, sowie ausserdem vermindert um die zwischen beiden Stellen sich ergebende Widerstandshöhe.

Vernachlässigt man die Widerstandshöhe  $z_y$ , so kann man wegen  $F_0 w_0 = F_1 w_1 = \alpha F w$  auch schreiben

$$4) \quad \frac{p}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + y - \frac{w_0^2}{2g} \left( \frac{F_0^2}{F_1^2} - 1 \right).$$

Ist also an der Stelle  $MN$  der Querschnitt  $F_1 < F_0$ , so ist die Differenz der Geschwindigkeitshöhen positiv, mithin die hydraulische Druckhöhe kleiner als die hydrostatische, u. zw. um so mehr, je kleiner der Querschnitt  $F_1$  ist. Dadurch also, dass man die vorher geschlossene Öffnung frei macht, vermindert man den Druck auf die Gefässwände in allen den Querschnitten des Gefässes, die kleiner sind als der Wasserspiegel-Querschnitt, und umgekehrt. An

einem Querschnitte, der mit dem Wasserspiegel-Querschnitte gleiche Grösse hat, entsteht durch Eintritt der Bewegung keine Änderung des Druckes. Sind die Querschnitte  $F$  und  $F_1$  klein gegen  $F_0$  und ist  $p = p_0$ , so kann man

$$\frac{w_1^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} = \frac{w_1^2}{2g} = \frac{w^2}{2g} \cdot \frac{\alpha^2 F^2}{F_1^2} = h \frac{\alpha^2 F^2}{F_1^2}$$

setzen, und wenn man noch annimmt, dass an der Mündung keine Einschnürung vorkommt,

$$5) \quad \frac{p}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + y - h \frac{F^2}{F_1^2}.$$

Eine Verkleinerung des Querschnittes  $F_1$  kann eine bemerkenswerthe Verminderung des hydraulischen Druckes hervorbringen. Es wird  $p < p_0$ , d. h. der innere Druck kleiner als der äussere Luftdruck, wenn

$$6) \quad y < h \frac{F^2}{F_1^2} \quad \text{oder} \quad \frac{F_1}{F} < \sqrt{\frac{h}{y}}.$$

Durch eine in der Wand angebrachte Öffnung würde in diesem Falle nicht etwa Wasser herausfliessen, sondern durch den überwiegenden Druck der äusseren Atmosphäre Luft ins Innere des Gefässes hineingedrückt oder, wie man dann zu sagen pflegt, von dem strömenden Wasser angesogen werden. Der Überschuss des äusseren Druckes gegen den inneren kann durch einen etwa mit Wasser gefüllten Minderdruckmesser (s. Fig. 240, S. 217) kenntlich gemacht werden. Wenn der äussere Überdruck die Wassersäule  $x$  im Gleichwichte hält, so ist

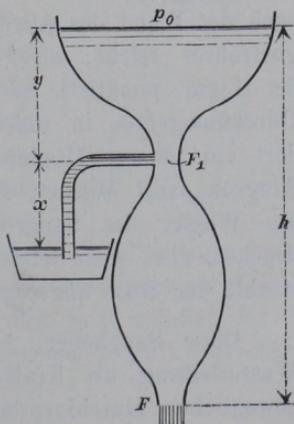
$$\frac{p}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} - x,$$

also nach Gl. 5:

$$-x = y - h \frac{F^2}{F_1^2} \quad \text{oder}$$

$$x + y = h \frac{F^2}{F_1^2}.$$

Fig. 287.

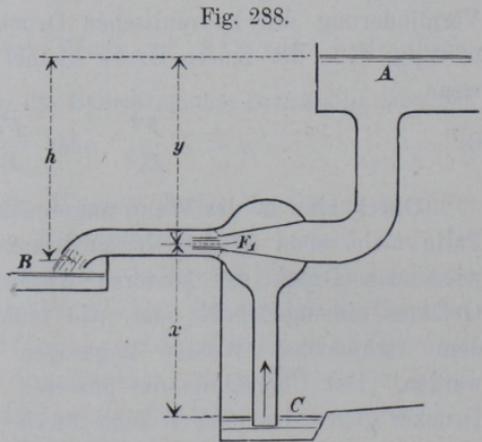


Ist aber  $x + y < h \frac{F^2}{F_1^2}$  (Fig. 287), so wird der äussere Atmosphärendruck das Wasser in dem seitlichen Messrohr aufwärts und in das Gefäss drücken, oder der innere Minderdruck das Wasser aus dem kleinen Nebengefäss ansaugen und mit fortführen. Dieses Ansaugen findet statt, wenn

$$8) \quad \frac{F_1}{F} < \sqrt{\frac{h}{x + y}} \quad \text{ist.}$$

Auf diesem Verhalten beruht die Wirkungsweise des **Saughebers** oder der Saugstrahlpumpe (Fig. 288). Das zum Betriebe dienende Wasser fliesst aus dem

Gerinne *A* abwärts durch eine Röhre, welche sich zu einer engen Düse  $F_1$  zusammenzieht. Diese wird von einem Gehäuse umschlossen, an welches sich nach unten das Saugrohr, nach links das Ausgussrohr anschliesst. Denkt man sich zunächst bei  $F_1$  eine Wand, welche von dem Rande der Düse nach der Wand des Aus-



gussrohres reicht, also das Saugrohr von letzterem trennt (in der Figur punktirt), so hat man ein von *A* bis *B* reichendes Durchflussgefäss, in welchem  $F_1$  eine enge Stelle bildet, so dass dort ein innerer Minderdruck entsteht. Denkt man sich nun das Saugrohr voll Wasser, so wird, wenn die Bedingung 8 erfüllt ist, das Wasser des Saugrohres gegen die gedachte Abschlusswand drücken, also, wenn letztere nun fortgedacht wird, von dem Wasserstrahle der Düse angesogen und nach *B* mitgenommen werden.

Diese Saugheber, bei denen nicht selten das Wasser einer Wasserleitung als Kraftquelle dient, haben den Vortheil, keine beweglichen Maschinentheile zu enthalten und deshalb keiner besonderen Wartung zu bedürfen.

Nach Gl. 5, S. 261 kann man durch fortgesetzte Verkleinerung des Querschnittes  $F_1$  die hydraulische Druckhöhe selbst bis auf Null vermindern; es ist dazu erforderlich, dass

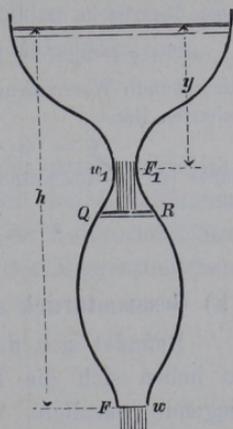
$$9) \quad \frac{F_1}{F} = \sqrt{\frac{h}{y + \frac{p_0}{\gamma}}}$$

sei. Macht man aber  $F_1$  noch kleiner als Gl. 9 entspricht, so würde der hydraulische Druck rechnermässig negativ werden. Weil aber negative Drücke in vollkommen flüssigen Körpern unmöglich sind, so hört für

$$10) \quad \frac{F_1}{F} < \sqrt{\frac{h}{y + \frac{p_0}{\gamma}}}$$

die Gültigkeit der Gl. 5, S. 261 und damit auch die Gültigkeit der Hauptgleichung I, S. 231 für die Ausflussgeschwindigkeit, aus welcher die Gleichung für den hydraulischen Druck entstand, auf. Innerhalb desjenigen Gefässtheiles, der der Bedingung 10 entspricht, herrscht ein Druck Null; die Wassertheilchen pressen sich nicht gegen die Wandung, füllen daher das Gefäss nicht vollkommen aus, sondern fallen in dem drucklosen Raume frei herunter. An derjenigen Stelle des Gefässes, wo der Druck  $p$  wieder positiv zu werden beginnt, bildet sich ein neuer Wasserspiegel  $QR$  (Fig. 289). Man sagt in solchem Falle „die Wassersäule reisst ab“. Denkt man sich das Gefäss aus einem biegsamen Stoffe, etwa Blei, so kann man durch Zusammendrücken leicht einen so kleinen Querschnitt  $F_1$  hervorbringen, dass die Trennung stattfindet. Dadurch wird aber zugleich die Ausflussmenge vermindert. An dem engen Querschnitt  $F_1$  ergibt sich jetzt nämlich für die Geschwindigkeit  $w_1$ , weil bei  $F_1$  der Gegendruck Null herrscht,

Fig. 289.



$$w_1 = \sqrt{2g \left( y + \frac{p_0}{\gamma} \right)}$$

sonach wird an der unteren Öffnung

$$w = w_1 \frac{F_1}{F} = \frac{F_1}{F} \sqrt{2g \left( y + \frac{p_0}{\gamma} \right)}.$$

Dieser Werth ist  $\leq \sqrt{2gh}$ , wenn die Bedingung 10 erfüllt ist.

Die Hauptgleichung für die ideelle Ausflussgeschwindigkeit auf S. 231 gilt demnach nur, wenn der nach S. 260, Gl. 3 berechnete Druck  $p$  an allen Stellen des Gefäßes sich positiv ergibt.

**Beispiel:** Schliesst sich an ein weites Gefäß von 1 m Wassertiefe scharfkantig ein lothrechttes Rohr von 12 m Länge (Fig. 290), so gilt in einer Tiefe  $y > 1$  m für den hydraulischen Druck  $p$  (Gl. 5) wegen  $F_1 = F$ :

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + y - h,$$

$$\text{also } p \begin{cases} \leq 0 & \text{für } y \leq h - \frac{p_0}{\gamma}, \\ > 0 & \text{für } y > h - \frac{p_0}{\gamma}, \end{cases}$$

d. h. in diesem Falle ( $h = 13$  m) für  $y \leq 3$  m. Die Röhre wird daher nur auf die untere Länge  $h_0 = 10$  m ausgefüllt; oben, wo das Rohr sich dem Gefäß anschliesst, reisst die Wassersäule ab; die Geschwindigkeit beim Eintritt in das Rohr wird

$$w_1 = \varphi \sqrt{2g(1 + h_0)} = 0,96 \sqrt{2g \cdot 11} = 14,1;$$

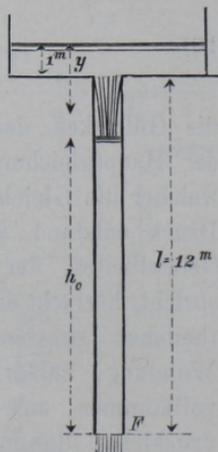
die sekundl. Wassermenge wegen der Einschnürung am scharfen Rande

$$Q = 0,64 \cdot 14,1 \cdot F = 9,02 F;$$

daher ist die Geschwindigkeit am unteren Ende

$$w = \frac{Q}{F} = 9,02 \text{ m/s.}$$

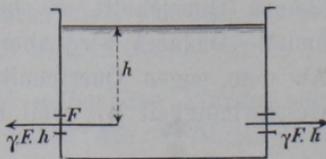
Fig. 290.



### k) Gesamtdruck ausströmenden Wassers auf die Gefäßwände.

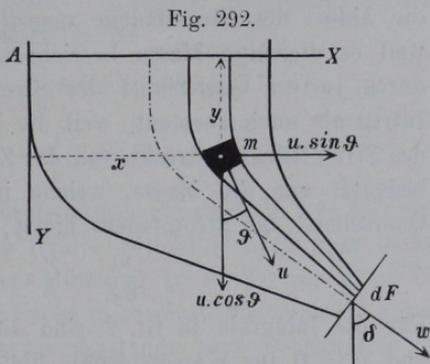
Befindet sich das Wasser in einem Gefäß in Ruhe (Fig. 291), so heben sich die Druckkräfte  $\gamma F h$  auf zwei einander gegenüber liegende parallele Wandflächenstücke auf. Entfernt man plötzlich das linksseitige Flächenstück  $F$ , so wird nun die nach rechts gerichtete Kraft  $\gamma F h$  nicht mehr aufgehoben, so dass das Gefäß jetzt einen überschüssigen Seitendruck nach rechts erfährt, während links das Wasser auszuströmen beginnt. Mit der Ausbildung des

Fig. 291.



Beharrungszustandes der Ausflussbewegung vergrößert sich aber, wie gezeigt werden soll, der einseitige Druck fast auf das Doppelte der hydrostatischen Druckkraft.

Zur Entwicklung benutzen wir ein Gefäss (Fig. 292) mit einer ziemlich bestimmt erkennbaren einfach gekrümmten Mittellinie; diese sei oben lothrecht, bilde aber an der Mündung mit der Lothrechten einen Winkel  $\delta$ . Man trenne aus der Wassermenge des Gefässes einen Stromfaden heraus, der an der Öffnung  $F$  den Querschnitt  $dF$  hat und alle diejenigen Wassertheilchen enthält, welche demnächst in Folge gegenseitiger Verdrängung durch den Öffnungstheil  $dF$  ausfließen werden.



Diejenige Wassermasse, welche durch  $dF$  während der Zeit  $dt$  ausströmt, welche daher gleichzeitig auch durch jeden anderen Querschnitt des Wasserfadens fließen muss, sei das Massentheilchen

$$1) \quad m = \frac{\gamma}{g} \cdot x \cdot dF \cdot w \cdot dt.$$

Hierin ist  $w$  die mittlere Geschwindigkeit des Ausflusstrahles. Ein solches Massentheilchen des Stromfadens mit den Koordinaten  $x$  und  $y$  habe die Geschwindigkeit  $u$ , die mit der Lothrechten den Winkel  $\vartheta$  bilde. Die Seitengeschwindigkeiten des Massentheilchen sind dann

$$\frac{dx}{dt} = u \sin \vartheta \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dt} = u \cos \vartheta,$$

die entsprechenden Beschleunigungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d(u \sin \vartheta)}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d(u \cos \vartheta)}{dt}.$$

Die entsprechenden Ergänzungskräfte sind

$$\frac{m d(u \sin \vartheta)}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{m d(u \cos \vartheta)}{dt}$$

mit dem Sinne nach links, bezw. nach oben.

Für die ganze Masse des Stromfadens ergeben sich dann die Ergänzungskräfte

$$2) \quad dX = \frac{m}{dt} \int_{w_0, 0}^{w, \delta} d(u \sin \vartheta) \quad \text{bezw.} \quad dY = \frac{m}{dt} \int_{w_0, 0}^{w, \delta} d(u \cos \vartheta).$$

Diese Ergänzungskräfte bezeichnen wir noch als Differentiale, weil die Masse des Stromfadens unendlich klein ist;  $m$  ist konstant, weil es diejenige Masse bezeichnet, die in einem Zeittheilchen  $dt$  durch jeden Querschnitt des Stromfadens geht;  $dt$  ist für obige Integrale auch konstant, weil die Integration sich über die Länge des Stromfadens erstreckt, von der Zeit aber unabhängig ist.  $m \cdot dt$  bedeutet nun die Masse, welche in jeder Sekunde durch jeden Querschnitt des Stromfadens fließt; nach Gl. 1 ist

$$\frac{m}{dt} = \frac{\gamma}{g} \alpha \cdot dF \cdot w.$$

Für die Integrale in Gl. 2 sind die unteren Grenzwerte  $u = w_0$  und  $\vartheta = 0$  im Wasserspiegel, die oberen:  $u = w$  und  $\vartheta = \delta$  an der Mündung. Bei Herstellung der unbestimmten Integrale heben sich Integral- und Differentialzeichen auf; daher wird

$$dX = \frac{\gamma}{g} \cdot \alpha \cdot dF \cdot w (w \cdot \sin \delta - 0)$$

$$dY = \frac{\gamma}{g} \cdot \alpha \cdot dF w (w \cos \delta - w_0).$$

Nehmen wir, für die meisten Fälle zutreffend,  $w_0$  als sehr klein an, so werden die Ergänzungskräfte für die ganze Wassermenge im Gefäß erhalten, indem man  $dF$  mit  $F$  vertauscht, nämlich

$$3) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = \frac{\gamma}{g} \cdot \alpha \cdot F \cdot w^2 \cdot \sin \delta, \\ Y = \frac{\gamma}{g} \cdot \alpha \cdot F \cdot w^2 \cdot \cos \delta. \end{array} \right.$$

Die Lage dieser beiden Kräfte hängt von der Form des Gefäßes ab und hat gewöhnlich kein besonderes Interesse. An irgend einem Punkt angreifend gedacht, lassen sie sich zu einer Mittelkraft

$$4) \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{\gamma}{g} \cdot \alpha \cdot F \cdot w^2$$

zusammensetzen, die mit der Lothrechten einen Winkel  $\varepsilon$  bildet, mit

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{X}{Y} = \operatorname{tg} \delta.$$

Die gesammte Ergänzungskraft  $R$  hat hiernach mit  $w$  gleiche Richtung, aber entgegengesetzten Sinn. Mit ihr müssen die äusseren Kräfte, die auf die Wassermasse im Gefässe wirken, im Gleichgewichte sein; es sind dies die Schwere  $Mg$  und der Druck der Gefässwände gegen das Wasser. Nennt man  $H$  den wagerechten nach rechts gerichteten,  $V$  den lothrechten aufwärts gerichteten Druck der Gefässwände gegen das Wasser, so ist

$$5) \left\{ \begin{array}{l} H = X = \frac{\gamma}{g} \alpha F w^2 \sin \delta, \\ V = Mg - \frac{\gamma}{g} \alpha F w^2 \cos \delta. \end{array} \right.$$

Nach dem Satze der Wechselwirkung (Theil 1, S. 34) übt das Wasser auf die Gefässwände die Kräfte  $H$  und  $V$  nach links bzw. abwärts aus. Bei geschlossener Mündung ( $w = 0$ ) war  $H = 0$ ,  $V = Mg$ ; mithin kann man die Sache so ansehen, wie wenn als Folge der Ausflussbewegung im Beharrungszustande zwei Druckkräfte  $X$  und  $Y$  entstehen, die von dem strömenden Wasser auf das Gefäss ausgeübt werden und zu den im Ruhezustande wirkenden Druckkräften hinzukommen.  $X$  hat entgegengesetzten Sinn mit  $w \sin \delta$ ,  $Y$  bildet eine Verminderung des Bodendruckes. Die Gesamtkraft  $R$ , entgegengesetzten Sinnes mit  $w$ , heisst die Reaktion des ausfliessenden Wassers. Man kann auch schreiben

$$6) \quad R = 2\gamma \cdot \alpha \cdot F \cdot \frac{w^2}{2g},$$

und wenn man noch  $w^2 = \varphi^2 \cdot 2gh$  setzt,

$$7) \quad \begin{aligned} R &= 2 \cdot \gamma \cdot \alpha \cdot F \cdot \varphi^2 \cdot h \\ &= 2 \cdot \varphi \cdot \mu \gamma \cdot F \cdot h, \end{aligned}$$

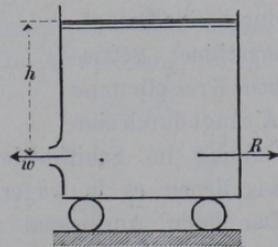
oder mit  $Q = \alpha F w$  als sekundl. Ausflussmenge

$$8) \quad R = \frac{\gamma}{g} Q w.$$

Findet (wie in Fig. 292) an der Mündung keine Einschnürung statt, so dass  $\mu = \varphi$ , so ist, weil  $\varphi^2$  nicht viel von der Einheit abweicht,  $R$  fast das Doppelte der hydrostatischen Druckkraft  $\gamma F h$  gegen die Mündung, wie S. 265 gesagt wurde.

Hat  $w$  wagerechte Richtung, so wird, mit  $\delta = 90^\circ$ ,  $R = 2\varphi \cdot \mu \cdot \gamma \cdot F \cdot h$  ebenfalls wagerecht (Fig. 293).

Fig. 293.

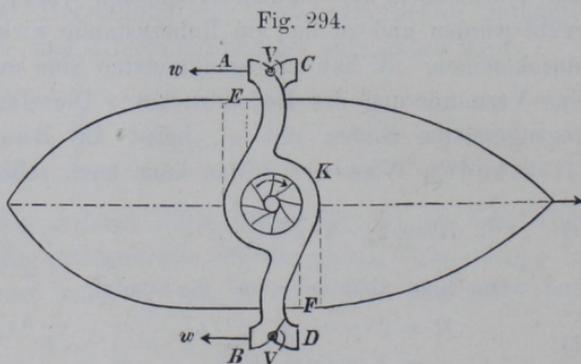


Eine gleichförmige Verschiebung des Gefäßes ändert an den Kräften nichts. Es wird  $w = \varphi \sqrt{2gh}$  die scheinbare (relative) Ausflussgeschwindigkeit des Wassers in Bezug auf das Gefäß; macht man daher das Gefäß leicht beweglich, so wird der Seitendruck  $R$  des ausfliessenden Wassers einen ebenso grossen Widerstand überwinden können.

**Beispiel:** Auf einem Eisenbahnwagen sei ein Wasserbehälter angebracht, der unten eine Seitenöffnung mit gut abgerundetem Mundstücke von  $0,12$  m Durchmesser enthält. Der Wasserspiegel liege um  $h = 2$  m über der Öffnung. Das ausfliessende Wasser erzeugt eine wagerechte Druckkraft gegen das Gefäss und somit gegen den Wagen von  $2 \cdot 1000 \cdot 0,12^2 \frac{\pi}{4} \cdot 0,96^2 \cdot 2 = \text{rund } 42 \text{ kg}$ . Rechnet man die Widerstandsziffer des Eisenbahnwagens  $= 1/400$  (s. 1. Theil, S. 255), so darf der Wagen ein Gesamtgewicht  $= 400 \cdot 42 = 16\,800 \text{ kg}$  haben, wenn er durch den Wasserausfluss in langsamer Bewegung erhalten werden soll.

Vorstehendes Beispiel entspricht keinem wirklichen Gebrauche, stützt sich vielmehr nur auf künstliche Annahmen. Thatsächliche Anwendung aber findet der Wasserstrahl zum Betriebe von Schiffen, sog. Strahlschiffen

(Reaktionsschiffen) (Fig. 294). Eine durch eine Dampfmaschine getriebene Kreiselpumpe  $K$  saugt durch eine



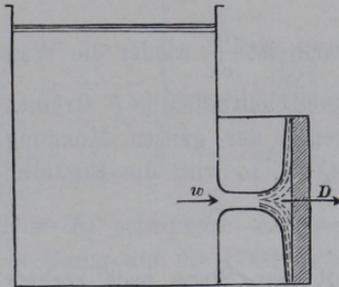
Öffnung im Schiffsboden Wasser an und presst dies in Röhren, aus denen es in wagerechter Richtung zur Ausströmung gelangt. Der beim Ausfliessen auf die Röhren und somit auf das Schiff ausgeübte Rückdruck dient zum Forttreiben des Schiffes. Beim Vorwärtsfahren (nach rechts) strömt das Wasser nach rückwärts aus den Öffnungen  $A$  und  $B$ . Durch Umstellung von Klappen  $V$  kann man den Ausfluss auch bei  $C$  und  $D$  bewirken, um das Schiff zeitweise rückwärts zu treiben. Ausfluss bei  $A$  und  $D$  bewirkt Rechtsdrehung, bei  $B$  und  $C$  Linksdrehung des Schiffes ohne Zuhülfenahme des Steuers. Die hieraus ersichtliche gute

Steuerfähigkeit des Strahlschiffes hat zur Folge gehabt, dass diese Schiffsanordnung, welche sich für den gewöhnlichen Schiffsverkehr nicht vortheilhaft erwies, in neuerer Zeit für Rettungsboote Anwendung gefunden hat (s. Génie civil, 11. September 1892, S. 332 und 27. April 1895, S. 407; Engineering 11. Oktober 1895, S. 411). Ausflussrohre *E* und *F* (punktirt) geben die Möglichkeit, auch in der Querrichtung Triebkräfte wirksam zu machen, was in der Nähe eines hülfsbedürftigen Schiffes von Wichtigkeit sein kann.

**1) Druck eines Wasserstrahles gegen eine denselben auffangende Fläche.**

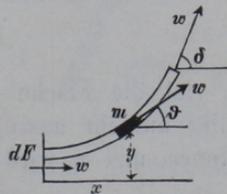
Trifft ein Wasserstrahl mit der Geschwindigkeit *w* in der Nähe der Mündung auf eine feste Fläche (Fig. 295), so erfährt der Strahl eine Änderung seiner Form, indem die einzelnen Stromfäden abgelenkt werden; da nun zu jeder Grössen- oder Richtungsänderung der Geschwindigkeit eine Kraft erforderlich ist, so muss die feste Fläche auf den Wasserstrahl Kräfte ausüben.

Fig. 295.



Die Fläche sei zunächst rechtwinklig zu *w*, dann wird der Strahl sich nach allen Seiten auf der Fläche ausbreiten und wird nahezu einen Umdrehungskörper bilden, dessen Achse in der Mittellinie des Strahles liegt. Die Abweichung, welche durch die Einwirkung der Schwere herbeigeführt wird, kann meist vernachlässigt werden; dann darf man annehmen, dass die Wassertheilchen ihre Geschwindigkeit nur der Richtung nach ändern. Dort, wo die Achse des Strahles die Fläche trifft, entstehen Wirbelbewegungen, die keine besondere Beachtung erfordern.

Fig. 296.



Ein Längentheilchen eines Stromfadens (Fig. 296) habe wieder, wie auf S. 265, die Masse

$$m = \frac{\gamma}{g} \alpha \cdot dF \cdot w dt$$

und die Koordinaten  $x$  und  $y$ , dann wird

$$\frac{dx}{dt} = w \cos \vartheta, \quad \frac{dy}{dt} = w \sin \vartheta;$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d(w \cos \vartheta)}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d(w \sin \vartheta)}{dt},$$

mit den Ergänzungskräften

$$- m \cdot \frac{d(w \cos \vartheta)}{dt} \quad \text{und} \quad - m \frac{d(w \sin \vartheta)}{dt}.$$

Letztere wird durch den Beitrag eines anderen Stromfadens, der zum betrachteten symmetrisch ist, aufgehoben; die Ergänzungskraft in der  $x$ -Richtung wird für den ganzen Stromfaden, wenn derselbe eine gesammte Ablenkung  $\delta$  erfährt,

$$dX = - \frac{m}{dt} \int_0^\delta d(w \cos \vartheta) = - \frac{m}{dt} w (\cos \delta - 1) = \frac{m}{dt} w (1 - \cos \delta).$$

Darin ist  $\frac{m}{dt}$  wieder die Wassermasse, welche sekundlich durch den Querschnittstheil  $dF$  strömt. Ist nun  $Q$  die sekundliche Wassermenge der ganzen Mündung in  $\text{cbm}$ , die sekundliche Masse also  $\gamma Q : g$ , so wird die Ergänzungskraft für den ganzen Strahl

$$X = \frac{\gamma}{g} Q w (1 - \cos \delta)$$

mit dem Sinne nach rechts; ebenso gross, aber dem Strahl entgegen gerichtet, ist die äussere Kraft, die die Fläche auf den Strahl behufs der Ablenkung ausübt, während die Kraft  $D$ , mit welcher der Strahl auf die Fläche wirkt, nach dem Satze der Wechselwirkung wieder mit  $X$  völlig übereinstimmt, d. h.

$$1) \quad D = \frac{\gamma}{g} \cdot Q \cdot w (1 - \cos \delta).$$

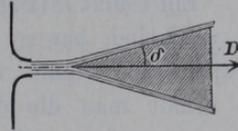
Ist die Fläche eben und gross genug, dass der Strahl sich völlig auf ihr auszubreiten vermag, so kann man  $\delta = 90^\circ$  annehmen, und es wird dann

$$2) \quad D = \frac{\gamma}{g} Q w,$$

d. h. ebenso gross wie (nach Gl. 8, S. 267) der Rückdruck des ausfliessenden Wassers auf das Gefäss. Befestigt man daher die Platte an dem Gefässe, so geben der Rückdruck auf das Gefäss und der

Druck des Strahles gegen die Platte die Summe Null, so dass das Ganze, in wagerechtem Sinne leicht beweglich gemacht, nicht in Bewegung gerathen wird. Der Druck  $D$  des im Beharrungszustande befindlichen Strahles gegen die Platte ist (S. 267) fast doppelt so gross wie der Druck auf die Platte sein würde, wenn sie die Mündung verschlösse.

Fig. 297.



Wird der Strahl nach Fig. 297 gegen die Spitze eines Kegels geführt, so ist in Gl. 1 für  $\delta$  etwa der Neigungswinkel der Kegel­seiten gegen die Achse zu setzen.

Ist dem Strahl aber die hohle Seite einer Umdrehungsfläche entgegen gestellt (Fig. 298), so hat man in Gl. 1  $\cos \delta$  mit  $\cos(\pi - \delta) = -\cos \delta$  zu vertauschen, weil die Stromfäden im Ganzen um  $\pi - \delta$  abgelenkt werden, und es ist

Fig. 298.

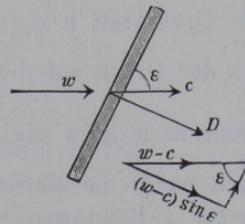
$$3) \quad D = \frac{\gamma}{g} Q w (1 + \cos \delta).$$

Weicht die Fläche mit der Geschwindigkeit  $c$  im Sinne des Strahles aus, so ist an Stelle von  $w$  in den vorstehenden Gleichungen selbstverständlich die scheinbare (relative) Geschwindigkeit  $w - c$  des Strahles in Bezug auf die Fläche einzuführen, es wird aus Gl. 1:

$$4) \quad D = \frac{\gamma}{g} Q (w - c) (1 - \cos \delta).$$

Fig. 299.

Ist die den Strahl auffangende, mit der Geschwindigkeit  $c$  ( $\parallel w$ ) ausweichende Ebene gegen die Richtungen von  $w$  und  $c$  um den Winkel  $\varepsilon$  geneigt, so zerlegt man die scheinbare Geschwindigkeit  $w - c$  in die Seitengeschwindigkeiten  $(w - c) \cos \varepsilon$  parallel der Ebene und  $(w - c) \sin \varepsilon$  rechtwinklig dazu. Erstere hat, abgesehen von der Reibung, die wir vernachlässigen, keine Einwirkung auf die Ebene, und letztere bewirkt, da vollkommene Flüssigkeiten nur rechtwinklige Druckkräfte ausüben, einen Normaldruck



$$5) \quad D = \frac{\gamma}{g} Q (w - c) \sin \varepsilon.$$

### m) L. Eulers Grundgleichungen für die Bewegung tropfbarflüssiger Körper ohne Reibung.

Ein Punkt  $P$  (Fig. 300) des flüssigen Körpers, dessen Koordinaten  $x, y, z$  sind, bewege sich während des Zeittheilchens  $dt$  nach  $P_1$ : projiziert man dann  $PP_1 = ds$  in der Richtung der drei Achsen, so erhält man die drei Projektionen  $dx, dy$  und  $dz$ . Das Parallelepiped dieser drei Seiten enthalte das Massentheilchen

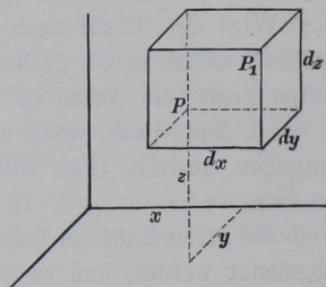
$$m = \frac{\gamma}{g} dx \cdot dy \cdot dz.$$

Die Geschwindigkeit desselben sei

$$w = \frac{ds}{dt}, \text{ zerlegt in}$$

$$w_x = \frac{dx}{dt}; \quad w_y = \frac{dy}{dt}; \quad w_z = \frac{dz}{dt}.$$

Fig. 300.



Der bei der Bewegung herrschende (also hydraulische) Druck im Punkt  $P$  werde  $p$  genannt. Dieser Druck  $p$  ist an einer Stelle  $P$  nach allen Richtungen derselbe (vergl. S. 157), wechselt aber in dem flüssigen Körper von Ort zu Ort und ist auch im Allgemeinen mit der Zeit veränderlich. Auf das Massentheilchen wirke eine Massenkraft  $m \cdot R$  mit den Seitenkräften  $m \cdot X, m \cdot Y$  und  $m \cdot Z$ .

In der Richtung der  $x$ -Achse wirkt auf das Massentheilchen  $m$  auf der linken Seite des Parallelepipedes mit dem Sinne nach rechts die Druckkraft  $p \cdot dy \cdot dz$ , auf der rechten Seite des Parallelepipedes, wo der Druck auf die Flächeneinheit  $p + \frac{\partial p}{\partial x} dx$  beträgt, mit dem Sinne nach links die Kraft  $\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dy \cdot dz$ . Endlich wirkt nach rechts die Massenkraft  $m \cdot X$ . Daher wird die Beschleunigung in der  $x$ -Richtung:

$$\frac{dw_x}{dt} = X - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx \cdot dy \cdot dz}{m} \quad \text{oder, weil}$$

$$m = \frac{\gamma}{g} \cdot dx \cdot dy \cdot dz:$$

$$1) \quad \frac{dw_x}{dt} = X - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{g}{\gamma}.$$

Die Geschwindigkeit  $w$  in dem Punkte  $P$  des flüssigen Körpers ist nun im Allgemeinen eine Funktion von  $x$ ,  $y$ ,  $z$  und  $t$ , und weil bei der Bewegung von  $P$  nach  $P_1$  sich alle diese vier Grössen ändern, so ist  $dw_x$  in Gl. 1 ein totales Differential, mithin

$$dw_x = \frac{\delta w_x}{\delta x} dx + \frac{\delta w_x}{\delta y} dy + \frac{\delta w_x}{\delta z} dz + \frac{\delta w_x}{\delta t} dt.$$

Hiernach wird aus Gl. 1:

$$\frac{g}{\gamma} \frac{\delta p}{\delta x} = X - \left\{ w_x \frac{dw_x}{dx} + w_y \frac{dw_x}{dy} + w_z \frac{dw_x}{dz} + \frac{\delta w_x}{\delta t} \right\}$$

oder auch, weil

$$\frac{dx}{dt} = w_x; \quad \frac{dy}{dt} = w_y; \quad \frac{dz}{dt} = w_z;$$

$$2) \quad \frac{g}{\gamma} \frac{\delta p}{\delta x} = X - \left\{ w_x \frac{\delta w_x}{\delta x} + w_y \frac{\delta w_x}{\delta y} + w_z \frac{\delta w_x}{\delta z} + \frac{\delta w_x}{\delta t} \right\}$$

und ebenso für die beiden anderen Achsenrichtungen:

$$3) \quad \frac{g}{\gamma} \frac{\delta p}{\delta y} = Y - \left\{ w_x \frac{\delta w_y}{\delta x} + w_y \frac{\delta w_y}{\delta y} + w_z \frac{\delta w_y}{\delta z} + \frac{\delta w_y}{\delta t} \right\},$$

$$4) \quad \frac{g}{\gamma} \frac{\delta p}{\delta z} = Z - \left\{ w_x \frac{\delta w_z}{\delta x} + w_y \frac{\delta w_z}{\delta y} + w_z \frac{\delta w_z}{\delta z} + \frac{\delta w_z}{\delta t} \right\}.$$

In den Raum des Parallelepipeds  $PP_1$  tritt während der Zeit  $dt$  links durch den Querschnitt  $dy \cdot dz$  mit der Geschwindigkeit  $w_x$  die Raummenge ein:  $dy \cdot dz \cdot w_x \cdot dt$ , rechts aber wegen der Geschwindigkeit  $w_x + \frac{\delta w_x}{\delta x} dx$  die Menge  $dy \cdot dz \cdot \left( w_x + \frac{\delta w_x}{\delta x} dx \right) \cdot dt$  aus; der Überschuss des Abflusses ist also

$$dy \cdot dz \cdot \frac{\delta w_x}{\delta x} \cdot dx \cdot dt.$$

Der Überschuss des Abflusses in der  $y$ -Richtung beträgt

$$dx \cdot dz \cdot \frac{\delta w_y}{\delta y} \cdot dy \cdot dt,$$

in der  $z$ -Richtung:

$$dx \cdot dy \cdot \frac{\delta w_z}{\delta z} \cdot dz \cdot dt.$$

Der Gesamt-Überschuss beträgt mithin:

$$dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt \cdot \left( \frac{\delta w_x}{\delta x} + \frac{\delta w_y}{\delta y} + \frac{\delta w_z}{\delta z} \right).$$

Unter der Annahme nun, dass sich innerhalb des flüssigen Körpers kein leerer Raum befinde und dass die Flüssigkeit nicht zusammendrückbar sei, muss der das Massentheilchen enthaltende Raum unveränderlich, d. h. vorstehender Gesamt-Überschuss Null sein, oder

$$5) \quad \frac{\delta w}{\delta x} + \frac{\delta w_y}{\delta y} + \frac{\delta w_z}{\delta z} = 0.$$

Diese Gleichung heisst die *Kontinuitäts-Gleichung*.

Man kann letztere Gleichung auch noch in anderer Weise ableiten: Der Rauminhalt des Massentheilchens  $m$  ist  $dx \cdot dy \cdot dz$ ; soll dieser mit der Zeit sich nicht ändern, so muss

$$6) \quad \frac{\delta(dx \cdot dy \cdot dz)}{\delta t} = 0 \text{ sein; oder}$$

$$7) \quad dy \cdot dz \frac{\delta dx}{\delta t} + dx \cdot dz \cdot \frac{\delta dy}{\delta t} + dx \cdot dy \cdot \frac{\delta dz}{\delta t} = 0.$$

Darin bedeutet  $\delta dx$  die Zunahme der Länge  $dx$  während der Zeit  $dt$ . Da nun die Geschwindigkeit in der  $x$ -Richtung im Punkte  $P$  mit den Koordinaten  $x, y, z$  die Grösse  $w_x$ , im Punkte  $P_1$  aber die Grösse  $w_x + \frac{\delta w_x}{\delta x} dx$  hat, so muss sich die Kante  $dx$  während der Zeit  $dt$  um  $\frac{\delta w_x}{\delta x} dx \cdot dt$  vergrössern, mithin ist obiges

$$\delta dx = \frac{\delta w_x}{\delta x} \cdot dx \cdot dt; \text{ ebenso}$$

$$\delta dy = \frac{\delta w_y}{\delta y} \cdot dy \cdot dt \text{ und}$$

$$\delta dz = \frac{\delta w_z}{\delta z} \cdot dz \cdot dt.$$

Hiernach wird aus Gl. 7:

$$dx \cdot dy \cdot dz \left( \frac{\delta w_x}{\delta x} + \frac{\delta w_y}{\delta y} + \frac{\delta w_z}{\delta z} \right) = 0,$$

was ebenfalls zu Gl. 5 führt.

Gleichungen 2—7 sind die allgemeinen Gleichungen für die Bewegung reibungsloser tropfbar-flüssiger Körper, welche Leonhard Euler (geb. 1707 zu Basel, gest. 1783 zu Petersburg) im Jahre 1755 aufgestellt hat.

Es soll nun angenommen werden, dass der Beharrungszustand eingetreten sei, d. h., dass an jeder Stelle des Gefässes oder Raumes, in dem die Flüssigkeit sich bewegt, die Geschwindigkeit  $w$  und der Druck  $p$  von der Zeit unabhängig, dass also  $w$  und  $p$  nur Funktionen von  $x, y$  und  $z$  seien. Ebenso sollen auch die Beschleunigungen  $X, Y$  und  $Z$  nur Funktionen des Ortes sein.

Multipliziert man Gl. 1 mit  $w_x dt = dx$ , so wird

$$w_x \cdot dw_x = X \cdot dx - \frac{g}{\gamma} \frac{\delta p}{\delta x} dx \quad \text{oder}$$

$$\frac{d(w_x^2)}{2} = X dx - \frac{g}{\gamma} \frac{\delta p}{\delta x} dx.$$

Ebenso gilt:

$$\frac{d(w_y^2)}{2} = Y dy - \frac{g}{\gamma} \frac{\delta p}{\delta y} dy \quad \text{und}$$

$$\frac{d(w_z^2)}{2} = Z dz - \frac{g}{\gamma} \frac{\delta p}{\delta z} dz.$$

Weil nun  $p$  eine  $f(x, y, z)$ , so ist

$$\frac{\delta p}{\delta x} dx + \frac{\delta p}{\delta y} dy + \frac{\delta p}{\delta z} dz = dp;$$

mithin ergibt die Addition obiger drei Gleichungen, weil

$$w^2 = w_x^2 + w_y^2 + w_z^2;$$

$$d\left(\frac{w^2}{2}\right) = X dx + Y dy + Z dz - \frac{g}{\gamma} dp.$$

Ist nun an einer Stelle mit den Koordinaten  $x_0, y_0, z_0$  die Geschwindigkeit  $w_0$ , der Druck  $p_0$ , so ergibt die Integration

$$8) \quad \frac{w^2}{2} - \frac{w_0^2}{2} = \int_{x_0 y_0 z_0}^{x y z} (X dx + Y dy + Z dz) - \frac{g}{\gamma} (p - p_0).$$

In dem besonderen Falle des Ruhezustandes wäre  $w = w_0$ , auch ginge der hydraulische Druck  $p$  über in den hydrostatischen Druck  $p$ , und man hätte, in Übereinstimmung mit Gl. 2, S. 226:

$$0 = \int_{x_0 y_0 z_0}^{x y z} X dx + Y dy + Z dz - \frac{g}{\gamma} (p - p_0).$$

Hiernach kann man

$$\int_{x_0 y_0 z_0}^{x y z} X dx - Y dy + Z dz$$

vertauschen mit  $\frac{g}{\gamma} (p - p_0)$ , wenn  $p$  und  $p_0$  die hydrostatischen Drücke an den Stellen  $x, y, z$  und  $x_0, y_0, z_0$  sind, die den

gegebenen Massenkräften im Ruhezustand entsprechen würden. Durch deren Einführung vereinfacht sich Gl. 8 zu

$$\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} = \frac{p - p_0}{\gamma} - \frac{\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_0}{\gamma}.$$

Bezieht sich die Geschwindigkeit  $w_0$  auf einen freien Wasserspiegel, so ist dort der hydraulische Druck  $\mathfrak{p}_0$  gleich dem hydrostatischen Drucke  $p_0$ , mithin

$$\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} = \frac{p - \mathfrak{p}}{\gamma} \quad \text{oder}$$

$$9) \quad \frac{\mathfrak{p}}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} - \left( \frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} \right).$$

Wir haben hiermit das Gesetz der hydraulischen Druckhöhe (s. S. 260) auf anderem Wege erhalten.

Ist noch die Schwere die einzige wirkende Wasserkraft und richtet man die positive  $y$ -Achse lothrecht abwärts, so ist

$$p = p_0 + \gamma y \quad \text{also}$$

$$\frac{\mathfrak{p}}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + y - \left( \frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} \right).$$

Hat man also ein Gefäß, aus dem das Wasser durch eine um  $h$  unter dem Wasserspiegel liegende Öffnung mit der Geschwindigkeit  $w$  ausströmt und herrscht an der Mündung ein Gegendruck  $p_m$ , so ist auch der hydraulische Druck  $\mathfrak{p}$  dort  $= p_m$ , und man erhält für  $y = h$ :

$$\frac{p_m}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + h - \left( \frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} \right)$$

oder die bekannte Gleichung (S. 259)

$$\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} = h + \frac{p_0 - p_m}{\gamma}.$$

An die Stelle der Kontinuitätsgleichung (Gl. 5, S. 274) tritt hier

$$F_0 w_0 = F w.$$

## 2. Bewegung des Wassers in Röhren.

### a) Leitungswiderstand gerader cylindrischer Röhren.

Beim Durchfließen einer längeren Röhre vom Querschnitt  $F$  und der Länge  $l$  zeigt sich ein besonderer Widerstand, ein besonderer Druckhöhenverlust oder eine Widerstandshöhe  $z$ . Dieser

von der Reibung herrührende Widerstand folgt wesentlich anderen Gesetzen als der Reibungswiderstand fester Körper (Theil 1, S. 189). Er ist nämlich ganz unabhängig von dem Drucke des Wassers, nahezu verhältnissgleich mit der Berührungsfläche und mit dem Quadrate der Geschwindigkeit  $w$ , also auch mit der Geschwindigkeitshöhe  $\frac{w^2}{2g}$ .

Ist  $u$  der innere Umfang des Röhrenquerschnittes, so berühren sich in einer Röhre von der Länge  $l$  das Wasser und die Wandung in einer Fläche  $u \cdot l$ . Die Summe  $W$  der Reibungswiderstände längs der Röhre lässt sich daher schreiben

$$1) \quad W = \kappa u l \frac{w^2}{2g}.$$

Um die entsprechende Widerstandshöhe  $z$  zu finden, berechnen wir (nach S. 245/6) die während eines Zeittheilchens  $dt$  verrichtete Widerstandsarbeit  $d\mathfrak{A}$  und setzen diese  $= mgz$ , wenn  $m$  wieder diejenige Wassermasse bedeutet, welche während der Zeit  $dt$  jeden Querschnitt durchströmt. Bei einer Geschwindigkeit  $w$  ist  $w \cdot dt$  der Gleitweg des Wassers in der Röhre während der Zeit  $dt$ , mithin  $d\mathfrak{A} = W \cdot w \cdot dt$ . Ferner ist  $mg = \gamma \cdot F \cdot w \cdot dt$  und

$$z = \frac{d\mathfrak{A}}{mg} = \kappa \cdot u \cdot l \frac{w^2}{2g} \frac{w dt}{\gamma \cdot F \cdot w \cdot dt}$$

$$2) \quad z = \frac{\kappa u l w^2}{\gamma F 2g}.$$

Setzt man  $\kappa = \gamma\beta$ , so wird

$$3) \quad z = \beta \frac{u l w^2}{F 2g}$$

mit  $\beta$  als Widerstandsziffer für Wasser in Röhren beliebiger Querschnittsform. Für cylindrische Röhren vom inneren Durchmesser  $d$  ist im Besonderen  $u = d\pi$ ,  $F = \frac{1}{4}d^2\pi$ , mithin

$$\frac{u}{F} = \frac{4}{d} \quad \text{und} \quad z = \beta 4 \frac{l w^2}{d 2g}$$

oder, wenn man für diesen besonders häufigen Fall

$$4) \quad 4\beta = \lambda$$

setzt und  $\lambda$  als Widerstandsziffer cylindrischer Wasserleitungsröhren bezeichnet,

$$5) \quad z = \lambda \frac{l w^2}{d 2g}.$$

Als erste Annäherung ist nach Dupuit

$$6) \quad \lambda = 0,03 \text{ zu setzen.}$$

Eingehendere Versuche haben aber gezeigt, dass  $\lambda$  nicht nur mit dem Grade der Rauigkeit der inneren Röhrenfläche sich ändert, sondern auch noch in gewisser Weise von der Röhrenweite  $d$  und der Geschwindigkeit  $w$  abhängt, dass also die vorläufig angegebene Proportionalität des Widerstandes mit der Fläche  $u \cdot l$  und dem Quadrate der Geschwindigkeit nicht genau zutrifft.

Nach ausgedehnten Versuchen des französischen Ingenieurs Darcy vom Jahre 1857 ist für neue eiserne oder bleierne Röhren nach Fortlassung entbehrllicher Ziffern:

$$7) \quad \lambda = \left( 0,02 + \frac{0,0005}{d} \right).$$

Hiernach würde also  $\lambda$  von  $w$  nicht abhängig sein.

G. Hagen (Berlin) hat aus eigenen und Darcy's Versuchen eine Formel abgeleitet, die auf die Temperatur des Wassers Rücksicht nimmt. Es möge hier nur der abgerundete Werth für eine Temperatur von  $10^0$  C. angegeben werden:

$$8) \quad \lambda = 0,0236 + \frac{0,00008}{dw}.$$

Innerhalb der gewöhnlich vorkommenden Grenzen für  $d$  und  $w$  schwankt  $\lambda$  nach Gl. 8 nur zwischen 0,024 und 0,027, so dass man (nach Grashof, Theoretische Maschinenlehre, 1. Bd., S. 483), wenn man wegen geringer Unreinigkeit der Röhren die Zahl noch mit etwa 1,2 multiplicirt, wieder zu dem runden Mittelwerthe  $\lambda = 0,03$  gelangt.

Für Holzröhren, wie sie im Gebirge noch vorkommen, hat man etwa  $\lambda = 0,035$ , für Röhren, die durch feste Niederschläge aus dem Wasser stark verunreinigt sind,  $\lambda = 0,04$  zu setzen; ausserdem pflegt man im letzteren Fall eine Querschnittsverminderung in Folge der Niederschläge auf etwa  $\frac{4}{5}$  zu berücksichtigen.

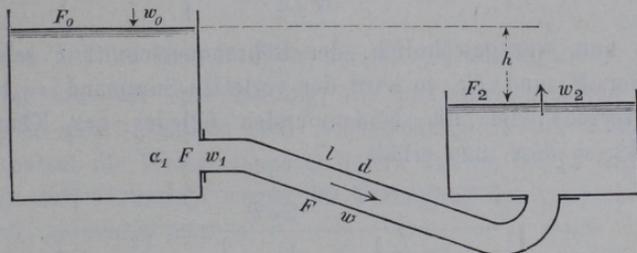
Es sei noch erwähnt, dass der franz. Ing. Flamant (s. Annales des ponts et chaussées 1892, Sept., S. 301)

$$9) \quad \lambda = \frac{m}{\sqrt[4]{dw}}$$

entwickelt hat, wobei für glatte Röhren aus Blei, Glas, Schmiedeseisen  $m = 0,0102$  bis  $0,0122$ , für neue Gusseisenröhren  $m = 0,0145$ , für gebrauchte Gusseisenröhren  $m = 0,0181$  zu setzen ist.

Sind nun 2 Gefässe nach Fig. 301 durch eine Röhre von der Weite  $d$ , der Länge  $l$ , dem Querschnitt  $F$  mit einander verbunden, so ermittelt man die Geschwindigkeit  $w$  in der Röhre, indem man wieder wie auf S. 246 die wirksame Druckhöhe in die einzelnen Theile zerlegt, wozu sie verwendet wird. Dabei verfolgt man die

Fig. 301.



Wasserbewegung vom Ober- bis zum Unterwasser, um keine Widerstandshöhe zu übersehen. Das Unterwasser ist als Mündung zu betrachten; daher ist an Stelle der beiden ersten Glieder der rechten Seite von Gl. 3, S. 246 zu schreiben:  $\frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g}$ . An Widerstandshöhen kommt zuerst der Reibungsverlust im Obergefässe mit  $\zeta_0 \frac{w_1^2}{2g}$  in Betracht; sodann der Stossverlust bei scharfkantigem Anschlusse der Röhre (S. 247) mit  $\frac{(w_1 - w)^2}{2g}$ ; dann der Reibungsverlust in der Röhre mit  $\lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g}$ . Beim Übertritte des Wassers aus der engen Röhre in das Untergefäss erfolgt ein Stossverlust  $\frac{(w - w_2)^2}{2g}$ , endlich im Untergefäss ein Reibungsverlust wie bei umgekehrter Bewegung, d. h. mit  $\zeta_0 \frac{w^2}{2g}$ . Sonach wird

$$\begin{aligned}
 10) \quad h &= \frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} + \zeta_0 \frac{w_1^2}{2g} + \frac{(w_1 - w)^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g} \\
 &\quad + \frac{(w - w_2)^2}{2g} + \zeta_0 \frac{w^2}{2g}.
 \end{aligned}$$

Um die verschiedenen Geschwindigkeiten auf  $w$  zurückzuführen, setze man  $w_2 = \frac{w F}{F_2}$ ;  $w_0 = w \frac{F}{F_0}$ ;  $w_1 = \frac{w}{\alpha}$ , dann wird

$$11) \quad 2gh = w^2 \left\{ \frac{F^2}{F_2^2} - \frac{F^2}{F_0^2} + \zeta_0 \frac{1}{\alpha_1^2} + \left( \frac{1}{\alpha_1} - 1 \right)^2 + \lambda \frac{l}{d} \right. \\ \left. + \left( 1 - \frac{F}{F_2} \right)^2 + \zeta_0 \right\}.$$

Ist nun, wie gewöhnlich, der Röhrenquerschnitt  $F$  sehr klein gegenüber  $F_0$  und  $F_2$ , so wird der vorletzte Summand = 1; hiergegen verschwinden die beiden ersten Glieder des Klammernausdrucks, so dass man erhält

$$12) \quad w = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \zeta_0 \left( \frac{1}{\alpha_1^2} + 1 \right) + \left( \frac{1}{\alpha_1} - 1 \right)^2 + \lambda \frac{l}{d}}}.$$

Mit  $\zeta_0 = 0,085$ ,  $\alpha_1 = 0,64$  wird dann (rund)

$$13) \quad w = \sqrt{\frac{2gh}{1,6 + \lambda \frac{l}{d}}}.$$

**Beispiel:**  $h = 2$  m,  $l = 20$  m,  $d = 0,1$  m und  $\lambda = 0,03$  giebt

$$w = \sqrt{\frac{2g \cdot 2}{1,6 + 0,03 \cdot 200}} = 2,27 \text{ m,} \\ Q = \frac{1}{4} d^2 \pi \cdot w = 0,018 \text{ cbm.}$$

$\sqrt{2g \cdot 2} = 6,3$  lässt im Vergleiche mit  $w$  den Einfluss der Widerstände erkennen.

Soll die erforderliche Röhrenweite  $d$  bei gegebener sekundl. Wassermenge  $Q$ , gegebenen  $h$  und  $l$  berechnet werden, so bedenke man, dass

$$Q = \frac{d^2 \pi}{4} w = \frac{d^2 \pi}{4} \sqrt{\frac{2gh}{1,6 + \lambda \frac{l}{d}}},$$

woraus sich

$$14) \quad d^5 = \frac{16 Q^2}{\pi^2 2gh} (1,6d + \lambda l)$$

ergiebt. Man löst diese Gleichung nach  $d$  auf, indem man vorläufig auf

der rechten Seite das Glied  $1,6d$  vernachlässigt, hiermit einen Annäherungswerth für  $d$  erhält, nämlich

$$15) \quad d = \sqrt[5]{\frac{16 Q^2 \lambda l}{\pi^2 2 g h}},$$

oder für  $\lambda = 0,03$

$$16) \quad d = 0,3 \sqrt[5]{\frac{Q^2 l}{h}},$$

und diesen auf der rechten Seite der Gl. 14 einführt.

Setzt man für eine Leitung, die mit Sicherheit für längere Zeit, d. h. auch nachdem sich Niederschläge in der Röhre festgesetzt haben, die Wassermenge  $Q$  liefern soll, in Gl. 15 den Werth  $\lambda = 0,04$  und vertauscht wegen der Verengung des Querschnittes  $Q$  mit  $^{5/4}Q$ , so erhält man

$$17) \quad d = 0,35 \sqrt[5]{\frac{Q^2 l}{h}}.$$

**Beispiel:** Eine Röhre soll  $Q = 0,01$  cbm/s. liefern bei einer Länge  $l = 100$  m und einer verfügbaren Druckhöhe  $h = 2$  m. Dann ist vorläufig nach Gl. 16:

$$d = 0,3 \sqrt[5]{\frac{0,01^2 \cdot 100}{2}} = 0,104 \text{ m.}$$

Hiermit wird aus Gl. 14

$$d^5 = \frac{16 \cdot 0,01^2}{\pi^2 \cdot 2 g \cdot 2} (1,6 \cdot 0,104 + 0,03 \cdot 100)$$

und  $d = 0,105$  m, d. h. nur wenig mehr als der vorläufige Werth. Wählt man unter Vernachlässigung von  $1,6d$  die Gl. 17, so erhält man

$$d = 0,35 \sqrt[5]{\frac{0,01^2 \cdot 100}{2}} = 0,121 \text{ m.}$$

Für die meisten Fälle der Anwendung wird diese Gl. 17 zu wählen sein.

### b) Benutzung der Druckmesser (Piézometer).

Bringt man an den Stellen  $A$  und  $B$  (Fig. 302) eines Leitungsrohres lothrechte Wasserröhren an, so wird in diesen das Wasser bis zu einer Höhe  $x_1$  bzw.  $x_2$  sich erheben und in dieser, dem hydraulischen Druck an den Stellen  $A$  und  $B$  entsprechenden Höhe in Ruhe verbleiben. Bezeichnet  $p_1$  den hydraulischen Druck bei  $A$ ,

so ist  $p_1 = \gamma x_1$ . Nach Gl. 3, S. 260 ist dann für die Stelle  $A$  welche um  $y_1$  unter dem Oberwasser liegt,

$$x_1 = \left( \frac{p_0}{\gamma} + y_1 \right) - \left( \frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} \right) - z_1,$$

wenn  $w$  die Geschwindigkeit in der Röhre und  $z_1$  die Summe der Widerstandshöhen zwischen dem Oberwasser und der Stelle  $A$ . Ebenso gilt dann für die Stelle  $B$

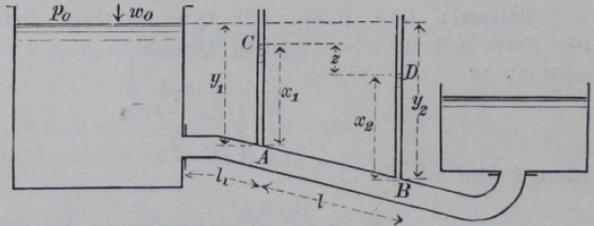
$$x_2 = \left( \frac{p_0}{\gamma} + y_2 \right) - \left( \frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} \right) - z_2.$$

Zieht man von dieser Gleichung die vorige ab, so entsteht:

$$x_2 - x_1 = y_2 - y_1 - (z_2 - z_1) \quad \text{oder} \\ (y_2 - x_2) - (y_1 - x_1) = (z_2 - z_1).$$

Nun ist  $(y_2 - x_2)$  die Tiefe des Druckwasserstandes  $D$ ,  $(y_1 - x_1)$  diejenige des Druckwasserstandes  $C$  unter dem Oberwasser. Der Unterschied beider ist also der unmittelbare Höhenunter-

Fig. 302.



schied  $z$  der Druckmesser-Wasserspiegel  $C$  und  $D$ ; und nach letzterer Gleichung ist diese Höhe  $z = z_2 - z_1$ . Es bedeutet aber  $z_2 - z_1$  die auf die Strecke  $AB = l$  entfallende Widerstandshöhe, mithin wird die zwischen zwei Stellen  $A$  und  $B$  einer Röhrenleitung auftretende Widerstandshöhe unmittelbar gemessen durch den Höhenunterschied der Wasserspiegel zweier in  $A$  und  $B$  angebrachten Druckmesser oder Piëzometer. (Letzterer Name kommt von dem griechischen Worte  $\pi\acute{\alpha}\epsilon\zeta\omega =$  drücken.) Für den Fall der Figur 302 würde

$$z = \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g},$$

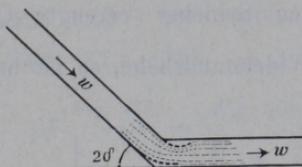
wenn  $l$  die Entfernung der beiden Stellen  $A$  und  $B$  von einander bezeichnet.

Solche Druckmesser sind benutzt worden zur Ermittlung der Ziffer  $\lambda$ ; ebenso aber auch zur Messung anderer Widerstandshöhen, die durch Richtungsänderungen, Abstellvorrichtungen (Schieber, Hähne, Ventile) u. dgl. verursacht werden.

### c) Widerstand von Knieröhren und gekrümmten Röhren.

Erfährt eine Röhre einen scharfen Knick um einen Winkel  $2\delta$  (Fig. 303), wie solches bei Holzföhren vorkommt, so kann das Wasser dieser plötzlichen Richtungsänderung nicht folgen; vielmehr wird unmittelbar nach dem Knick eine Einschnürung und Wiederausbreitung vorkommen, was nach S. 247 einen Stossverlust erzeugt. Versuche, welche Weisbach darüber angestellt hat, sind durch die Formel

Fig. 303.



1) 
$$\zeta_2 = 0,9457 \sin^2 \delta + 2,047 \sin^4 \delta$$
 zum Ausdruck gebracht, wenn die Widerstandshöhe  $\zeta_2 \frac{w^2}{2g}$  bedeutet.

$$\delta = 10^\circ \text{ giebt } \zeta_2 = 0,046,$$

$$\text{,, } = 20^\circ \text{ ,, ,, } = 0,139,$$

$$\text{,, } = 30^\circ \text{ ,, ,, } = 0,364,$$

$$\text{,, } = 40^\circ \text{ ,, ,, } = 0,740,$$

$$\text{,, } = 45^\circ \text{ ,, ,, } = 0,984.$$

Für Kropfröhren (Krümmer), deren Mittellinie nach einem Viertelkreise vom Halbmesser  $\rho$  geformt ist, gilt mit derselben Bedeutung

$$2) \quad \zeta_2 = 0,131 + 1,847 \left( \frac{1/2 d}{\rho} \right)^{3,5}.$$

$$\text{Für } \frac{1/2 d}{\rho} = 0,2 \quad 0,3 \quad 0,4 \quad 0,5 \quad 0,6$$

$$\text{wird } \zeta_2 = 0,138 \quad 0,158 \quad 0,206 \quad 0,294 \quad 0,440.$$

Entspricht die Krümmung nicht einem Viertelkreise, sondern einem Mittelpunktswinkel von  $\delta$  Graden, so setzt man die Widerstandshöhe

$$3) \quad z = \zeta_2 \frac{\delta}{90} \frac{w^2}{2g}.$$

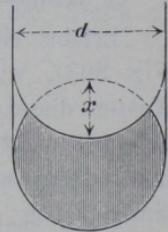
d) Widerstand beim Durchgange durch Schieber, Hähne, Drosselklappen und Ventile.

Diese Widerstände beruhen sämmtlich auf innerer Einschnürung. Weisbach's Versuche vom Jahre 1842 haben zu folgenden Ergebnissen geführt.

Schieber in kreisförmigem Rohre:

Ist  $F$  der Querschnitt des unverengten Rohres,  $w$  die Geschwindigkeit in demselben,  $F_1$  der durch den Schieber verengte Querschnitt,  $\zeta_3 \frac{w^2}{2g}$  die Widerstandshöhe, so ist nach Fig. 304 bei

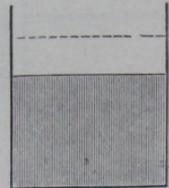
Fig. 304.



$\frac{x}{d} =$	$1/8$	$2/8$	$3/8$	$4/8$	$5/8$	$6/8$	$7/8$
$\frac{F_1}{F} =$	0,948	0,856	0,740	0,609	0,466	0,315	0,159
$\zeta_3 =$	0,07	0,26	0,81	2,06	5,52	17,0	97,8.

Schieber im Rohre von rechteckigem Querschnitte (Fig. 305):

Fig. 305.



$\frac{F_1}{F} =$	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
$\zeta_3 =$	0,09	0,39	0,95	2,08	4,02	8,12	17,8	44,5	193.

Hahn mit kreisförmiger Durchgangsöffnung; Stellwinkel  $\delta$  (Fig. 306):

Stellwinkel $\delta =$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$	$65^\circ$	$82^\circ$
$\frac{F_1}{F} =$	0,850	0,692	0,535	0,385	0,250	0,137	0,091	0
$\zeta_3 =$	0,29	1,56	5,47	17,3	52,6	206	486	$\infty$ .

Hahn mit rechteckiger Durchgangsöffnung:

Stellwinkel $\delta =$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$	$67^\circ$
$\frac{F_1}{F} =$	0,849	0,687	0,520	0,352	0,188	0
$\zeta_3 =$	0,31	1,84	6,15	20,7	95,3	$\infty$ .

Drosselklappe (Fig. 307) in kreisförmigem Rohre:

Fig. 306.

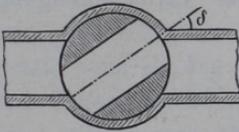
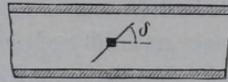


Fig. 307.



Stellwinkel $\delta = 10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$	$70^\circ$	$90^\circ$
$\zeta_3 = 0,52$	1,54	3,91	10,8	32,6	118	751	$\infty$ .

Drosselklappe in rechteckigem Rohre:

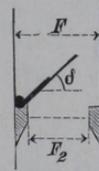
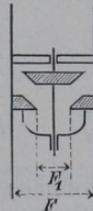
Stellwinkel $\delta = 10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$	$70^\circ$	$90^\circ$
$\zeta_3 = 0,45$	1,34	3,54	9,27	24,9	77,4	368	$\infty$ .

Für Kegelventile (Fig. 308) ist

$$\zeta_3 = \left( 1,537 \frac{F}{F_1} - 1 \right)^2,$$

Fig. 308.

Fig. 309.



wenn  $F_1$  der kleinste Durchflussquerschnitt.

Für Klappenventile (Fig. 309) ist, wenn die Öffnung im Ventil Sitz

$$F_2 = 0,535 F,$$

für $\delta = 70^\circ$	$60^\circ$	$50^\circ$	$45^\circ$	$40^\circ$	$35^\circ$	$30^\circ$	$25^\circ$	$20^\circ$	$15^\circ$
$\zeta_3 = 1,7$	3,2	6,6	9,5	14	20	30	42	62	90.

e) Wasserleitung mit Verzweigung.

Von einem Hauptbehälter  $A$  (Fig. 310) werde nach zwei

Stellen  $B$  und  $C$  die sekundl. Wassermenge  $Q_1$

bezw.  $Q_2$  geliefert. Von  $A$  nach  $D$  führe ein

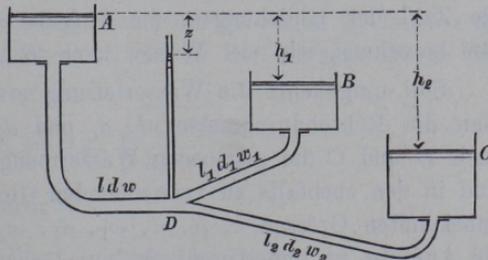
Hauptrohr von der Weite  $d$ , der Länge  $l$ . Hier

theile sich das Rohr in die Zweige von den Ab-

messungen  $d_1, l_1$  bezw.  $d_2, l_2$ . Zur Berechnung

von  $Q_1$  und  $Q_2$  denke man sich an der Verzweigungsstelle  $D$  einen

Fig. 310.



Druckmesser (Piëzometer) angebracht, dessen Wasserspiegel um  $z$  unter dem Oberwasser liegen möge. Dann ist  $z$  die wirksame Druckhöhe von  $A$  bis  $D$ , d. h. unter Vernachlässigung der unbedeutenden Krümmungen:

$$1) \quad z = \frac{w^2}{2g} \left( 1,6 + \lambda \frac{l}{d} \right).$$

Wenn man annimmt, dass der Übergang aus dem Hauptrohr in die beiden Zweige allmählich erfolge, braucht ein Verlust dort nicht angenommen zu werden. Auch wollen wir voraussetzen, der Unterschied zwischen  $w$ ,  $w_1$  und  $w_2$  sei so gering, dass zur Erzeugung der letzteren beiden Geschwindigkeiten aus der ersteren keine nennenswerthe Druckhöhe nöthig werde. Von  $D$  bis  $B$  ist  $h_1 - z$  die wirksame Druckhöhe, welche zur Überwindung der Röhrenreibung und der Gefässreibung bei  $B$  dient, daher

$$2) \quad h_1 - z = \frac{w_1^2}{2g} \left( \zeta_0 + \lambda \frac{l_1}{d_1} \right); \text{ ebenso}$$

$$3) \quad h_2 - z = \frac{w_2^2}{2g} \left( \zeta_0 + \lambda \frac{l_2}{d_2} \right).$$

Hierzu kommen noch die Gleichungen:

$$4) \quad Q_1 = \frac{d_1^2 \pi}{4} \cdot w_1;$$

$$5) \quad Q_2 = \frac{d_2^2 \pi}{4} \cdot w_2;$$

$$6) \quad Q_1 + Q_2 = \frac{d^2 \pi}{4} \cdot w.$$

In diesen sechs Gleichungen sind unbekannt:  $z$ ,  $w$ ,  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $Q_1$  und  $Q_2$ ; d. h. die Zahl der Unbekannten ist ebenso gross, wie die Zahl der Gleichungen, die Aufgabe somit lösbar. Man kann also berechnen, wie viel Wasser nach  $B$  und  $C$  fliesst.

Soll umgekehrt die Wasserleitung erst entworfen werden, will man die Röhrendurchmesser  $d$ ,  $d_1$  und  $d_2$  so bestimmen, dass sie nach  $B$  und  $C$  die gegebenen Wassermengen  $Q_1$  und  $Q_2$  liefern, so sind in den ebenfalls zu verwendenden Gleichungen 1—6 die sieben unbekannt Grössen  $z$ ,  $w$ ,  $d$ ,  $w_1$ ,  $d_1$ ,  $w_2$  und  $d_2$  enthalten, d. h. die Aufgabe ist unbestimmt, ist nur lösbar, wenn man für eine der Grössen einen Werth willkürlich annimmt, etwa  $w = 1$  bis  $1,3$  m.

Dass die Aufgabe verschiedene Lösungen zulässt, erkennt man auch unmittelbar durch folgende Überlegung: Nehmen wir an, die Röhrenweiten  $d = 0,3^m$ ;  $d_1 = 0,2$ ,  $d_2 = 0,1^m$  genügen den gestellten Bedingungen; würde man nun  $d$  vergrößern, vielleicht auf  $0,4^m$ , so würde jetzt, wenn  $d_1$  und  $d_2$  unverändert blieben, nach  $B$  und  $C$  mehr Wasser fließen als bisher; durch entsprechende Verkleinerung von  $d_1$  und  $d_2$  würde man aber diesen Überschuss wieder in Wegfall bringen können und erhielte somit drei andere Weiten  $d$ ,  $d_1$  und  $d_2$ , die ebenfalls die Aufgabe zu erfüllen vermöchten.

Für längere Röhrenleitungen kann man in Gl. 1 den Summanden 1,6, in Gl. 2 und 3 die Summanden  $\zeta_0$  vernachlässigen und erhält statt der Gl. 1—3:

$$7) \quad z = \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g},$$

$$8) \quad h_1 - z = \lambda \frac{l_1}{d_1} \frac{w_1^2}{2g},$$

$$9) \quad h_2 - z = \lambda \frac{l_2}{d_2} \frac{w_2^2}{2g}.$$

Wenn man nun zur Bestimmung der Röhrenweite die Geschwindigkeit  $w$  im Hauptrohr annimmt, so ist nach Gl. 7 der Werth  $z$  ermittelt, ebenso die Weite des Hauptrohres nach Gl. 6. Da nun auch  $h_1 - z$  und  $h_2 - z$  bekannt sind, so liefern Gl. 4 u. 8:

$$10) \quad d_1 = \sqrt[5]{\frac{16 Q_1^2 \lambda l_1}{\pi^2 2g (h_1 - z)}}; \quad \text{ebenso wird}$$

$$11) \quad d_2 = \sqrt[5]{\frac{16 Q_2^2 \lambda l_2}{\pi^2 2g (h_2 - z)}}.$$

Vertauscht man der festen Niederschläge wegen  $Q_1$  mit  $^{5/4} Q_1$  und setzt  $\lambda = 0,04$ , so bekommt Gl. 10 die einfache Form der Gl. 17, S 281

$$12) \quad d_1 = 0,35 \sqrt[5]{\frac{Q_1^2 l_1}{h_1 - z}}$$

und Gl. 11 ebenso die Form

$$13) \quad d_2 = 0,35 \sqrt[5]{\frac{Q_2^2 l_2}{h_2 - z}}.$$

**Beispiel:** Es sei  $Q_1 = 0,1 \text{ cbm/s.}$ ,  $Q_2 = 0,03 \text{ cbm/s.}$ ,  $l = 300 \text{ m}$ ,  $l_1 = 200 \text{ m}$ ,  $l_2 = 500 \text{ m}$ ,  $h_1 = 12 \text{ m}$ ,  $h_2 = 6 \text{ m}$ ; ferner werde  $w = 1 \text{ m}$  angenommen.

Dann wird

$$\frac{d^2 \pi}{4} = 0,13 \cdot \frac{5}{4} = 0,16 \text{ und } d = 0,45 \text{ m}$$

und mit  $\lambda = 0,04$ :

$$z = 0,04 \frac{300}{0,45} \frac{1}{2g} = 1,36 \text{ m.}$$

$$d_1 = 0,35 \sqrt[5]{\frac{0,1^2 \cdot 200}{10,64}} = 0,25 \text{ m;}$$

$$d_2 = 0,35 \sqrt[5]{\frac{0,03^2 \cdot 500}{4,64}} = 0,22 \text{ m.}$$

### f) Widerstand eines kegelförmigen Rohres.

Verengt sich ein Rohr der Länge  $l_1$  von der der Geschwindigkeit  $w$  entsprechenden Weite  $d$  kegelförmig auf die Weite  $d_1$  (Fig. 311), so gilt in einem Abstand  $x$  von der weitesten Stelle für die Weite  $y$  die Beziehung

$$d - y = \frac{d - d_1}{l_1} x \text{ mit } -dy = \frac{d - d_1}{l_1} dx;$$

für die Geschwindigkeit

$$w_x = w \frac{d^2}{y^2}.$$

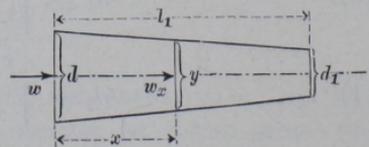
Auf ein Längentheilchen  $dx$  kommt (Gl. 5, S. 277) die Widerstandshöhe

$$\begin{aligned} dz &= \lambda \frac{dx}{y} \frac{w_x^2}{2g} = \lambda dx \frac{w^2}{2g} \frac{d^4}{y^5} \\ &= -\frac{\lambda l_1}{d - d_1} \frac{w^2}{2g} d^4 y^{-5} dy, \end{aligned}$$

daher auf die ganze Länge

$$\begin{aligned} z &= -\frac{\lambda l_1}{d - d_1} \frac{w^2}{2g} d^4 \int_a^{d_1} y^{-5} dy \\ &= \frac{\lambda l_1}{d - d_1} \frac{w^2}{2g} \frac{d^4}{4} \left( \frac{1}{d_1^4} - \frac{1}{d^4} \right) \\ &= \lambda \frac{w^2}{2g} \frac{l_1}{d} \left( \frac{1}{4} \frac{d^4}{d_1^4} - \frac{1}{4} \right). \end{aligned}$$

Fig. 311.



Der letzte Klammernausdruck giebt an, in welchem Verhältnisse der Widerstand sich vergrößert im Vergleiche mit einem cylindrischen Rohre von der Weite  $d$  und der Länge  $l_1$ .

$$\frac{d_1}{d} = \frac{1}{2} \text{ giebt } z = \lambda \frac{w^2}{2g} 7,5 \frac{l_1}{d}$$

$$\frac{d_1}{d} = \frac{1}{5} \quad ,, \quad z = \lambda \frac{w^2}{2g} 195 \frac{l_1}{d}.$$

### g) Steighöhe springender Strahlen.

Ein Strahl, der mit der Geschwindigkeit  $w$  aus einer Mündung lothrecht emporsteigt, würde im luftleeren Raum eine Höhe

$$h_s = \frac{w^2}{2g} \text{ erreichen.}$$

In Folge des Luftwiderstandes vermindert sich die erreichbare Höhe auf  $\eta \frac{w^2}{2g}$ . Die Ziffer  $\eta$  hängt theils von der Form des Mundstücks ab, weil diese Einfluss darauf hat, ob der Strahl gut geschlossen bleibt oder sich zertheilt; theils aber ist  $\eta$  auch noch von  $w^2$  abhängig.

Es soll hier auf das Verhalten der springenden Strahlen nicht näher eingegangen, nur angeführt werden, dass man als rohe Annäherung an Versuche von Weisbach

$$1) \quad \eta = 1 - 0,01 \frac{w^2}{2g} \text{ setzen kann.}$$

**Beispiel:** Von einem Behälter führe (Fig. 312) ein Rohr von 20 m Länge und 0,02 m Weite zu einem lothrechten kegelförmigen Mundstücke von 0,15 m Länge; es soll die Steighöhe des Springstrahls berechnet werden. Die wirksame Druckhöhe sei 8 m.

Es ist allgemein (vergl. Gl. 10, S. 279 mit  $w_0 = 0$  und mit Fortlassung der beiden letzten Glieder)

$$h = \frac{w_2^2}{2g} + \zeta_0 \frac{w_1^2}{2g} + \frac{w^2}{2g} \left( \frac{1}{\alpha_1} - 1 \right)^2 + \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g},$$

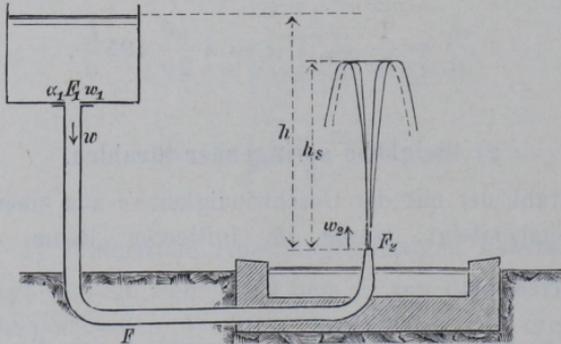
wenn in  $l$  zugleich die ideelle (vergrößerte) Länge des Mundstücks enthalten ist. Es ist dann die Geschwindigkeit in der Hauptröhre

$$w = \sqrt{\frac{2gh}{\frac{F^2}{F_2^2} + \zeta_0 \frac{1}{\alpha_1^2} + \left( \frac{1}{\alpha_1} - 1 \right)^2 + \lambda \frac{l}{d}}}$$

und die Geschwindigkeit des Springstrahls (mit  $\zeta_0 = 0,085$ ,  $\alpha_1 = 0,64$ ,  $\lambda = 0,03$ )

$$w_2 = \frac{F}{F_2} w = \frac{F}{F_2} \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{F}{F_2}\right)^2 + 0,21 + 0,32 + 0,03 \frac{l}{d}}}$$

Fig. 312.



Ist  $d_2 = 0,01$  m der Durchmesser des Mundstücks, so wird für  $d_2 = 0,5 d$ :

$$l = 20 + 7,5 \cdot 0,15 = 21,125 \text{ m}$$

$$w_2 = 4 \sqrt{\frac{2g \cdot 8}{16 + 0,53 + 0,03 \cdot 1056}} = 7,2 \text{ m.}$$

Dann ist

$$\frac{w_2^2}{2g} = 2,64 \text{ m,}$$

$$\eta = 1 - 0,026 = 0,974,$$

also die Steighöhe

$$h_s = 0,974 \cdot 2,64 = 2,57 \text{ m.}$$

Der sekundliche Wasserverbrauch ist

$$Q = 0,01^2 \frac{\pi}{4} \cdot 7,2 = 0,000565 \frac{\text{cbm}}{\text{s.}} = 0,565 \frac{1}{\text{s.}}$$

Verengt sich aber das Mundstück auf  $d_2 = 0,2 d = 4 \text{ mm}$ , so wird

$$l = 20 + 0,15 \cdot 195 = 49 \text{ m;}$$

$$w_2 = 25 \sqrt{\frac{2g \cdot 8}{625 + 0,53 + 0,03 \cdot 2450}} = 11,84;$$

$$\frac{w_2^2}{2g} = 7,1 \text{ m; } \eta = 1 - 0,071 = 0,93,$$

also die Steighöhe

$$h_s = 0,93 \cdot 7,1 = 6,6 \text{ m,}$$

der sekundliche Wasserverbrauch

$$Q = 0,004^2 \frac{\pi}{4} \cdot 11,84 = 0,0001487 \frac{\text{cbm}}{\text{s.}} = 0,1487 \frac{1}{\text{s.}}$$

Die stärkere Verengung des Mundstücks hat also die Sprunghöhe erheblich vergrößert, den Wasserverbrauch aber bedeutend vermindert.

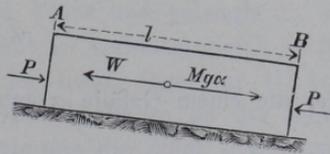
### 3. Bewegung des Wassers in Kanälen und Flüssen.

#### a) Gleichförmige Bewegung des Wassers in Kanälen.

Soll die beständige (d. h. im Beharrungszustande begriffene) Wasserbewegung gleichförmig, soll die Geschwindigkeit  $w$  in allen Querschnitten von gleicher Grösse sein, so muss auch der vom Wasser erfüllte Querschnitt  $F$  überall dieselbe Grösse haben. Bei überall gleicher Querschnittsform des Kanalbettes giebt sich also eine gleichförmige Bewegung durch überall gleiche Tiefe in einem Längenschnitte zu erkennen.

In einer ganz von Wasser erfüllten Röhre ist die Gleichförmigkeit oder Ungleichförmigkeit der Bewegung allein dadurch bedingt, ob der Röhrenquerschnitt überall gleich ist oder nicht; ein oben offenes Kanalbett aber kann vom Wasser auf verschiedene Höhe erfüllt werden, und nur unter bestimmten Bedingungen wird die Bewegung gleichförmig erfolgen.

Fig. 313.



Nehmen wir den Widerstand  $W$ , den das Wasser bei seiner Fortbewegung zu überwinden hat, einstweilen wieder, wie bei den Röhren, proportional mit der Berührungsfläche und mit der Geschwindigkeitshöhe an, so ergibt sich, wenn man (Fig. 313) einen Wasserkörper vom Querschnitt  $F$  und der Länge  $l$  betrachtet, und  $u$  der benetzte Umfang des Querschnitts ist (Gl. 1, S. 277)

$$1) \quad W = \kappa u l \frac{w^2}{2g}.$$

Da nun die Druckkräfte  $P$  an den beiden Querschnitten  $A$  und  $B$  sich offenbar aufheben, so muss, wenn man wegen der Kleinheit des Neigungswinkels  $\alpha$  dessen Sinus gleich dem Bogen setzt, die Seitenkraft der Schwere

$$Mg \alpha = W, \quad \text{d. h.}$$

$$\gamma F l \alpha = \kappa u l \frac{w^2}{2g},$$

also, wenn man, wie auf S. 277,  $\kappa = \gamma\beta$  setzt,

$$2) \quad \alpha = \beta \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g}$$

sein, mit  $\beta$  als Widerstandsziffer für Wasser in dem Kanale. Bei einem Querschnitte von sehr grosser Breite  $b$  im Verhältnisse zur Tiefe ist annähernd  $u = b$  und  $\frac{F}{u}$  gleich der mittleren Tiefe.

Wegen der massgebenden Bedeutung dieses Quotienten  $F:u$  in Gl. 2 nennt man daher allgemein

$$3) \quad \frac{F}{u} = r$$

die mittlere hydraulische Tiefe oder den mittleren Radius; hiermit wird das für gleichmässige Bewegung nöthige Gefällverhältnis

$$4) \quad \alpha = \frac{\beta}{r} \frac{w^2}{2g},$$

oder die einem Gefälle  $\alpha$  entsprechende Geschwindigkeit

$$w = \sqrt{\frac{2g\alpha r}{\beta}}, \quad \text{wofür man mit}$$

$$5) \quad \sqrt{\frac{2g}{\beta}} = k \quad \text{zu setzen pflegt}$$

$$6) \quad w = k\sqrt{\alpha r}.$$

Ebenso wie bei der Bewegung in Röhren (S. 278) ist aber auch hier die einfache Annahme für  $W$  (Gl. 1) nicht genau zutreffend und deshalb auch  $\beta$  und das daraus folgende  $k$  keine völlig konstante oder etwa nur von der Regelmässigkeit des Bettes abhängige Grösse.

Bei der Berechnung von Röhrenweiten hatte die Veränderlichkeit von  $\lambda = 4\beta$  keine sehr grosse Wichtigkeit. Man musste sich nur hüten, die Widerstände zu unterschätzen, während eine Überschätzung nur eine etwas reichliche Weite lieferte, deren Einfluss auf die Kosten meist nicht erheblich war, die Leistungsfähigkeit der Röhrenleitung aber für eine um so längere Zeit sicherte. Bei einer Röhrenleitung hat man das Wasser mittels

Abstellvorrichtungen stets in der Gewalt, bei einem oben offenen Kanal oder Fluss aber nicht.

Ist bei einem Kanal oder Flusse das Gefällverhältnis  $\alpha$  zu gross, so entsteht eine Geschwindigkeit, die grösser ist, als beabsichtigt oder erwartet war. In Folge dessen kann möglicherweise das Kanalbett beschädigt und auch die Wassertiefe vielleicht für etwaige Schifffahrt oder für Rücksichten der Landwirthschaft zu klein werden, während der entgegengesetzte Fall eine Überschwemmung herbeiführen kann. Während man eine Wasserleitung mit Gewalt im Zaume hält, kann man Kanäle und Flüsse nur durch die Mittel der Wissenschaft beherrschen. Aus diesem Grunde hat man seit etwa 150 Jahren mit Aufwendung grosser Kosten sich bemüht, für die Ziffer  $k$  befriedigende Gesetze aufzufinden.

Der ostfriesische Baubeamte Brahms erkannte zuerst 1753, wie es möglich sei, dass das Wasser beim Abwärtsfliessen eine gleichförmige Bewegung ausführen könne und gelangte zu der Formel 6, indem er den Widerstand mit  $w^2$  verhältnissgleich setzte. Zu gleichem Ergebnisse kam 1775 der franz. Ingenieur Chézy. Eytelwein (geb. 1764, gest. 1848), der 21 Jahre an der Spitze des preussischen Bauwesens stand, bestimmte die Ziffer  $k$  zu einem Werthe, der, auf Metermafs umgerechnet, zu

$$k = 50$$

abgerundet werden kann.

Mit bedeutenden Mitteln wurden dann 1850—60 in Nordamerika unter Leitung der Ingenieure Humphreys und Abbot umfassende Versuche am Mississippi und seinen Nebenflüssen angestellt. Diese Flüsse verursachten nämlich fast alljährlich verheerende Überschwemmungen, und zur Verbesserung der Wasserläufe bedurfte man vor Allem der Kenntnis der Bewegungsgesetze. Die von den amerikanischen Ingenieuren aufgestellte Formel ist sehr verwickelt, sie lautet

$$7) \quad w = \left\{ \sqrt{0,0025 m + \sqrt{68,72 r_1 \sqrt{\alpha} - 0,05 \sqrt{m}}} \right\}^2$$

mit  $m = \frac{0,933}{\sqrt{r + 0,457}}$ ;  $r_1 = \frac{F}{u + b}$ ,

wenn  $b$  die Breite des Wasserspiegels bedeutet. Humphreys und Abbot glaubten nämlich auch einen verzögernden Einfluss der über dem Wasserspiegel befindlichen Luft annehmen zu sollen, weshalb in der Hilfsgrösse  $r_1$  der Gesamtumfang  $u + b$  vorkommt.

Sehr umfassende Versuche wurden auch im Auftrage der französischen Regierung in den Jahren 1856—64 unter der Leitung von Darcy und nach dessen Tode von Bazin angestellt. Diese Versuche erstreckten sich auf Gerinne, Kanäle und Flüsse der verschiedensten Art. Bazin fasste die Ergebnisse in die Formel zusammen:

$$8) \quad w = \sqrt{\frac{ra}{m + \frac{n}{r}}}$$

oder, wenn man die Grundform der Gl. 6 beibehält, also  $w = k\sqrt{ra}$  setzt:

$$9) \quad k = \frac{1}{\sqrt{m + \frac{n}{r}}}$$

und wegen Gl. 5 die Widerstandsziffer

$$10) \quad \beta = \frac{2g}{k^2} = 2g \left( m + \frac{n}{r} \right).$$

Hierin bedeuten  $m$  und  $n$  Ziffern, die von der Beschaffenheit der Kanalwand, bezw. des Flussbettes abhängen. Es gelten:

1. für Kanäle aus gehobeltem Holz oder aus Cement:

$$m = 0,00015; \quad n = 0,0000045;$$

2. für Kanäle aus ungehobeltem Holz, aus Quadern oder Ziegeln:

$$m = 0,00019; \quad n = 0,0000133;$$

3. für Kanäle aus Bruchsteinmauerwerk:

$$m = 0,00024; \quad n = 0,00006;$$

4. für Kanäle in Erde:

$$m = 0,00028; \quad n = 0,00035.$$

Diese Formeln sagen aus, der Widerstand sei wohl mit dem Quadrate der Geschwindigkeit verhältnissgleich, nicht aber einfach mit der Grösse der Berührungsfläche, sondern stehe zu dieser in einer verwickelbaren Beziehung, im wesentlichen übereinstimmend mit der Darcy'schen Formel für  $\lambda$  bei Röhren (Gl. 7, S. 278).

Die Formeln von Humphreys und Abbot und die von Bazin ergänzen sich und schliessen sich auch gegenseitig aus. Erstere ist aus den Messungen an grossen Strömen gewonnen, in denen sich das Wasser trotz geringen Gefälles wegen grosser Tiefe  $r$  mit grosser Geschwindigkeit bewegt und passt auch nur für solche, während dagegen Bazin's Formel für kleinere Gewässer ( $r < 6^m$ ) mit stärkerem Gefälle geeignet ist.

Im Jahre 1869 haben sich nun die schweizerischen Ingenieure Ganguillet und Kutter mit gutem Erfolge der schwierigen Aufgabe unterzogen, die Ergebnisse der Messungen in Nordamerika und in Frankreich in eine einzige Formel von allgemeiner Gültigkeit zusammenzufassen. Danach ist, wenn man die Form  $w = k\sqrt{r\alpha}$  beibehält,

$$11) \quad k = \frac{23 + \frac{1}{n} + \frac{0,00155}{\alpha}}{1 + \left(23 + \frac{0,00155}{\alpha}\right) \frac{n}{\sqrt{r}}}$$

Hierin ist  $n$  von der Rauhigkeit des Bettes abhängig; man hat zu setzen:

1. für Kanäle aus gehobeltem Holz oder aus Cement:  $n = 0,010$ ;
2. für Kanäle aus ungehobeltem Holz:  $n = 0,012$ ;
3. für Kanäle aus Quadern oder Ziegeln:  $n = 0,0013$ ;
4. für Kanäle aus Bruchsteinen:  $n = 0,0017$ ;
5. für Kanäle in Erde:  $n = 0,025$ ;
6. für Gewässer mit gröberem Geschieben oder mit Wasserpflanzen:  $n = 0,030$ .

Bazin selbst hat sich in anerkanntester Weise über die Formel von Ganguillet und Kutter ausgesprochen, und sie kann als die beste allgemeine Formel bezeichnet werden.

Bei den meisten einschlägigen Aufgaben des Wasserbaues handelt es sich (besonders in Deutschland) um kleinere und mittlere Wasserläufe, d. h. auf Fälle des Anwendungsgebietes der Bazin'schen Formel; da nun letztere einfacher ist als die schweizerische, so ist für diese Fälle die Bazin'sche Formel zu empfehlen. Für Kanäle in Erde ergeben sich für verschiedene Grössen  $r$  die Werthe  $k$  und  $\beta = 2g : k^2$ , wie folgende Tabelle zeigt:

Werthe  $k$  und  $\beta$  nach der Bazin'schen Formel  
für Kanäle in Erde.

$r$	$k$	$\beta$
0,1	16,3	0,0742
0,2	22,2	0,0397
0,3	26,3	0,0284
0,4	29,4	0,0226
0,5	31,9	0,0192
0,6	34,0	0,0169
0,7	35,8	0,0153
0,8	37,3	0,0141
0,9	38,7	0,0131
1,0	39,8	0,0124
1,1	40,9	0,0117
1,2	41,8	0,0112
1,3	42,7	0,0108
1,4	43,4	0,0104
1,5	44,1	0,0101
1,6	44,3	0,0098
1,7	45,4	0,0095
1,8	45,9	0,0093
1,9	46,4	0,0091
2,0	46,9	0,0089
2,5	48,8	0,0082
3,0	50,2	0,0078
4,0	52,2	0,0072
5,0	53,5	0,0069
6,0	54,4	0,0066

**Beispiel 1:** Ein Graben von einem Querschnitte nach Fig. 314 habe ein Gefällverhältnis  $\alpha = 0,000441$ . Bei dem Böschungswinkel  $\varphi = 31^\circ$  ist  $\operatorname{tg} \varphi = 0,6$ ,  $\sec \varphi = 1,17$ ,  $\sin \varphi = 0,515$ ,  $\operatorname{cosec} \varphi = 1,942$ . Dann ist die mittlere Breite

$$1,35 + \frac{0,9}{0,6} = 2,85 \text{ m,}$$

der Querschnitt

$$F = 2,85 \cdot 0,9 = 2,565 \text{ qm;}$$

der benetzte Umfang  $u = 1,35 + 2 \cdot 0,9 \cdot \operatorname{cosec} \varphi = 4,35 \text{ m}$ , daher  $r = 2,565 : 4,35 = 0,529 \text{ m}$ . Nach Messungs-Ergebnissen war die wirkliche Geschwindigkeit  $w = 0,467 \text{ m}$ . Es sollen damit die Ergebnisse der vorstehenden Formeln verglichen werden. Es ist

$$\sqrt{r \alpha} = \sqrt{0,529 \cdot 0,000441} = 0,01527.$$

Nach Eytelwein wäre

$$k = 50; \quad w = 0,763.$$

Nach Humphreys und Abbot:

$$m = \frac{0,933}{\sqrt{0,529 + 0,457}} = 0,94; \quad r_1 = \frac{2,565}{4,35 + 4,35} = 0,279; \quad w = 0,563.$$

Nach Bazin wäre

$$k = \frac{1}{\sqrt{0,00028 + \frac{0,00035}{0,528}}} = 32,57 \quad \text{und} \quad w = 0,497.$$

Nach Ganguillet und Kutter wäre

$$k = \frac{23 + 40 + \frac{0,00155}{0,000441}}{1 + \left(23 + \frac{0,00155}{0,000441}\right) \frac{0,025}{\sqrt{0,529}}} = 34,80 \quad \text{und} \quad w = 0,531.$$

Hiernach geben die Formeln sämmtlich zu grosse Werthe für die Geschwindigkeit; die Bazin'sche schliesst sich dem Ergebnisse der Messung am besten an, dann folgt die schweizerische, dann die amerikanische Formel, während die Eytelwein'sche Formel am meisten abweicht.

**Beispiel 2:** Die Elbe hatte bei Altengamm oberhalb Hamburg bei Hochwasser im März 1881 eine Wasserspiegelbreite  $b = 587,4 \text{ m}$ , einen benetzten Umfang  $u = 591,4 \text{ m}$ , einen Flächeninhalt  $F = 3132,7 \text{ qm}$ , mithin  $r = 5,297 \text{ m}$ . Das Gefällverhältnis betrug  $\alpha = 0,000152$ . Die Geschwindigkeit wurde zu  $w = 1,17 \text{ m}$  gemessen. Es ist

$$\sqrt{r \alpha} = \sqrt{5,297 \cdot 0,000152} = 0,02833.$$

Nach Eytelwein wäre

$$k = 50; \quad w = 1,42 \text{ m.}$$

Nach Humphreys und Abbot wäre

$$m = \frac{0,933}{\sqrt{5,297 + 0,457}} = 0,339; \quad r_1 = \frac{3132,7}{591,4 + 587,4} = 2,658 \text{ m}; \quad w = 1,42.$$

Nach Bazin wäre

$$k = \frac{1}{\sqrt{0,00028 + \frac{0,00035}{5,297}}} = 53,8; \quad w = 1,53.$$

Nach Ganguillet und Kutter wäre

$$k = \frac{23 + 40 + \frac{0,0155}{0,000152}}{1 + \left(23 + \frac{0,0155}{0,000152}\right) \frac{0,025}{\sqrt{5,297}}} = 53,8; \quad w = 1,53.$$

Auch in diesem Falle liefern die Formeln sämmtlich zu grosse Werthe; die amerikanische und die Eytelwein'sche stimmen überein und schliessen sich der Messung am nächsten an, während die Bazin'sche und die schweizerische Formel am meisten, und zwar ebenfalls um gleich viel abweichen.

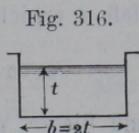
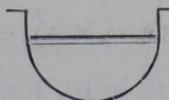
In beiden Fällen stimmen die Ergebnisse der Messung mit denen der Formeln, selbst der am besten passenden, nicht sehr befriedigend überein. Es hat eben jeder Bach, jeder Kanal, jeder grössere Theil eines langgestreckten Flusses seine besondere Eigenthümlichkeit, seinen besonderen Rauigkeitsgrad, d. h. seine besonderen Ziffern  $m$  und  $n$  (nach Bazin) bzw.  $n$  (nach Ganguillet und Kutter), die der Wasserbaubeamte, der sich mit dem Gewässer zu beschäftigen hat, entweder durch Messungen feststellen oder nach dem Augenschein auf Grund genauerer Kenntnis anderer Wasserläufe abschätzen muss. Die Eigenthümlichkeiten eines Flusses lassen sich nicht wohl in allgemeine Formeln zwingen. Wenn man dies erwägt, wird man sich bezüglich allgemeiner Formeln mit dem bisher Erreichten begnügen können. Auch ist zu bedenken, dass Unregelmässigkeiten in der Bewegung des Wassers, Wirbel u. dgl. häufig die Messung erschweren und ihre Richtigkeit beeinträchtigen, so dass zuweilen auch deren Ergebnisse von der Wirklichkeit nicht unerheblich abweichen können. Schliesslich aber muss betont werden, dass die vorstehenden Formeln sich nur auf eine **gleichförmige** Bewegung beziehen, d. h. an die Bedingung geknüpft

sind, dass der vom Wasser eingenommene Querschnitt  $F$  sich auf eine gewisse Länge des Flusses nicht erheblich ändere. Diese Bedingung wird sehr häufig nicht erfüllt sein, und manche Abweichung zwischen Messung und Formel wird man auf diesen Umstand zurückführen können. Die Behandlung ungleichförmiger Bewegung erfolgt weiter unten. Ist aber gar noch die sekundliche Wassermenge  $Q$  eines Querschnitts veränderlich, besteht also kein Beharrungszustand, so treten besondere Erschwerungen für die Berechnung ein, weshalb solche Fälle hier nicht behandelt werden können.

### b) Querschnittsform kleinsten Widerstandes.

Hat ein Kanal den Zweck, einer Wasserkraftmaschine (Wasserrad oder Turbine) das Betriebswasser zuzuführen, so kann es darauf ankommen, von dem ganzen zur Verfügung stehenden Gefälle für den Zuleitungskanal möglichst wenig zu verbrauchen, damit für die Kraftmaschine möglichst viel übrig bleibe. Da nun nach Gl. 4, S. 292 das erforderliche Gefällverhältnis mit  $r = F : u$  umgekehrt proportional ist, so wird diejenige Form des vom Wasser erfüllten Kanalquerschnitts am günstigsten sein, bei welcher  $r$  möglichst gross, d. h. bei gegebener Querschnittsfläche  $F$  der vom Wasser benetzte Umfang  $u$  möglichst klein ist.

Da von allen Figuren gegebenen Flächeninhalts der Kreis den geringsten Gesamtumfang hat, so wird, weil bei einem Kanale nur der vom Wasser benetzte Umfang in Frage kommt, der Halbkreis die Kanalform kleinsten Widerstandes sein (Fig. 315), welche annähernd für den unteren Theil des Querschnitts gemauerter Entwässerungskanäle Anwendung findet.



Für rechteckig zu formende Holzgerinne liefert das halbe Quadrat (Fig. 316) den kleinsten Widerstand, da das ganze Quadrat von allen Rechtecken gegebener Fläche den kleinsten Umfang hat.

Für Kanäle in Erde ist der Böschungswinkel  $\varphi$  der Seitenwände durch die Beschaffenheit des Erdreichs bedingt; Bodenbreite  $b$

und Wassertiefe  $t$  sind so zu wählen, dass bei gegebener Fläche  $F$  der benetzte Umfang  $u$  möglichst klein werde. Da nun (Fig. 317) der Grundriss  $AE$  der Seitenwand  $AB$  die Grösse  $t \cdot \cot \varphi$  hat, so ist die mittlere Breite  $b + t \cdot \cot \varphi$ , daher

$$1) \quad F = t(b + t \cot \varphi)$$

und, weil  $AB = t : \sin \varphi$ , der benetzte Umfang

$$2) \quad u = b + \frac{2t}{\sin \varphi}.$$

Durch Gl. 1 ist die Bodenbreite bedingt zu

$$b = \frac{F}{t} - t \cot \varphi; \text{ hiermit wird}$$

$$3) \quad u = \frac{F}{t} - t \cot \varphi + \frac{2t}{\sin \varphi} = \frac{F}{t} + t \frac{2 - \cos \varphi}{\sin \varphi}.$$

Damit nun  $u$  als  $f(t)$  ein Minimum werde, muss

$$4) \quad \frac{du}{dt} = -\frac{F}{t^2} + \frac{2 - \cos \varphi}{\sin \varphi} = 0, \text{ d. h.}$$

$$5) \quad t = \sqrt{\frac{F \sin \varphi}{2 - \cos \varphi}}$$

sein. Dass dieser Werth  $u$  zu einem Minimum und nicht zu einem Maximum macht, ist unmittelbar daraus ersichtlich, dass für  $t = 0$  der Umfang  $u$  nach Gl. 3 unendlich gross wird.

Ein einfaches Verhältnis zwischen Bodenbreite  $b$  und Wassertiefe  $t$  ergibt sich, wenn man aus Gl. 1 bildet

$$\frac{F}{t^2} = \frac{b}{t} + \cot \varphi$$

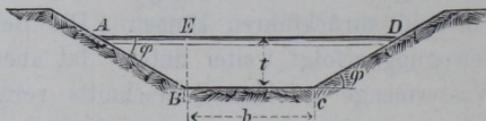
und diesen Werth in Gl. 4 einsetzt; dann wird

$$\frac{b}{t} + \cot \varphi = \frac{2 - \cos \varphi}{\sin \varphi} \quad \text{oder}$$

$$\frac{b}{t} = 2 \cdot \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} = 2 \frac{2 \sin^2(1/2 \varphi)}{2 \sin^{1/2} \varphi \cdot \cos^{1/2} \varphi}, \quad \text{d. h.}$$

$$6) \quad \frac{b}{t} = 2 \operatorname{tg}(1/2 \varphi).$$

Fig. 317.



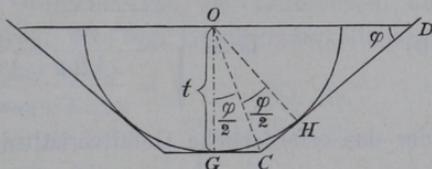
Diese Gleichung bedeutet, dass der vom Wasser erfüllte Querschnitt ein einem Halbkreise vom Halbmesser  $t$  umschriebenes Trapez sein muss. Denn bei einem solchen (Fig. 318) ist

Fig. 318.

$$\sphericalangle GOH = \varphi,$$

$$\sphericalangle GOC = 1/2 \varphi, \text{ d. h.}$$

$$\frac{1/2 b}{t} = \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} \right),$$



übereinstimmend mit Gl. 6.

Für  $\varphi = 90^\circ$  entsteht wieder das halbe Quadrat. Die Rechnung führt also darauf, dass man sich der überhaupt günstigsten Halbkreisform so weit zu nähern habe, wie die vorhandenen Bedingungen es zulassen.

Aus Gl. 5 ergibt sich:

$$7) \quad \frac{F}{t^2} = \frac{2 - \cos \varphi}{\sin \varphi}.$$

Setzt man aber in Gl. 2 für  $b$  den Werth  $2t \operatorname{tg} (1/2 \varphi)$  nach Gl. 6 ein, so entsteht

$$u = 2t \cdot \operatorname{tg} (1/2 \varphi) + \frac{2t}{\sin \varphi} \quad \text{oder}$$

$$\frac{u}{2t} = \frac{\sin (1/2 \varphi)}{\cos (1/2 \varphi)} + \frac{1}{\sin \varphi}$$

$$= \frac{2 \sin^2 (1/2 \varphi) \cos (1/2 \varphi) + \cos (1/2 \varphi)}{\cos (1/2 \varphi) \sin \varphi}$$

$$= \frac{2 \sin^2 (1/2 \varphi) + 1}{\sin \varphi} + \frac{1 - \cos \varphi + 1}{\sin \varphi} \quad \text{also}$$

$$8) \quad \frac{u}{2t} = \frac{2 - \cos \varphi}{\sin \varphi}.$$

Aus Gl. 7 und 8 folgt:

$$\frac{F}{t^2} = \frac{u}{2t} \quad \text{oder} \quad \frac{F}{u} = \frac{t}{2}.$$

Also ist bei der günstigsten Kanalform die mittlere hydraulische Tiefe

$$9) \quad r = \frac{F}{u} = \frac{t}{2}$$

unabhängig von  $\varphi$ . Somit wird nach der Bazin'schen Formel

$$10) \quad w = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \alpha t}{m + \frac{2n}{t}}} = \frac{t}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{\frac{1}{2} m t + n}}$$

oder das erforderliche Gefällverhältnis

$$11) \quad \alpha = w^2 \left( \frac{2m}{t} + \frac{4n}{t^2} \right) = w^2 \left( \frac{m}{r} + \frac{n}{r^2} \right).$$

**Beispiel:** Ein Zuleitungskanal soll in der Sekunde  $Q = 2$  cbm Wasser liefern; die Geschwindigkeit werde, damit einerseits keine Beschädigung der Kanalwände, andererseits keine Absetzung von Sinkstoffen erfolge, zu  $w = 0,5$  m gewählt, so dass  $F = 4$  qm werden muss. Es soll hiernach die Querschnittsform kleinsten Widerstandes bestimmt werden unter Annahme eines Böschungswinkels  $\varphi = 30^\circ$ .

Gl. 6 bestimmt  $\frac{b}{t} = 2 \cdot \operatorname{tg} 15^\circ = 0,536$ . — Nach Gl. 5 wird

$$b = \sqrt{\frac{4 \cdot \sin 30^\circ}{2 - \cos 30^\circ}} = 1,33 \text{ m, also}$$

$$t = 0,536 \cdot 1,33 = 0,71 \text{ m.}$$

Nach Gl. 9 ist dann  $r = 0,355$  und nach Gl. 11 das erforderliche Gefällverhältnis

$$\alpha = 0,25 \left( \frac{0,00028}{0,355} + \frac{0,00035}{0,355^2} \right) = 0,000391 = 1 : 1122.$$

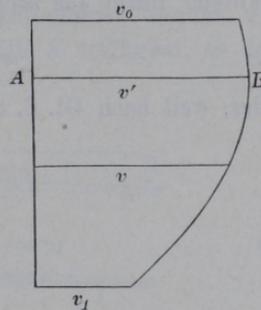
Grosser Werth ist dieser Rechnung nicht beizulegen, da in Wirklichkeit auch die ebenfalls von Breite und Tiefe abhängigen Kosten des Kanals mit in Frage kommen.

### c) Geschwindigkeiten in den verschiedenen Punkten eines Querschnitts.

Im Vorstehenden wurde die Bewegung des Wassers in einem Kanale so aufgefasst, als ob die Wassermasse wie ein starrer prismatischer Körper in dem Kanal abwärts glitte, als ob alle Theile dieses Körpers die gleiche Geschwindigkeit  $w$  hätten. In Wirklichkeit ist dies nicht der Fall, vielmehr ist die Geschwindigkeit der Wassertheilchen an verschiedenen Stellen des Querschnitts eine verschiedene. In Folge der Reibung werden die nahe den Kanalwänden befindlichen Wassertheilchen zurückgehalten und fliessen

langsamer als die entfernteren. Im Wasserspiegel giebt sich bei Messungen ein sog. Stromstreich zu erkennen, wo die Geschwindigkeit grösser ist als zu beiden Seiten. In einer Lothrechten sind die Geschwindigkeiten ebenfalls von Punkt zu Punkt verschieden. Stellt man diese durch wagerechte Ordinaten von der Lothrechten aus dar, so ergibt sich eine Kurve, die sog. Geschwindigkeitskurve, (Fig. 319). Diese ist mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit eine Parabel mit wagerechter Achse. Würde am Wasserspiegel gar kein Widerstand auftreten, so müsste die Achse  $AB$  der Parabel wohl im Wasserspiegel liegen. Bei ruhiger Luft bietet diese aber dem Wasser einen, wenn auch geringen, Widerstand, der bewirkt, dass die grösste Geschwindigkeit  $v'$  einer Lothrechten sich etwas unter Wasser findet. Stromaufwärts wehender Wind schiebt die Achse der Parabel nach unten, und umgekehrt. Die Höhenlage der Achse ist daher schwankend. Kennt man die Geschwindigkeit  $v$  an drei verschiedenen Stellen einer Lothrechten, so ist damit die Parabel bestimmt, weil man aus diesen den Parameter der Parabel, die Höhenlage ihrer Achse und den Abstand  $AB = v'$  ihres Scheitels von der Lothrechten berechnen kann.

Fig. 319.



Ist  $dF$  ein Theilchen der Querschnittsfläche,  $v$  die zugehörige Geschwindigkeit, so ist  $dQ = dF \cdot v$  die zugehörige sekundliche Wassermenge, dargestellt durch ein wagerechtes Prisma vom Querschnitte  $dF$  und der Länge  $v$ . Denkt man sich zu allen Flächen-theilchen die entsprechende Geschwindigkeit rechtwinklig aufgetragen, so entsteht ein Körper, dessen lothrechte in der Stromrichtung geführte Schnitte die Geschwindigkeitsflächen (Fig. 319) sind und dessen Inhalt die sekundliche Gesamtwassermenge  $Q$  darstellt. Verwandelt man diesen Körper in ein gerade abgeschnittenes Prisma vom Querschnitt  $F$ , so ist seine Länge

$$1) \quad w = \frac{Q}{F}$$

die mittlere Geschwindigkeit des Querschnitts, auf welche sich die Erörterungen S. 291 bis 302 durchweg beziehen.

Werthvoll ist die Beziehung zwischen der grössten Oberflächen-  
geschwindigkeit  $v_{0\max}$  im Stromstrich und der mittleren Geschwin-  
digkeit  $w$  des ganzen Querschnittes, weil sie gestattet, aus der  
alleinigen Messung von  $v_{0\max}$  die ganze Wassermenge  $Q$ , wenn  
auch nur roh, zu bestimmen. Die einfachste, wenn auch sehr  
unverlässliche Formel ist

$$2) \quad w = \frac{3}{4} v_{0\max},$$

während Bazin aus seinen Versuchen abgeleitet hat

$$3) \quad w = v_{0\max} - 14 \sqrt{r\alpha},$$

oder, weil nach Gl. 6, S. 292,  $k \sqrt{r\alpha} = w$ ,

$$w = v_{0\max} - 14 \frac{w}{k}, \quad \text{d. h.}$$

$$4) \quad w = \frac{v_{0\max}}{1 + \frac{14}{k}} = v_{0\max} \frac{k}{k + 14}.$$

Für Kanäle in Erde gilt für verschiedene Werthe von  $r$ :

$r$ (Meter)	$\frac{w}{v_{0\max}}$	$r$ (Meter)	$\frac{w}{v_{0\max}}$
0,1	0,537	1,2	0,749
0,2	0,613	1,3	0,753
0,3	0,653	1,4	0,756
0,4	0,678	1,6	0,762
0,5	0,695	1,8	0,766
0,6	0,709	2,0	0,770
0,7	0,719	2,5	0,777
0,8	0,727	3,0	0,782
0,9	0,734	4,0	0,788
1,0	0,740	5,0	0,792
1,1	0,745	6,0	0,795

**Beispiel:** In dem ersten Beispiel auf S. 297 war  $r = 0,828$ ,  $k$  nach  
Bazin = 32,57, daher wird

$$w : v_{0\max} = \frac{32,6}{32,6 + 14} = 0,7.$$

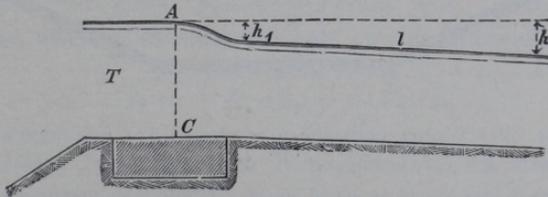
In dem zweiten Beispiele auf S. 297 mit  $r = 5,287$  war nach Bazin  $k = 53,8$ , daher wird

$$w : v_{0 \max} = \frac{53,8}{53,8 + 14} = 0,79.$$

#### d) Eintritt des Wassers in einen Kanal.

Soll aus einem Teiche  $T$  (Fig. 320) oder sonstigem Wasserbehälter durch einen Ufereinschnitt  $AC$  und einen anschliessenden Kanal eine sekundliche Wassermenge  $Q$  entnommen werden und ist auf eine Länge  $l$  ein Wasserspiegel-Gefälle  $h$  verfügbar, so darf

Fig. 320.



man nicht etwa voraussetzen, dass das Wasser im Kanal eine Tiefe  $AC$  annehmen werde. Vielmehr wird ein Theil  $h_1$  des Gefälles beim Eintritte des Wassers in den Kanal dazu verbraucht, dem Wasser, das im Teiche fast in Ruhe war, die Kanalgeschwindigkeit  $w$  zu ertheilen; es ist  $h_1 = \frac{w^2}{2g}$ , und erst der Rest  $h - h_1$

dient zur Überwindung der Reibung im Kanal und darf, wenn durch gleichmässiges Kanalprofil eine gleichförmige Bewegung erzielt wird, gleichmässig auf die Länge  $l$  vertheilt werden. Da  $w$  noch unbekannt, so kann man, wenn  $r$  die mittlere hydraulische Tiefe des Kanals ist, folgendermassen rechnen: Das ganze Gefälle  $h$  zerlegt sich in  $h_1 = \frac{w^2}{2g}$  und den Theil  $\alpha l = \beta \frac{w^2}{2g} \frac{l}{r}$  (s. S. 292, Gl. 4); es ist also

$$1) \quad h = \frac{w^2}{2g} + \beta \frac{l}{r} \frac{w^2}{2g} = \frac{w^2}{2g} \left( 1 + \beta \frac{l}{r} \right).$$

Da aber für gleichförmige Bewegung

$$\alpha r = \beta \frac{w^2}{2g} \quad \text{oder} \quad \frac{w^2}{2g} = \frac{\alpha r}{\beta},$$

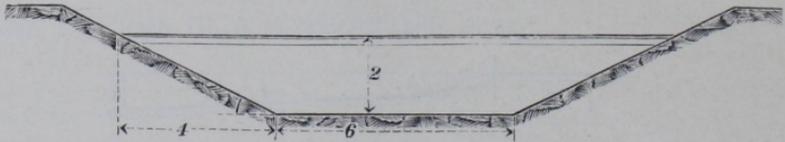
so ergibt die Einsetzung dieses Werthes in Gl. 1:

$$h = \frac{\alpha r}{\beta} \left( 1 + \beta \frac{l}{r} \right) = \alpha \left( \frac{r}{\beta} + l \right), \quad \text{d. h.}$$

$$2) \quad \alpha = \frac{\beta h}{r + \beta l}.$$

**Beispiel:** Aus einem Behälter soll mittels eines Kanales von 6 m Bodenbreite, 2 m Tiefe und einem Böschungswinkel  $\varphi = 26,5^\circ$  ( $\text{tg } \varphi = 0,5$ ,  $\sin \varphi$

Fig. 321.



$= 0,447$ ) (Fig. 321) Wasser entnommen werden. Auf  $l = 5000$  m Länge steht ein Gefälle  $h = 1$  m zur Verfügung.

Es ist  $F = 2 \cdot (6 + 4) = 20$  qm,  $u = 6 + 2 \cdot 2 : 0,447 = 14,95$  m,  $r = 20 : 14,95 = \text{rund } 1,3$  m. Dann wird nach Bazin (vergl. S. 296)

$$\beta = 2g \left( 0,00028 + \frac{0,00035}{1,3} \right) = 0,0108 \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{0,0108}{1,3 + 54} = \frac{1}{5120}.$$

Dann ist  $\alpha \cdot 5000 = 0,977$  m das auf den Kanal zu vertheilende Gefälle, während  $h_1 = 0,023$  m zur Erzeugung der Eintrittsgeschwindigkeit  $w = 0,68$  m/s. dient. Der Kanal wird daher in der Sekunde  $20 \cdot 0,67 = 13,6$  cbm Wasser liefern.

### e) Ungleichförmige Bewegung des Wassers in Flüssen und Kanälen.

Das äussere Kennzeichen einer beständigen (im Beharrungszustande begriffenen) ungleichförmigen Bewegung ist, dass der Wasserquerschnitt  $F$  an derselben Stelle sich nicht ändert, an verschiedenen Stellen aber eine ungleiche Grösse zeigt. Bei regelmässiger Form des Wasserlaufes wird dann an verschiedenen Stellen eines Längenschnittes die Wassertiefe  $t$  verschieden gross, der Wasserspiegel also der Kanalsohle nicht parallel sein.

Es lässt sich zeigen, dass in diesem Falle das Gefälle der Oberfläche das für die Arbeit der Schwere massgebende, das wirksame Gefälle sei.

Wir betrachten die zwischen den Schnitten  $A$  und  $B$  (Fig. 322) befindliche Wassermenge, die nach einem Zeittheilchen die Lage  $A_1 B_1$  einnimmt. Es möge die an diesem Wasserkörper während der Bewegung von  $AB$  nach  $A_1 B_1$  verrichtete Arbeit der Schwere und des Wasserdrucks berechnet werden. Ist der obere Querschnitt  $F_1$ , der untere  $F_2$  und nennt man  $AA_1 = dx_1$ ,  $BB_1 = dx_2$ , so muss  $F_1 dx_1 = F_2 dx_2$  sein. Die Arbeit der Schwere ist offenbar so anzusehen, als ob das Massentheilchen

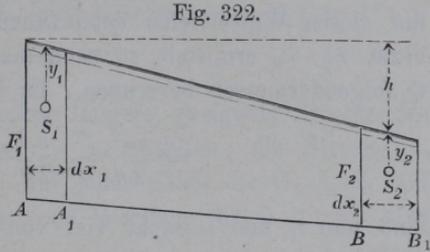


Fig. 322.

$$m = \frac{\gamma}{g} F_1 dx_1 = \frac{\gamma}{g} F_2 dx_2$$

aus der oberen Lage mit dem Schwerpunkt  $S_1$  in die untere mit dem Schwerpunkt  $S_2$  gerückt sei; diese Arbeit ist dann

$$mg(h + y_2 - y_1).$$

Die Vertheilung des Druckes über einen Querschnitt erfolgt nahezu nach den Regeln für einen im Gleichgewichte befindlichen Wasserkörper, da der nach S. 260 zu beurtheilende vermindernde Einfluss der Beschleunigung gewöhnlich ausserordentlich unbedeutend ist. Dann treten am oberen und unteren Schnitte die Druckkräfte  $\gamma F_1 y_1$  bzw.  $\gamma F_2 y_2$  auf mit den Arbeiten  $\gamma F_1 y_1 dx_1$  bzw.  $-\gamma F_2 y_2 dx_2$ , deren Arbeitssumme sich wegen  $mg = \gamma F_1 dx_1 = \gamma F_2 dx_2$  auch schreiben lässt  $mg(y_1 - y_2)$ .

Verbindet man dies mit obiger Arbeit der Schwerkraft, so entsteht als Ergebnis

$$mgh,$$

entsprechend einem wirksamen Gefälle  $h$ .

Bei ungleichförmiger Bewegung zerfällt nun das Gefälle in einen Theil, der zur Geschwindigkeits-Änderung dient, und einen zweiten zur Überwindung der Kanalwiderstände.

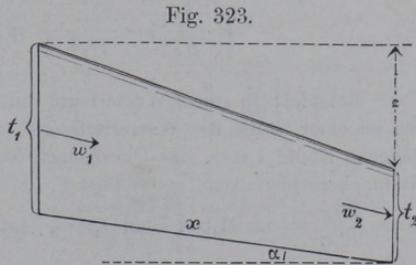


Fig. 323.

Hat man für eine nicht sehr lange Strecke  $x$  eines Wasserlaufes (Fig. 323) das Gefälle  $z$  der Oberfläche, die Neigung  $\alpha$  des Bodens, die Wassertiefen  $t_1$  und  $t_2$ , oben und unten gemessen, und die diesen Wassertiefen entsprechenden Querschnittswerthe  $F_1$ ,  $u_1$  bzw.  $F_2$ ,  $u_2$  ermittelt, so kann man die sekundliche Wassermenge  $Q$  folgendermassen berechnen. Es ist annähernd

$$z = \frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_1^2}{2g} + \beta x \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g}.$$

Sind nun  $t_1$  und  $t_2$  nicht viel von einander abweichend, so kann man in dem letzten Gliede, welches das zur Überwindung der Widerstände nöthige Gefälle bedeutet, für die eigentlich veränderlichen Werthe  $u$ ,  $F$  und  $w$  die arithmetischen Mittel setzen, d. h.

$$u = 1/2(u_1 + u_2); \quad F = 1/2(F_1 + F_2); \quad w = 1/2(w_1 + w_2).$$

Bedenkt man schliesslich noch, dass

$$Q = F_1 w_1 = F_2 w_2, \quad \text{also } w_1 = \frac{Q}{F_1}, \quad w_2 = \frac{Q}{F_2}, \quad \text{so wird}$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{Q^2}{2g F_2^2} - \frac{Q^2}{2g F_1^2} + \beta x \frac{u_1 + u_2}{F_1 + F_2} \left( \frac{Q}{F_1} + \frac{Q}{F_2} \right)^2 \frac{1}{8g} \\ &= \frac{Q^2}{2g} \left\{ \frac{1}{F_2^2} - \frac{1}{F_1^2} + \beta x \frac{(u_1 + u_2)(F_1 + F_2)}{4 F_1^2 F_2^2} \right\}. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich

$$1) \quad Q = \frac{\sqrt{2gz}}{\sqrt{\frac{1}{F_2^2} - \frac{1}{F_1^2} + \beta x \frac{(u_1 + u_2)(F_1 + F_2)}{4 F_1^2 F_2^2}}}.$$

**Beispiel:** In einem Wasserlaufe von dem Bettquerschnitte Fig. 321, S. 306, sei an einer Stelle die Wassertiefe 2 m, an einer um 200 m stromabwärts gelegenen Stelle 1,95 m; das Oberflächen-Gefälle betrage für diese Strecke 0,1 m. Dann berechnet sich  $u_1 = 14,95$  m,  $F_1 = 20$  qm;  $u_2 = 14,72$ ,  $F_2 = 19,3$  qm;  $r = \frac{39,3}{29,67} =$  im Mittel rund 1,33 m, daher  $\beta = 0,0106$ ;

$$Q = \frac{\sqrt{2g \cdot 0,1}}{\sqrt{\frac{1}{19,3^2} - \frac{1}{20^2} + 0,0106 \cdot 200 \cdot \frac{28,67 \cdot 39,3}{4 \cdot 20^2 \cdot 19,3^2}}} = 21,62 \text{ cbm.}$$

Hätte man nur den oberen Querschnitt  $F_1$  berücksichtigt, die Bewegung als eine gleichmässige mit dem Gefällverhältnis  $\alpha = 0,1 : 200 = 0,0005$  behandelt, so hätte sich nach S. 294

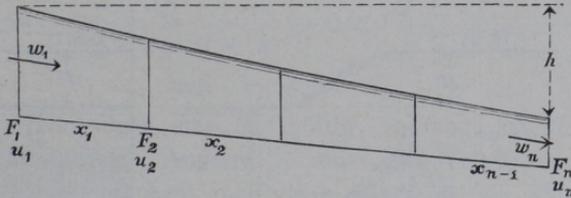
$$w = 42,9 \sqrt{1,33 \cdot 0,0005} = 1,109 \quad \text{und} \quad Q = 20 \cdot 1,109 = 22,18 \text{ cbm}$$

ergeben.

Steht für die Messungen eine längere geeignete Strecke des Wasserlaufes zur Verfügung, so ist es rätlich, die Strecke in mehrere Theile zu zerlegen und auf jeden Theil die Gl. 1, S. 308 anzuwenden. Aus den so erhaltenen Werthen für  $Q$  nimmt man dann das arithmetische Mittel.

Ist aber das Gefälle nicht für jeden einzelnen Theil, sondern nur für die ganze eingetheilte Strecke bekannt (Fig. 324), so kann

Fig. 324.



man auch nur eine einzige Gleichung aufstellen, in welche die Summe der nach obiger Weise berechneten Widerstandshöhen der einzelnen Theile eingeführt wird:

$$h = \frac{w_n^2}{2g} - \frac{w_1^2}{2g} + \Sigma \beta x \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g}$$

$$h = \frac{Q^2}{2g} \left\{ \frac{1}{F_n^2} - \frac{1}{F_1^2} + \Sigma \beta x \frac{u}{F} \frac{1}{F^2} \right\};$$

darin bedeutet

$$\Sigma \beta x \frac{u}{F} \frac{1}{F^2} = \beta_1 x_1 \frac{(u_1 + u_2)(F_1 + F_2)}{4 F_1^2 F_2^2}$$

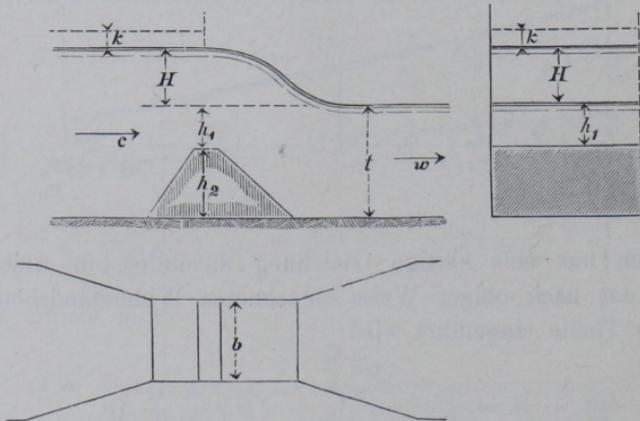
$$+ \beta_2 x_2 \frac{(u_2 + u_3)(F_2 + F_3)}{4 F_2^2 F_3^2} + \dots$$

### f) Stauhöhe von Wehren und Brückenpfeilern.

Der Zweck eines Wehres ist, die Wasseroberfläche oberhalb des Wehres zu heben (anzustauen). In den meisten Fällen wird dann ein Theil  $Q_2$  des angestauten Wassers mittels eines Kanales abgeleitet, so dass von der ganzen sekundlichen Wassermenge  $Q$  des Flusses nur noch  $Q_1 = Q - Q_2$  über das Wehr fliesst. Das Wehr ist ein durch die ganze Breite reichender, aus dem Boden des Flusses sich erhebender Einbau. Liegt die Wehrkrone tiefer als die Wasseroberfläche unterhalb des Wehres, so heisst dieses ein Grundwehr, im anderen Fall ein Überfallwehr.

α) **Grundwehr.** Am Wehre sei der Durchflussquerschnitt zu einem Rechtecke von der Breite  $b$  zusammengezogen (Fig. 325). Die Wehrkrone liege um  $h_1$  unter dem Unterwasser, dessen Tiefe

Fig. 325.



dicht unter dem Wehre  $t$  betrage.  $h_2$  sei die Höhe des Wehrkörpers, so dass  $h_1 + h_2 = t$ . Das Wasser sei durch den Einbau des Wehres um die Stauhöhe  $H$  gehoben. Die Geschwindigkeit des ungestauten Wassers sei  $w$ , die des gestauten Wassers oberhalb des Wehres betrage  $c$ . Den Einfluss dieser Zuflussgeschwindigkeit  $c$  auf die Durchflussmenge berücksichtigt man dadurch, dass man das Oberwasser um  $k = \frac{c^2}{2g}$  gehoben denkt. Da die Wehrkrone beiderseitig unter Wasser liegt, so theilt man die

Höhe der Durchflussöffnung in zwei Theile, nämlich  $H$  und  $h_1$ . Für ersteren Theil betrachtet man den Durchfluss als einen Ausfluss ins Freie, für den anderen als einen Ausfluss unter Wasser. Dann ist die sekundl. Durchflussmenge für den oberen Theil nach Gl. 3, S. 236 und nach S. 240

$$1) \quad Q_1' = \frac{2}{3} \mu_1 b \sqrt{2g} \left\{ (H + k)^{3/2} - k^{3/2} \right\},$$

für den unteren Theil

$$2) \quad Q_1'' = \mu_2 b h_1 \sqrt{2g(H + k)},$$

weil die Höhe dieses Theiles  $h_1$  beträgt, alle Punkte desselben aber unter der gemeinsamen Druckhöhe  $H + k$  stehen. Für die gesammte Durchflussmenge  $Q_1 = Q_1' + Q_1''$  gilt also:

$$3) \quad Q_1 = \frac{2}{3} \mu_1 b \sqrt{2g} \left\{ (H + k)^{3/2} - k^{3/2} \right\} + \mu_2 b h_1 \sqrt{2g(H + k)}.$$

Gewöhnlich nimmt man  $^{2/3}\mu_1 = 0,57$  und  $\mu_2 = 0,62$ ; dann wird

$$4) \quad h_1 = \frac{Q_1}{0,62 b \sqrt{2g(H + k)}} - 0,92 \frac{(H + k)^{3/2} - k^{3/2}}{\sqrt{H + k}}$$

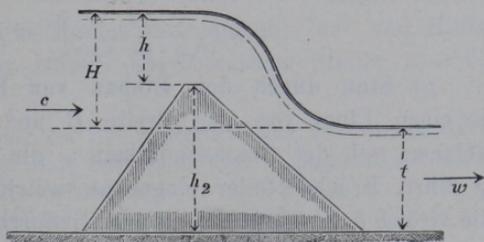
$$5) \quad \text{und } h_2 = t - h_1.$$

Diese Gleichungen sind nur gültig, so lange sie für  $h_1$  einen Werth  $> 0$  ergeben. Andernfalls muss die Wehrkrone sich über das Unterwasser erheben, und man bekommt ein Überfallwehr, für welches eine besondere Rechnung angestellt werden muss. Bei der vorläufigen Untersuchung darüber, ob das herzustellende Wehr ein Grundwehr sein muss oder nicht, pflegt man  $k$  zu vernachlässigen und hat dann

$$6) \quad Q_1 \geq 0,57 b H \sqrt{2gH}$$

als Bedingung für ein Grundwehr bezw. Überfallwehr.

Fig. 326.



$\beta$ ) **Überfallwehr** (Fig. 326). Nennt man die Strahldicke über dem Wehre  $h$ , so muss, weil nun der Durchfluss ins Freie erfolgt,

$$Q_1 = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left\{ (h + k)^{3/2} - k^{3/2} \right\}, \text{ also}$$

$$7) \quad h = \left\{ \frac{3/2 Q_1}{\mu b_1 \sqrt{2g}} + k^{3/2} \right\}^{2/3} - k$$

sein, wobei wieder  $2/3 \mu = 0,57$ . Hiernach bestimmt sich dann

$$8) \quad h_2 = H + t - h.$$

**Beispiel:** Für einen Fluss sei  $w = 1 \text{ m's.}$ ,  $t = 2 \text{ m}$ ,  $F = 24 \text{ qm}$ ,  $Q = 24 \text{ cbm}$ . Mittels eines Wehres soll ein Aufstau um  $H = 0,5 \text{ m}$  herbeigeführt werden, das Wehr soll  $10 \text{ m}$  Breite erhalten, auch sollen oberhalb des Wehres  $2 \text{ cbm}$  abgeleitet werden, so dass nur noch  $Q_1 = 22 \text{ cbm}$  über das Wehr fließen. Die Bedingung 6 wird:

$$22 > 0,57 \cdot 10 \cdot 0,5 \sqrt{2g \cdot 0,5} = 8,92,$$

d. h. es muss ein Grundwehr erbaut werden.

Für die Geschwindigkeit  $c$  oberhalb des Wehres gilt annähernd:

$$c = \frac{1 \cdot 2}{2,5} \cdot \frac{24}{22} = 0,9, \quad k = 0,04 \text{ m}.$$

Dann wird nach Gl. 4:

$$h_1 = \frac{22}{0,62 \cdot 10 \sqrt{2g \cdot 0,54}} - 0,92 \frac{0,54^{3/2} - 0,04^{3/2}}{\sqrt{0,54}} = 0,6 \text{ m}.$$

Der Wehrkörper muss also  $h_2 = t - h_1 = 1,4 \text{ m}$  Höhe erhalten.

Bei Vernachlässigung von  $k$  würde sich  $h_1 = 0,67 \text{ m}$  ergeben.

Soll unter sonst gleich bleibenden Verhältnissen eine Stauhöhe  $H = 2 \text{ m}$  erreicht werden, so wird Bedingung 6:

$$22 < 0,57 \cdot 10 \cdot 2 \sqrt{2g \cdot 2} = 71,4,$$

d. h. das Wehr wird ein Überfallwehr. Es ist

$$c = \frac{w \cdot 2}{2 + 2} \cdot \frac{24}{22} = 0,55, \quad k = 0,015 \text{ m}.$$

Gleichung 7 liefert:

$$h = \left\{ \frac{22}{0,57 \cdot 10 \cdot 4,429} + 0,015^{3/2} \right\}^{2/3} - 0,015 = 0,9 \text{ m}.$$

Die Höhe des Wehrkörpers wird dann  $h_2 = 2 + 2 - 0,9 = 3,1 \text{ m}$ . Bei Vernachlässigung von  $k$  würde sich (erheblich einfacher)

$$h = \left( \frac{22}{0,57 \cdot 10 \cdot 4,429} \right)^{2/3} = 0,912 \text{ m} \text{ ergeben.}$$

$\gamma$ ) **Stau durch den Einbau von Brückenfeilern.** Werden in einen Fluss von der Breite  $B$  und der Tiefe  $t$  (Fig. 327), welcher mit der Geschwindigkeit  $w$  die sekundliche Wassermenge  $Q$  führt, Brückenfeiler eingebaut, welche die Durchflussbreite auf die Grösse  $b$  einschränken, so wird dadurch ein Anstau  $H$  verursacht. Für diesen ist die für ein Grundwehr abgeleitete Gl. 3 (S. 311) zu benutzen, wenn man nur die Höhe des Wehrkörpers Null, d. h.  $h_1 = t$  und zugleich  $Q_1 = Q$  setzt. Es wird

$$9) \quad Q = \frac{2}{3} \mu_1 b \sqrt{2g} \left\{ (H + k)^{3/2} - k^{3/2} \right\} + \mu_2 b t \sqrt{2g(H + k)}.$$

Hierin ist

$$k = \frac{c^2}{2g}; \quad c = \frac{Q}{B(H+t)}.$$

Ist die zulässige Stauhöhe  $H$  gegeben, so kann man aus obiger Gleichung leicht die erforderliche lichte Weite  $b$  berechnen, nämlich, wenn man wegen übereinstimmender Durchflussverhältnisse  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$  setzt:

$$10) \quad b = \frac{Q}{\mu \sqrt{2g} \left\{ \frac{2}{3} (H+k)^{3/2} - \frac{2}{3} k^{3/2} + t \sqrt{H+k} \right\}}.$$

Die Auflösung der Gl. 9 nach  $H$  ist umständlich. Jedoch hat Prof. Dr. Mehmke (Stuttgart) in der Zeitschrift *Civilingenieur* 1889, S. 623, angegeben, dass, wenn man

$$\frac{Q}{B \sqrt{2g}} = \alpha,$$

$$\frac{Q}{\mu b \sqrt{2g}} = \beta$$

setzt, die Annäherungsgleichung

$$11) \quad \frac{2}{3} H + t = \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{\sqrt{H}}$$

benutzt werden kann. Für Pfeiler mit spitzen Vor- und Hinterköpfen ist  $\mu = 0,95$ , für stumpf abgeschnittene Pfeiler  $\mu = 0,85$  zu setzen.

**Beispiel:** Ein Fluss führe bei 2 m Wassertiefe und 50 m Breite 100 cbm in der Sekunde. Auf welches Maß darf die Lichtweite eingeschränkt werden, wenn eine Stauhöhe  $H = 0,02$  m zulässig ist?

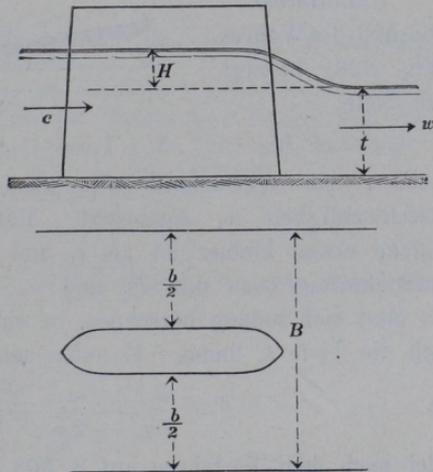
Es ist dann die Geschwindigkeit oberhalb der Pfeiler

$$c = \frac{100}{50 \cdot 2,02} = 0,99 \text{ m}, \quad k = 0,05 \text{ m};$$

Gleichung 10 gibt:

$$b = \frac{100}{0,95 \cdot 4,429 \left\{ \frac{2}{3} 0,07^{3/2} - \frac{2}{3} 0,05^{3/2} + 2 \sqrt{0,07} \right\}} = 44,5 \text{ m}.$$

Fig. 327.



Berechnet man hiernach die Hilfsgrößen  $\alpha$  und  $\beta$ , so liefert die linke Seite von Gl. 11:  $2,013$ , die rechte Seite  $2,015$ ; der Unterschied ist also unbedeutend.

### g) Staukurve und Stauweite.

Will man erfahren in welcher Weise der Stau oberhalb eines Wehres allmählich abnimmt, so benutzt man für die verzögerte Bewegung, welche oberhalb des Wehres stattfindet, einen ähnlichen Rechnungsgang wie auf S. 308.

Unmittelbar oberhalb des Wehres (Fig. 328) beträgt die Tiefe

$$t_1 = t + H,$$

welcher ein Querschnitt  $F_1$ , ein benetzter Umfang  $u_1$ , eine Geschwindigkeit  $w_1$  entspricht. Man wählt nun eine Tiefe  $t_2$ , welche etwas kleiner ist als  $t_1$  und bezeichnet die entsprechenden Querschnittsgrößen mit  $F_2$  und  $u_2$ , die Geschwindigkeit mit  $w_2$ . Es lässt sich sodann berechnen, in welchem Abstand  $x_1$  vom Wehre sich die Tiefe  $t_2$  findet. Es muss sein

$$1) \quad z = \frac{w_1^2}{2g} - \frac{w_2^2}{2g} + \beta_1 x_1 \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g}$$

oder nach dem Verfahren auf S. 308:

$$2) \quad z = \frac{Q^2}{2g} \left( \frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_2^2} \right) + \beta_1 x_1 \frac{(u_1 + u_2)(F_1 + F_2)}{4 F_1^2 F_2^2} \frac{Q^2}{2g}.$$

Ist aber  $\alpha$  die Neigung der Sohle des Wasserlaufes, so muss auch

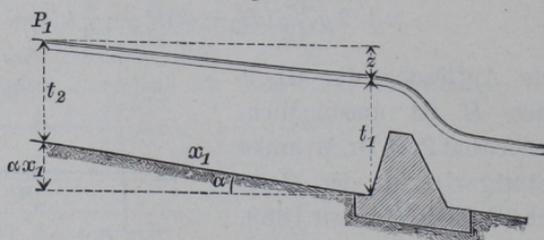
$$3) \quad z = \alpha x_1 - (t_1 - t_2) \text{ sein.}$$

Vereinigt man diese Gleichung mit der vorstehenden und löst nach  $x_1$  auf, so ergibt sich:

$$4) \quad x_1 = \frac{t_1 - t_2 - \frac{Q^2}{2g} \left( \frac{1}{F_2^2} - \frac{1}{F_1^2} \right)}{\alpha - \beta_1 \frac{(u_1 + u_2)(F_1 + F_2) Q^2}{8g F_1^2 F_2^2}}.$$

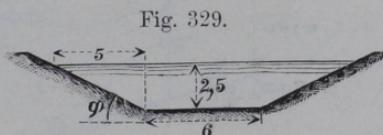
Hierdurch liegt der Punkt  $P_1$  der Staukurve fest.

Fig. 328.



Man wählt nun eine wiederum etwas kleinere Wassertiefe  $t_3$  und sucht den zugehörigen Abstand  $x_2$  von der Stelle mit der Wassertiefe  $t_2$ , indem man aus Gl. 4 eine neue Gleichung bildet, deren Indices durchweg um eine Einheit grösser sind.

**Beispiel:** Das Bett eines Wasserlaufes habe 6 m. Bodenbreite und einen trapezförmigen Querschnitt nach Fig. 321, S. 306, mit einem Böschungswinkel  $\varphi = 26,5^\circ$  ( $\text{tg } \varphi = 0,5$ ,  $\sin \varphi = 0,417$ ). Die Neigung der Sohle betrage  $\alpha = 1:5000$ . Bei der ursprünglich gleichmässigen Bewegung möge die Wassertiefe  $t = 2$  m gewesen sein; dem entspricht  $F = 20$  qm,  $u = 14,95$  m,  $r = 1,3$  m,  $\beta = 0,0108$ ,  $k = 42,7$ ,



daher eine Geschwindigkeit  $w = 42,7 \sqrt{\frac{1,3}{5000}} = 0,69$  m und eine Wassermenge  $Q = 13,8$  cbm. Durch ein Wehr möge eine Stauhöhe  $H = 0,5$  m hervorgebracht sein, so dass die Wassertiefe oberhalb des Wehres  $2,5$  m beträgt (Fig. 329). Es soll berechnet werden, in welchem Abstand  $x_1$  die Tiefe noch  $2,4$  m ist.

Für  $t_1 = 2,5$  m wird  $F_1 = 27,5$  qm,  $u_1 = 17,20$  m.

Für  $t_2 = 2,4$  m wird  $F_2 = 25,92$  qm,  $u_2 = 16,75$  m.

Für diese Strecke ist dann  $r_1 = \frac{F_1 + F_2}{u_1 + u_2} = 1,6$  m und  $\beta = 0,0098$ .

Hiernach folgt aus Gl. 4:

$$x_1 = \frac{0,1 - \frac{13,8^2}{19,62} \left( \frac{1}{25,92^2} - \frac{1}{27,5^2} \right)}{0,0002 - \frac{0,0098 \cdot 33,95 \cdot 53,42 \cdot 13,8^2}{8 \cdot 9,81 \cdot 27,5^2 \cdot 25,92^2}} = 854,7 \text{ m.}$$

Setzt man sodann  $t_3 = 2,3$  m, so wird  $F_3 = 24,38$  qm,  $u_3 = 16,29$  m,

$$r_2 = \frac{F_2 + F_3}{u_2 + u_3} = 1,5 \quad \text{und} \quad \beta_2 = 0,0101.$$

Gleichung 4 ergibt nunmehr

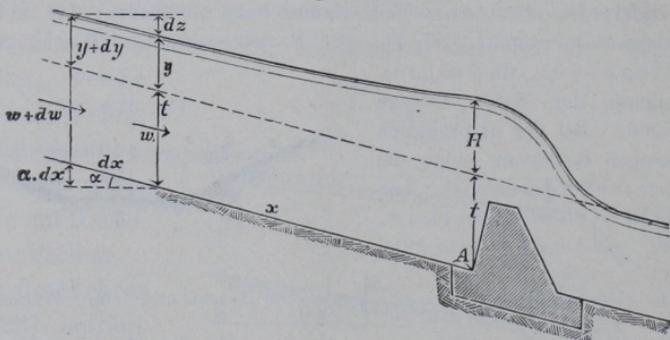
$$x_2 = \frac{0,1 - \frac{13,8^2}{19,62} \left( \frac{1}{24,38^2} - \frac{1}{25,92^2} \right)}{0,0002 - \frac{0,0101 \cdot 33,04 \cdot 50,3 \cdot 13,8^2}{8 \cdot 9,81 \cdot 24,38^2 \cdot 25,92^2}} = 1001 \text{ m.}$$

In gleicher Weise kann man weitere Punkte der Staukurve bestimmen.

**Gleichung der Staukurve für einen Kanal von grosser Breite und geringer Wassertiefe.** Denkt man sich den Querschnitt annäherungsweise als Rechteck von grosser Breite, so lässt sich die

Gleichung der Staukurve entwickeln. Es sei  $t$  die Tiefe des ungestauten Wassers, also annähernd  $t = F : u$  (vergl. S. 292),  $H$  die Stauhöhe am Wehre bei  $A$  (Fig. 330),  $y$  die Stauhöhe,  $w$  die

Fig. 330.



mittlere Geschwindigkeit im Abstand  $x$  vom Wehre; im weiteren Abstände  $dx$  sei die Stauhöhe  $y + dy$  (wo  $dy$  negativ), die Geschwindigkeit  $w + dw$ . Kommt auf die Strecke  $dx$  ein Höhenunterschied  $dz$  des Wasserspiegels, ein Gefälle  $\alpha \cdot dx$  des Bodens, so ist

$$\begin{aligned} dz &= \frac{w^2}{2g} - \frac{(w + dw)^2}{2g} + \beta \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g} dx \\ &= -\frac{w dw}{g} + \beta \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g} dx, \\ \text{weil } (w + dw)^2 - w^2 &= d(w^2). \end{aligned}$$

Ferner ist nach Fig. 330

$$dz = dy + \alpha \cdot dx, \text{ also}$$

$$dy + dx \left( \alpha - \beta \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g} \right) = -\frac{w dw}{g} \text{ oder}$$

$$1) \quad dx = -\frac{dy + \frac{w dw}{g}}{\alpha - \beta \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g}}.$$

Aus dieser Gleichung kann  $dw$  entfernt werden; es ist bei kleinem  $\alpha$

$$w = \frac{Q}{b(t + y)}; \quad dw = -\frac{Q dy}{b(t + y)^2}$$

und durch Multiplikation

$$w dw = - \frac{Q^2 dy}{b^2(t+y)^3}, \text{ also, weil}$$

$$\frac{Q^2}{b^2(t+y)^2} = w^2,$$

$$w dw = - \frac{w^2}{t+y} dy.$$

Setzt man dies in Gl. 1 ein, so entsteht

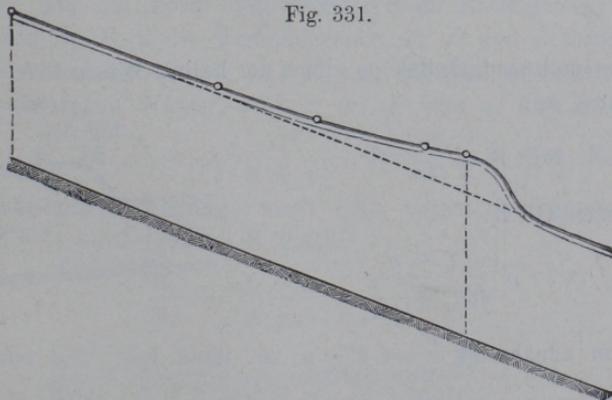
$$2) \quad dx = - \frac{1 - \frac{w^2}{g(t+y)}}{\alpha - \beta \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g}} dy.$$

Mit wachsendem  $x$  nimmt die Wassertiefe  $t+y$  allmählich ab, die Geschwindigkeit  $w$  daher allmählich zu; somit verkleinern sich auf der rechten Seite der Gl. 2 mit zunehmendem  $x$  sowohl der Zähler wie der Nenner. Wird der Nenner zu Null, während der Zähler noch grösser ist als Null, so geschieht dies für

$$\alpha = \beta \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g},$$

d. h. für diejenige Stelle, wo die Bewegung eine gleichförmige ist; es ist dort  $\frac{dy}{dx} = 0$ , d. h. die Staukurve hat sich dem ungestauten Wasser wieder angeschmiegt. Es bedeutet dies den gewöhnlichen

Fig. 331.



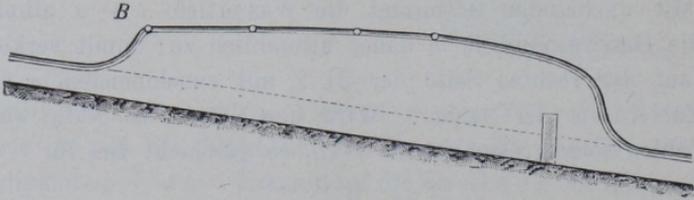
Fall, dass der Stau sich nach oben hin allmählich verliert, wobei die Staukurve ihre konvexe Seite nach unten kehrt (Fig. 331).

Wird aber für irgend eine Stelle der Zähler der Gl. 2 zu Null, während der Nenner noch  $> 0$  ist, wird

$$\frac{dx}{dy} = -0 \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = -\infty,$$

so steht der Wasserspiegel an dieser Stelle (nahezu) lothrecht, es bildet sich ein Wassersprung oder eine Wasserschwelle. Dieser Fall ist zuerst von dem Italiener Bidone 1820, später aber auch von Jul. Weisbach (Freiberg in Sachsen) in Kanälen mit

Fig. 332.



großem Gefällverhältnisse beobachtet. Es verschwindet dann der Stau nicht allmählich, sondern bei  $B$  (Fig. 332) plötzlich. Damit dies eintrete, muss an der betreffenden Stelle der Zähler in Gl. 2 Null sein, d. h.

$$3) \quad \frac{w^2}{2g} = \frac{t + y}{2}$$

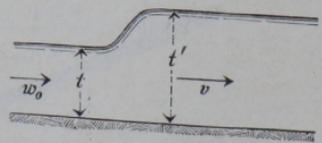
oder die Geschwindigkeitshöhe gleich der halben Wassertiefe. Gleichzeitig muss sein

$$\alpha > \beta \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g},$$

d. h. wegen Gl. 3:

$$\alpha > \beta \frac{u}{F} \frac{t + y}{2}.$$

Fig. 333.



Weil nun annähernd  $\frac{F}{u} = t + y$ , so muss  $\alpha > 1/2 \beta$  sein, damit ein Wassersprung entstehe; dies bedeutet, wenn in Mittel  $\beta = 0,008$  gesetzt wird,  $\alpha > 0,004 = 1 : 250$ , d. h. ein ungewöhnlich großes Gefällverhältnis.

Die Höhe  $t' - t$  des Sprunges lässt sich nach Fig. 333 in folgender Weise berechnen: Es ist

$$4) \quad vt' = w_0 t, \quad \text{ferner}$$

$$5) \quad t - t' = \frac{v^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} + \frac{(w_0 - v)^2}{2g},$$

worin das letzte Glied den sog. Stossverlust bezeichnet (S. 246). Sonach wird aus beiden Gleichungen

$$6) \quad t' = w_0 \sqrt{\frac{t}{g}} = t \sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}.$$

Nach Bidone's Versuchen ist die Höhe des Sprunges in Wirklichkeit grösser, als diese Formel 6 ergibt. Nehmen wir daher den Sprung weniger plötzlich an und vernachlässigen deshalb den Stossverlust in Gl. 5, so entsteht aus  $vt' = w_0 t$  und

$$t - t' = \frac{v^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} \quad \text{leicht}$$

$$7) \quad t' = \frac{1}{2} \frac{w_0^2}{2g} + \sqrt{\frac{w_0^2}{2g} t + \frac{1}{4} \left(\frac{w_0^2}{2g}\right)^2}.$$

Aus der Entwicklung der beiden Gleichungen 6 und 7 folgt weiter, dass ein Wassersprung mit  $t' > t$  nur dann entsteht, wenn  $\frac{w_0^2}{2g} > \frac{t}{2}$ ; es stimmt dies seiner Bedeutung nach mit Gl. 3 überein.

Um nun die Form der Staukurve im Einzelnen zu erfahren, muss man in Gl 2 die Veränderlichen  $w$ ,  $F$  und  $u$  durch  $y$  ausdrücken. Beziehen sich  $t$ ,  $w_0$ ,  $F_0$ ,  $u_0$  auf das ungestaute, gleichmässig fliessende Wasser,  $t + y$ ,  $w$ ,  $F$  und  $u$  auf das gestaute Wasser, so ist  $w^2 = w_0^2 \frac{t^2}{(t + y)^2}$ , ferner nach den Regeln der gleichmässigen Bewegung, wenn man wegen der grossen Breite  $u = u_0 = b$  setzt (gemäss S. 292),

$$\frac{w_0^2}{2g} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{F_0}{u_0} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{bt}{b} \quad \text{und}$$

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{t^3}{(t + y)^2}, \quad \text{sonach mit } \frac{F}{u} = t + y$$

$$\beta \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g} = \alpha \frac{t^3}{(t + y)^3}.$$

Hiermit wird aus Gl. 2, S. 317

$$dx = -dy \frac{1 - 2 \frac{\alpha}{\beta} \frac{t^3}{(t+y)^3}}{\alpha \left(1 - \frac{t^3}{(t+y)^3}\right)} \quad \text{oder}$$

$$- \alpha dx = dy \frac{(t+y)^3 - 2 \frac{\alpha}{\beta} t^3}{(t+y)^3 - t^3}.$$

Behufs der Integration ist auf der rechten Seite eine Zerlegung in Theilbrüche erforderlich, jedoch muss, weil der Zähler nach  $y$  von demselben Grade ist wie der Nenner, durch theilweise Division erreicht werden, dass der Zähler von geringerem Grade wird. Fügt man im Zähler  $+ t^3 - t^3$  hinzu, so entsteht nach einmaliger Division:

$$- \alpha dx = dy \left\{ 1 + \frac{t^3 \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right)}{(t+y)^3 - t^3} \right\} \quad \text{oder}$$

$$8) \quad - \alpha dx = dy + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right) \frac{t^3}{(t+y)^3 - t^3} dy.$$

Weil  $(t+y)^3 - t^3 = 3t^2y + 3ty^2 + y^3 = y(3t^2 + 3ty + y^2)$  ist, so kann der letzte Bruch geschrieben werden

$$\frac{t^3}{(t+y)^3 - t^3} = \frac{t^3}{y(3t^2 + 3ty + y^2)}.$$

Die Zerlegung dieser gebrochenen Funktion in Theilbrüche muss, weil die Gleichung  $3t^2 + 3ty + y^2 = 0$  imaginäre Wurzeln hat, in der Form geschehen:

$$\frac{t^3}{y(3t^2 + 3ty + y^2)} = \frac{A}{y} + \frac{Py + Q}{3t^2 + 3ty + y^2}.$$

Nach Fortschaffung der Nenner wird hieraus

$$9) \quad t^3 = 3t^2A + 3tAy + Ay^2 + Py^2 + Qy.$$

Soll diese Gleichung für jeden Werth von  $y$  bestehen, so muss zunächst stattfinden für  $y = 0$ :  $t^3 = 3t^2A$ , d. h.  $A = \frac{1}{3}t$ . Ebenso ergibt die erste Abgeleitete der Gl. 9 nach  $y$ :  $0 = 3tA + 2Ay + 2Py + Q$  und für  $y = 0$ :  $Q = -3tA = -t^2$ . Die zweite Abgeleitete  $0 = 2A + 2P$  giebt schliesslich  $P = -A = -\frac{1}{3}t$ . Hiernach wird

$$\frac{t^3}{y(3t^2 + 3ty + y^2)} = \frac{t}{3} \frac{1}{y} - \frac{\frac{1}{3}ty + t^2}{3t^2 + 3ty + y^2}.$$

Nun kann man Gl. 8 schreiben:

$$- \alpha dx = dy + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right) t \left\{ \frac{1}{3} \frac{dy}{y} - \frac{1}{6} \frac{2y + 6t}{3t^2 + 3ty + y^2} dy \right\}.$$

Das Differential des letzten Nenners ist aber  $(3t + 2y) dy$ , daher zerlegen wir den letzten Zähler in  $2y + 3t$  und  $3t$ , um zu erhalten:

$$10) \quad -\alpha dx = dy + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right) t \left\{ \frac{1}{3} \frac{dy}{y} - \frac{1}{6} \frac{d(3t^2 + 3ty + y^2)}{3t^2 + 3ty + y^2} dy - \frac{t}{2} \frac{dy}{3t^2 + 3ty + y^2} \right\}.$$

Setzt man zur Integration des letzten Gliedes vorübergehend  $y = z + \alpha$ , so wird  $3t^2 + 3ty + y^2 = 3t^2 + 3tz + 3t\alpha + z^2 + 2\alpha z + \alpha^2$ ; sollen nun die Glieder mit dem Faktor  $z$  verschwinden, so muss  $3t + 2\alpha = 0$ , d. h.  $\alpha = -\frac{3}{2}t$ ;  $z = y + \frac{3}{2}t$  sein. Dann wird  $3t^2 + 3ty + y^2 = 3t^2 - \frac{9}{2}t^2 + \frac{9}{4}t^2 + z^2 = \frac{3}{4}t^2 + z^2$  und

$$11) \quad \frac{dy}{3t^2 + 3ty + y^2} = \frac{dz}{\frac{3}{4}t^2 + z^2} = \frac{2}{t\sqrt{3}} d\left(\arctan \frac{2z}{t\sqrt{3}}\right) \\ = \frac{2}{t\sqrt{3}} d\left(\arctan \left(\frac{2y}{t\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right)\right) \quad \text{mit } z = y + \frac{3}{2}t.$$

Die Integration der Gl. 10 ergibt dann mit Benutzung von Gl. 11:

$$\alpha x = -y + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right) t \left\{ -\frac{1}{3} \ln y + \frac{1}{6} \ln(3t^2 + 3ty + y^2) \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2y}{\sqrt{3}t} + \sqrt{3}\right) \right\} + \text{Const.}$$

Vereinigt man in dem Klammerausdrucke die beiden Logarithmen, indem man

$$-\frac{1}{3} \ln y = -\frac{1}{6} \ln y^2 = +\frac{1}{6} \ln \frac{1}{y^2}$$

setzt und führt zur Abkürzung die Bezeichnung

$$12) \quad \frac{1}{6} \ln \left(3 \frac{t^2}{y^2} + 3 \frac{t}{y} + 1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2y}{\sqrt{3}t} + \sqrt{3}\right) = f\left(\frac{y}{t}\right)$$

ein (s. die Tabelle S. 323), so wird

$$\alpha x = -y + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right) t \cdot f\left(\frac{y}{t}\right) + \text{Const.}$$

Weil nun der Abstand  $x$  vom Wehr aus gemessen ist, wo  $y = H$ , so wird

$$0 = -H + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right) t \cdot f\left(\frac{H}{t}\right) + \text{Const.}$$

sonach schliesslich durch Abziehen

$$13) \quad \alpha x = H - y + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right) t \left\{ f\left(\frac{y}{t}\right) - f\left(\frac{H}{t}\right) \right\}.$$

Kommt oberhalb des Wehres kein Wassersprung vor, ist also  $\alpha < \frac{1}{2}\beta$  und daher in Gl. 13 der Faktor  $1 - \frac{2\alpha}{\beta} > 0$ , so ergibt sich, weil für  $\frac{y}{t} = 0$  die  $f\left(\frac{y}{t}\right) = \infty$  wird (nach Gl. 12), für  $y = 0$  die

Strecke  $x = \infty$ ; d. h. in diesem meist vorkommenden Falle erstreckt sich die Wirkung des Staus nach oben hin ins Unendliche: die Staukurve schmiegt sich nach oben hin dem ungestauten Wasserspiegel asymptotisch an. In diesem Falle hat Gl. 13 unbeschränkte Gültigkeit für die Staukurve oberhalb des Wehres, d. h. für  $y \leq H$  (der Stauhöhe am Wehre).

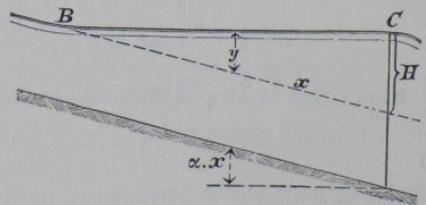
Kommt aber wegen  $\alpha > 1/2\beta$  ein Wassersprung vor, steigt also an einer Stelle das Wasser plötzlich von der Tiefe  $t$  auf die grössere Tiefe  $t'$  an, welche nach Gl. 7 (S. 319) zu berechnen ist, so gilt Gl. 13 nur von dem Wehr aufwärts bis zum Wassersprunge, dessen Lage man mittels Gl. 13 berechnen kann, indem man  $y = t' - t$  setzt.

In dem Grenzfall  $\alpha = 1/2\beta$  zwischen den beiden vorstehend genannten verschiedenen Fällen wird in Gl. 13 der Faktor  $1 - \frac{2\alpha}{\beta} = 0$ , daher einfach

$$14) \quad \alpha x = H - y;$$

die Staulinie wird eine wagerechte Gerade  $BC$  (Fig. 334), geht in den ungestauten Wasserspiegel nicht durch allmähliche Anschmiegung, sondern mittels eines (ein wenig ausgerundeten) Knickes bei  $B$  über.

Fig. 334.



Die Grössen  $f\left(\frac{y}{t}\right)$  können aus der Tabelle S. 323 entnommen werden. Die Berechnung der Tabellenwerthe möge an einem Beispiel, etwa für  $\frac{y}{t} = \frac{1}{4}$  gezeigt werden.

Hierfür ist (Gl. 12)

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{4}\right) &= \frac{1}{6} \ln(3 \cdot 16 + 3 \cdot 4 + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{4} + \sqrt{3}\right) \\ &= \frac{1}{6} \cdot 2,302585 \cdot \log 61 + 0,57735 \arctan 2,0207. \end{aligned}$$

Der Tangente 2,0207 entspricht ein Winkel von  $63^{\circ}40'$ , ein Bogen = 1,111193. Daher wird, weil  $\log 61 = 1,785330$ :

$$f(1/4) = 0,6851457 + 0,57735 \cdot 1,111193 = 1,3267.$$

Tabelle zur Berechnung von Staukurven.

$\frac{y}{t}$	$f\left(\frac{y}{t}\right)$	$\frac{y}{t}$	$f\left(\frac{y}{t}\right)$
0	$\infty$	$\frac{1}{5}$	1,3866
0,01	2,3261	$\frac{1}{4}$	1,3267
0,02	2,0983	$\frac{1}{3}$	1,2539
0,03	1,9664	$\frac{1}{2}$	1,1616
0,04	1,8738	$\frac{2}{3}$	1,1050
0,05	1,8026	1	1,0387
0,06	1,7451	1,5	0,9890
0,07	1,6970	2	0,9632
0,08	1,6556	2,5	0,9482
0,09	1,6196	3	0,9384
0,10	1,5875	3,5	0,9317
0,13	1,5092	4	0,9270
$\frac{1}{6}$	1,4538		

**Beispiel 1:** Die Breite eines nahezu rechtwinkligen Wasserlaufes sei  $b = 100$  m, die Tiefe des ungestauten Wassers  $t = 2$  m, die Stauhöhe am Wehre  $H = 0,5$  m, das Gefällverhältnis  $\alpha = 0,0002$ . Die mittlere Tiefe oberhalb des Wehres beträgt  $(2 + 2,5) \cdot 0,5 = 2,25$  m, daher ist im Mittel  $r = 225 : 104,5 = 2,15$  m; das giebt rund  $\beta = 0,009$  (vergl. S. 296).

$$\text{Es ist } \frac{H}{t} = \frac{1}{4}, \quad f\left(\frac{H}{t}\right) = 1,3267.$$

$$\text{Ferner wird } 1 - \frac{2\alpha}{\beta} = 1 - \frac{0,0004}{0,009} = 0,9556.$$

Setzt man nun  $y_1 = 0,4$  m  $= 0,2 t = \frac{1}{5} t$ , so ergibt sich nach vorstehender Tabelle  $f(0,2) = 1,3866$ , mithin nach Gl. 13:

$$x_1 = 5000 \left\{ 0,5 - 0,4 + 2 \cdot 0,9556 (1,3866 - 1,3267) \right\} = 1072 \text{ m.}$$

Da die Tabelle zwischen  $\frac{y}{t} = 0$  und  $\frac{y}{t} = 0,25$  13 Werthe enthält, so kann man aus ihr 13 Punkte, also ausser dem soeben berechneten  $(x_1, y_1)$  noch 12, leicht ableiten.

Geringe Stauhöhen, die nicht grösser sind als die Wellenbewegungen des Wassers, pflegt man unbeachtet zu lassen. Die Wellenbewegungen wachsen mit der Tiefe; demgemäss pflegt man eine Stauhöhe von  $y_0 = 0,01 t$  zu vernachlässigen, so dass sich dann statt der ideellen Stauweite  $= \infty$  eine endliche,

dem Werthe  $y_0 = 0,01 t$  entsprechende, begrenzte Stauweite  $x_0$  ergibt. Für diese gilt mit  $y_0 = 0,02 \text{ m}$ :

$$x_0 = 5000 \{0,5 - 0,02 + 1,9111 (2,3261 - 1,3267)\} = 11950 \text{ m.}$$

Zwischen  $y_1 = 0,4$  und  $y_0 = 0,02 \text{ m}$  sollen hier nur noch  $y_2 = 0,2 \text{ m}$  und  $y_3 = 0,1 \text{ m}$  berücksichtigt werden. Dann ist

$$x_2 = 5000 \{0,5 - 0,2 + 1,9111 (1,5875 - 1,3267)\} = 3992 \text{ m.}$$

$$x_3 = 5000 \{0,5 - 0,1 + 1,9111 (1,8026 - 1,3267)\} = 6547 \text{ m.}$$

Diese Staukurve ist in Fig. 331, S. 317 gezeichnet; die Längen sind in 1 : 200 000, die Höhen in 1 : 100 dargestellt.

**Beispiel 2:** Ein gemauerter rechteckiger Kanal von  $b = 0,325 \text{ m}$  Breite habe eine Bodenneigung  $\alpha = 0,023$ . Es bewege sich darin Wasser gleichförmig mit einer Wassertiefe  $t = 0,064 \text{ m}$  und einer sekundlichen Wassermenge  $Q = 0,0351 \text{ cbm}$ ; dann ist mit  $F = 0,325 \cdot 0,064 = 0,0208 \text{ qm}$

$$w_0 = 0,0351 : 0,0208 = 1,688 \text{ m} \quad \text{und}$$

$$\frac{w_0^2}{2g} = 0,145 \text{ m,}$$

d. h. bedeutend grösser als die halbe Wassertiefe; mithin ist als Folge einer weiter unten bewirkten Aufstauung ein Sprung zu erwarten. Für dessen Höhe liefert Gl. 6, S. 319:

$$t' = 1,688 \sqrt{\frac{0,064}{9,81}} = 0,136 \text{ m,}$$

Gl. 7, S. 319 aber

$$t' = 0,073 + \sqrt{0,145 \cdot 0,064 + 0,073^2} = 0,194 \text{ m.}$$

In Wirklichkeit war nach der Messung Bidone's, der an diesem Kanale Versuche anstellte,  $t' = 0,189$ , was mit dem letzteren Werthe gut übereinstimmt. Es werde für die weitere Rechnung  $t' = 0,19$ , also die Stauhöhe dort zu  $y_0 = 0,19 - 0,064 = 0,126 \text{ m}$  genommen.

Die grösste Stauhöhe wurde zu  $H = 0,216 \text{ m}$  gemessen. Dann kann man die Entfernung  $x_0$  des Sprunges von dem Orte der grössten Stauhöhe nach Gl. 13, S. 321 berechnen. Es ist

$$\frac{2\alpha}{\beta} = \frac{w_0^2}{gt} = \frac{0,145 \cdot 2}{0,064} = 4,5,$$

$$\frac{H}{t} = \frac{0,216}{0,064} = 3,375; \quad \frac{y_0}{t} = \frac{0,126}{0,064} = \text{rund } 2.$$

$f\left(\frac{H}{t}\right) = f(3,375)$  wird durch Interpolation in der Tabelle S. 323 erhalten zu 0,9334, mithin

$$0,023 x_0 = 0,216 - 0,126 - 3,5 \cdot 0,064 (0,9332 - 0,9334)$$

und  $x_0 = 3,6 \text{ m}$ , während Bidone's Messung etwa  $x_0 = 3,5 \text{ m}$  ergab.

Für  $\frac{y_1}{t} = 3$  oder  $y_1 = 0,192$  wird

$$0,023 \cdot x_1 = 0,216 - 0,192 - 0,224 (0,9334 - 0,9334)$$

mit  $x_1 = 1$  m.

Für  $\frac{y_2}{t} = 2,5$  oder  $y_2 = 0,16$  m wird

$$0,023 x_2 = 0,216 - 0,16 - 0,224 (0,9432 - 0,9334)$$

mit  $x_2 = 2,3$  m.

Dieser Wassersprung ist in Fig. 332, S. 318 gezeichnet; die Längen sind in 1 : 100, die Höhen in 1 : 20 dargestellt.

#### 4. Druck strömenden Wassers gegen feste Körper; Widerstand des Wassers gegen bewegte Körper.

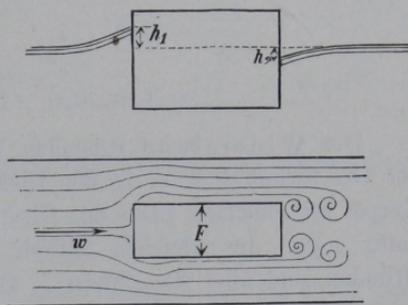
Bei scheinbarer (relativer) Ruhe des Wassers gegen einen in denselben eingetauchten festen Körper heben sich die wagerechten Seitenkräfte des Wasserdrucks gegen den Körper auf. Strömt aber das Wasser mit einer Geschwindigkeit  $w$  gegen den ruhenden Körper, so werden die einzelnen, ohne Anwesenheit des Körpers parallel verlaufenden Stromfäden gezwungen, den Körper zu umfließen, sich in gekrümmten Bahnen zu bewegen, wozu Kräfte erforderlich sind; das Wasser staut sich an der Vorderseite auf, während an der Rückseite eine Vertiefung entsteht (Fig. 335). Es erfolgt daher auf der Vorderseite eine Vergrößerung, auf der Rückseite eine Verminderung des Druckes gegenüber dem Ruhezustande um  $P_1$  bzw.  $P_2$ . Die Gesamtwirkung der Strömung besteht daher in einer Kraft  $D$  im Sinne der Geschwindigkeit  $w$ , und zwar ist

$$1) \quad D = P_1 + P_2.$$

Der Verlauf der Stromfäden ist theoretisch nicht festzustellen. In Anlehnung aber an die Formel für den Druck eines Wasserstrahls gegen einen fremden Körper (S. 269) darf man mit einiger Wahrscheinlichkeit setzen:

$$2) \quad P_1 = \zeta_1 \gamma F \frac{w^2}{2g}; \quad P_2 = \zeta_2 \gamma F \frac{w^2}{2g},$$

Fig. 335.

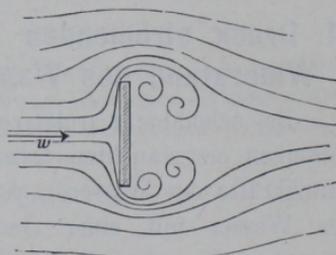


wenn  $\gamma$  die Dichte der Flüssigkeit,  $F$  der grösste Querschnitt des eingetauchten Theiles des festen Körpers, rechtwinklig zur Geschwindigkeit  $w$  gemessen. Für ein Prisma mit ebenen, rechtwinklig zu  $w$  stehenden Endflächen kann mit einiger Wahrscheinlichkeit  $\zeta_1 = 1$  gesetzt, d. h. angenommen werden, dass die Druckvermehrung  $P_1$  an der Vorderseite einer Druckhöhe  $h_1 = \frac{w^2}{2g}$  entspricht, während

$\zeta_2$  von der Länge des Prismas abhängig ist. Bei einer dünnen Platte (Fig. 336) ist die Druckverminderung an der Rückseite am stärksten; man setze, wenn  $l$  die Länge des Prismas in der Stromrichtung, für

$\frac{l}{\sqrt{F}} = 0,03$	1	2	3	6
$\zeta_2 = 0,86$	0,46	0,35	0,33	0,34

Fig. 336.



Die Gesamtwirkung der Strömung auf den Körper ist

$$3) \quad D = \zeta \gamma F \frac{w^2}{2g}$$

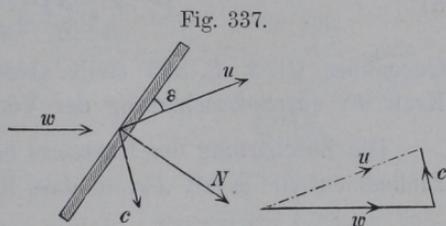
mit  $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2$ , dann wird für

$\frac{l}{\sqrt{F}} = 0,03$	1	2	3	6
$\zeta = 1,86$	1,46	1,35	1,33	1,34.

Der Widerstand ruhenden Wassers gegen prismatische, mit der Geschwindigkeit  $w$  in der Richtung der Prismenachse bewegte Körper ist ebenfalls nach den Gl. 1—3 zu beurtheilen. Es wären dafür sogar die gleichen Ziffern zu erwarten; aus unbekanntem Gründen sind aber die Ziffern  $\zeta_2$  kleiner, während  $\zeta_1$  ebenfalls = 1 gesetzt werden kann. Es ist für

$\frac{l}{\sqrt{F}} = 0,03$	1	3	6
$\zeta_2 = 0,43$	0,17	0,10	0,10
$\zeta = 1,43$	1,17	1,10	1,10.

Hat die vom Wasser getroffene Platte selbst eine Geschwindigkeit  $c$ , so kommt für den Druck  $N$  gegen die Platte, der bei Vernachlässigung von Reibung und Adhäsion nur rechtwinklig zur Platte sein kann, die scheinbare (relative) Geschwindigkeit  $u$  des Wassers gegen die Platte in Frage. Bildet diese mit der Platte den

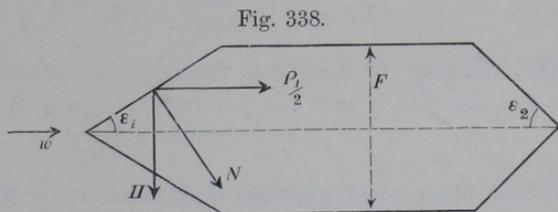


Winkel  $\varepsilon$ , so hat die Seitengeschwindigkeit  $u \cos \varepsilon$  des Wassers parallel zur Platte keinen Einfluss; es wird der Druck  $N$  nur durch die Seitengeschwindigkeit  $u \sin \varepsilon$  rechtwinklig zur Platte bedingt. Ist wiederum  $F$  die Grösse der Platte,  $\gamma$  die Dichte der Flüssigkeit, so wird auf Grund von Gl. 3 (S. 326)

$$4) \quad N = \zeta \gamma F \frac{u^2 \sin^2 \varepsilon}{2g}.$$

Ist ein prismatischer Körper vorn und hinten durch je einen Keil mit lothrechten Seitenebenen und den halben

Keilwinkeln  $\varepsilon_1$  bzw.  $\varepsilon_2$  zuge­schärft (Fig. 338), so wird, weil die eine Fläche des



Vorderkeils die Grösse  $\frac{F}{2 \sin \varepsilon_1}$  hat, der Normaldruck gegen diese

$$N = \zeta_1 \gamma \cdot \frac{F}{2 \sin \varepsilon_1} \frac{w^2}{2g} \sin^2 \varepsilon_1.$$

Diese Kraft kann man zerlegen in eine Querkraft  $H$ , die durch eine entgegengesetzte, von der anderen Keilfläche herrührende, aufgehoben wird, und eine Längskraft

$$N \sin \varepsilon_1 = \zeta_1 \gamma \frac{F}{2} \frac{w^2}{2g} \sin^2 \varepsilon_1,$$

die  $= \frac{1}{2} P_1$  zu setzen ist, weil die zweite Fläche des Vorderkeils eine ebenso grosse, gleichgerichtete Kraft liefert und beide zusammen

die Druckvergrößerung  $P_1$  der Vorderseite (in Folge der Strömung) bilden. Sonach ist

$$5) \quad P_1 = \zeta_1 \gamma F \frac{w^2}{2g} \sin^2 \varepsilon_1.$$

Gegenüber Gl. 2, S. 325 stellt also  $\sin^2 \varepsilon_1$  die Verminderung der Kraft  $P_1$  durch Zuschärfung der Vorderseite aus.

Die Zuschärfung der Rückseite hat einen ähnlich verkleinernden Einfluss auf die Kraft  $P_2$ , so dass man

$$6) \quad P_2 = \zeta_2 \gamma F \frac{w^2}{2g} \sin^2 \varepsilon_2,$$

mithin den Gesamtdruck des bewegten Wassers gegen den Körper

$$7) \quad D = (\zeta_1 \sin^2 \varepsilon_2 + \zeta_2 \sin^2 \varepsilon_1) \gamma F \frac{w^2}{2g}$$

setzen kann.

Für  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 45^\circ$  wird z. B.

$$D = \frac{1}{2} (\zeta_1 + \zeta_2) \gamma F \frac{w^2}{2g} = \frac{1}{2} \zeta \gamma F \frac{w^2}{2g},$$

also bei  $\frac{l}{\sqrt{F}} = 6$ , mit  $\zeta = 1,1$ :

$$D = 0,55 \gamma F \frac{w^2}{2g}.$$

Würde unter sonst gleichen Umständen  $\varepsilon_2 = 90^\circ$ , der Körper also hinten nicht zugeschärft sein, so erhielte man

$$D = (0,5 + 0,1) \gamma F \frac{w^2}{2g} = 0,6 \gamma F \frac{w^2}{2g},$$

während  $\varepsilon_1 = 90^\circ$ ,  $\varepsilon_2 = 45^\circ$ , d. h. Zuschärfung nur am hinteren Ende,

$$D = (1 + 0,055) \gamma F \frac{w^2}{2g} = 1,055 \gamma F \frac{w^2}{2g}$$

liefern würde.

Sind Vorder- und Hinterfläche des Körpers gekrümmt, so wendet man die vorstehenden Rechnungen auf ein als eben betrachtetes Flächentheilchen an und findet den Gesamtdruck  $D$  durch Integration.

Ist die Vorderfläche eine Cylinderfläche vom Halbmesser  $r$  und der Höhe  $h$ , so wird (Fig. 339) für ein Flächentheilchen  $dF = ds \cdot h$  derselben, welches mit  $w$  den Winkel  $\vartheta$  bildet und die Mittelpunkts-Koordinaten  $x$  und  $y$  hat:

$$8) \quad dN = \zeta_1 \gamma dF \frac{w^2 \sin^2 \vartheta}{2g},$$

oder, wenn man zur Abkürzung

$$9) \quad \zeta_1 \gamma \frac{w^2}{2g} = p_1 \quad \text{setzt:}$$

$$10) \quad dN = p_1 dF \sin^2 \vartheta.$$

Die Seitenkraft in der Richtung von  $w$  wird dann:

$$dP_1 = p_1 dF \sin^3 \vartheta,$$

während die andere Seitenkraft  $dH$  ohne Bedeutung ist. Weil nun  $dF = h \cdot ds$ ,  $\sin \vartheta = \frac{x}{r} = \frac{dy}{ds}$  und  $x^2 = r^2 - y^2$ , so wird

$$dP_1 = p_1 h \frac{x^2}{r^2} dy = p_1 \frac{h}{r^2} (r^2 - y^2) dy.$$

Für die halbcylindrische Vorderfläche hat man  $y$  zwischen den Grenzen  $y = -r$  und  $y = +r$  oder doppelt von  $y = 0$  bis  $y = r$  zu nehmen, mithin

$$P_1 = 2 p_1 \frac{h}{r^2} \int_0^r (r^2 - y^2) dy = 2 p_1 \frac{h}{r^2} \frac{2}{3} r^3.$$

Da nun die Querschnittsfläche des Körpers  $F = 2rh$ , so wird

$$P_1 = \frac{2}{3} p_1 F,$$

d. h. es wird in Folge der halbcylindrischen Abrundung der Überdruck  $P_1$  gegenüber dem auf eine ebene Fläche  $F$  auf  $\frac{2}{3}$  verkleinert. Für einen **Volleylinder** ist dann an der Rückseite ebenso der Minderdruck

$$P_2 = \frac{2}{3} p_2 F, \quad \text{wenn}$$

$$p_2 = \zeta_2 \gamma \frac{w^2}{2g} \quad \text{bedeutet,}$$

Fig. 339.

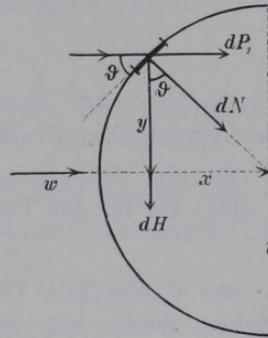
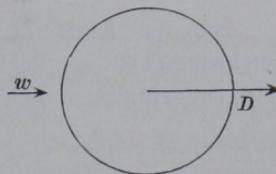


Fig. 340.



daher der gesammte Druck

$$11) \quad D = \frac{2}{3} \zeta \gamma F \frac{w^2}{2g} \quad \text{oder auch}$$

$$12) \quad D = \frac{2}{3} \rho F, \quad \text{wenn}$$

$$13) \quad \rho = \zeta \gamma \frac{w^2}{2g}$$

den hydraulischen Druck für 1<sup>qm</sup> ebene Fläche bedeutet.

Ist die Vorderfläche des Körpers eine Halbkugelfläche, so wird, wie für den Cylinder

$$dP_1 = \rho_1 dF \sin^3 \vartheta.$$

Da nun  $\vartheta$  für alle Theile der Kugelzone  $QQ_1$  (Fig. 341) den gleichen Werth hat, so kann als  $dF$  sogleich die ganze Zone

$$dF = 2\pi y ds = 2r\pi dx$$

eingeführt werden. Dann wird mit

$$\sin \vartheta = \frac{x}{r}:$$

$$dP_1 = \rho_1 \frac{2r\pi}{r^3} x^3 dx.$$

Dies giebt, für die Halbkugel zwischen den Grenzen  $x=0$  und  $x=r$  integrirt:

$$P_1 = \rho_1 \cdot \frac{2\pi}{r^2} \int_0^r x^3 dx = \frac{1}{2} \rho_1 r^2 \pi = \frac{1}{2} \rho_1 F.$$

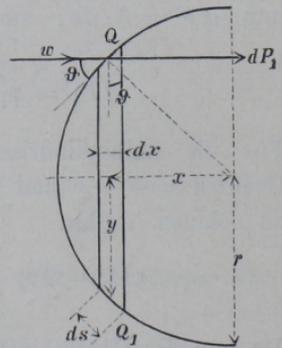
Die halbkugelförmige Abrundung vermindert also den Überdruck  $P_1$  gegenüber dem für eine ebene Fläche auf die Hälfte. Für eine Kugel ist dann an der Rückseite ebenso  $P_2 = \frac{1}{2} \rho_2 F$ , daher der gesammte Druck

$$14) \quad D = \frac{1}{2} \rho F = \frac{1}{2} \zeta \gamma F \frac{w^2}{2g}.$$

Soll die Kraft  $D$  die Kugel in ruhendem Wasser mit der Geschwindigkeit  $w$  gleichmässig bewegen, so ist, wenn man die für Prismen gefundenen Zahlen auch hier anwendet, nach S. 326, mit

$$\frac{l}{\sqrt{F}} = \frac{2r}{r\sqrt{\pi}} = 1,128,$$

Fig. 341.



$\zeta = 1,16$  zu wählen. Hiernach wird dann

$$D = 0,58 \gamma F \frac{w^2}{2g},$$

während Versuche im Mittel die Ziffer 0,54 ergeben haben.

## 5. Ausfluss der Gase aus Gefässen, bei geringem Überdruck.

Innerhalb eines grossen Gefässes (Fig. 342) befinde sich ein Gas unter dem Drucke  $p_1$  und der absoluten Temperatur  $T_1$ , wonach dann auf Grund der Zustandsgleichung (Gl. 5, S. 210) auch die Dichte

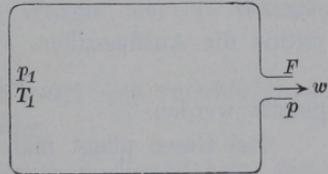
$$1) \quad \gamma_1 = \frac{1}{v_1} = \frac{p_1}{RT_1}$$

bestimmt ist. Ausserhalb des Gefässes herrsche der Druck  $p$ . Dann kann man, falls  $p_1 : p$  nicht viel grösser als 1 ist, annehmen, dass das aus einer kleinen Öffnung  $F$  strömende Gas beim Ausströmen den Druck  $p$  annimmt. Mit dieser Druckverminderung ist nicht allein eine Verminderung der Dichte, sondern auch eine Verminderung der Temperatur verbunden. Bei nur geringem Unterschiede der Drücke  $p$  und  $p_1$  möge aber die Dichte-Verminderung einstweilen unberücksichtigt bleiben, also angenommen werden, dass das Gas mit der Dichte  $\gamma_1$  auch zum Ausflusse gelange. Unter dieser Annahme verschwindet der wesentliche Unterschied zwischen Gasen und tropfbar-flüssigen Körpern, und es kann nun die Gleichung für den Ausfluss des Wassers (Gl. 4, S. 232) auch auf Gase angewandt werden, d. h. (für kleine Öffnung)

$$w = \sqrt{2g \left( h + \frac{p_1 - p}{\gamma_1} \right)}.$$

Der Druck  $p_1$  nimmt im Gefässe von oben nach unten etwas zu, jedoch sehr unbedeutend. Bezeichnet man mit  $p_1$  den Druck des Gases in der Höhe der Ausflussöffnung, so ist in obiger Gleichung  $h = 0$  zu setzen. Sodann muss die nicht unmittelbar zu messende Dichte  $\gamma_1$  nach Gl. 1 eingeführt, endlich auch, ebenso

Fig. 342.



wie beim Ausflusse von Wasser, eine Geschwindigkeitsziffer  $\varphi$  hinzugefügt werden, welche nach Grashof, Theoretische Maschinenlehre, 1. Band, S. 585, auf Grund Weisbach'scher Versuche zu etwa

$$2) \quad \varphi = 0,98$$

angenommen werden kann. Hiernach wird

$$3) \quad w = \varphi \sqrt{2gRT_1 \left(1 - \frac{p}{p_1}\right)}.$$

Bei der Berechnung der sekundlichen Ausflussmenge ist zu berücksichtigen, dass beim Ausflusse von Gasen aus denselben Gründen wie bei Wasser im Allgemeinen eine Einschnürung vorkommt, dass der Strahlquerschnitt also  $= \alpha F$  zu setzen ist. Bei kreisförmiger Öffnung in dünner Wand kann

$$\alpha = 0,65,$$

mithin die Ausflussziffer

$$\mu = \varphi \cdot \alpha = 0,64$$

gesetzt werden.

Bei Gasen pflegt man die sekundliche Ausflussmenge in Kilogrammen auszudrücken, weil bei der Angabe nach Kubikmetern stets noch die Dichte ausserdem anzugeben wäre, um die Ausflussmenge bestimmt zu kennzeichnen. Die sekundlich ausfliessende Gewichtsmenge ist dann

$$G = \gamma_1 \alpha \cdot F \cdot w \quad \text{oder}$$

$$4) \quad G = \frac{p_1}{RT_1} \mu F \sqrt{2gRT_1 \left(1 - \frac{p}{p_1}\right)}.$$

Diese Gleichung gilt aber nur für sehr geringen Überdruck.

**Beispiel:** Der Aussendruck betrage  $1 \text{ at}$ , entsprechend einer Quecksilbersäule von  $735 \text{ mm}$ . In einem Gefässe befinde sich Luft von  $t_1 = 10^\circ \text{ C}$ . oder  $T_1 = 283^\circ$  und einem Drucke von  $765 \text{ mm}$  Quecksilbersäule. In der Gefässwand befinde sich ein rundes Loch von  $1 \text{ qcm} = 0,0001 \text{ qm}$  Grösse; es sollen sekundliche Geschwindigkeit und Gewichtsmenge der ausströmenden Luft berechnet werden. Mit  $R = 29,27$  und  $\varphi = 0,98$  wird Gl. 3:

$$w = 0,98 \sqrt{2g \cdot 29,27 \cdot 283 \left(1 - \frac{735}{765}\right)} = 78 \text{ m/s.}$$

Es ist

$$\gamma_1 = \frac{10\,000}{29,27 \cdot 283} = 1,2,$$

daher mit  $\alpha = 0,65$ :

$$G = 1,2 \cdot 0,65 \cdot 0,0001 \cdot 78 = 0,0061 \text{ kg/s.}$$

## 6. Spezifische Wärme; Zustandsänderungen der Gase.

Die Temperatur eines Körpers, also auch eines Gases, kann man erhöhen, indem man dem Körper, etwa mittels einer Heizung, Wärme zuführt. Die Menge der Wärme wird gemessen nach Wärmeeinheiten. Unter einer **Wärmeeinheit** ( $WE$ ) versteht man diejenige Wärmemenge, welche nöthig ist, um die Temperatur von  $1\text{ kg}$  Wasser von  $0^\circ\text{C}$ . auf  $1^\circ\text{C}$ . zu erhöhen. Die nach diesen Wärmeeinheiten gemessene Wärmemenge wird mit  $Q$  (bedeutet Quantum) bezeichnet.

Die Anzahl der Wärmeeinheiten, welche man einem Kilogramm irgend eines Stoffes mittheilen muss, um dessen Temperatur um  $1^\circ\text{C}$ . zu erhöhen, heisst die **spezifische Wärme** oder die **Wärmekapazität** dieses Stoffes.

Die spezifische Wärme eines Gases zeigt sich verschieden, je nachdem das Gas bei der Wärmezuführung

1. in einem Gefässe von unveränderlichem Rauminhalte festgehalten wird, oder aber
2. sich unter einem unveränderlichen Drucke  $p$  (etwa dem eines belasteten, reibungslosen Kolbens) auszudehnen vermag.

Die spezifische Wärme für unveränderliches spezifisches Volumen  $v$ , also auch unveränderliche Dichte  $\gamma = 1 : v$ , werde mit  $c$ , diejenige für unveränderlichen Druck mit  $c_1$  bezeichnet. Beide sind für ein bestimmtes Gas feste Werthe, unabhängig von der Temperatur.

Die Ermittlung der Grössen  $c$  und  $c_1$  für ein bestimmtes Gas durch Versuche hat nun ergeben, dass stets  $c_1 > c$  ist. So ist z. B. für atmosphärische Luft  $c = 0,1684$ ;  $c_1 = 0,2375$ . Man erklärt diese Erscheinung daraus, dass bei der Temperaturerhöhung unter gleichzeitiger Ausdehnung des Gases, etwa unter Verschiebung eines das Gas abschliessenden, belasteten Kolbens, von dem Gase auf diesen Kolben eine mechanische Arbeit übertragen wird, dass diese Ausdehnungs-Arbeit einen Theil der zugeführten Wärmemenge erfordert, während der noch verbleibende Rest der zugeführten Wärmemenge zur Erhöhung der Temperatur, d. h. zur Vermehrung des inneren Arbeitsvermögens des Gases verwendet wird.

Befindet sich  $1 \text{ kg}$  Gas in einem Cylinder (Fig. 343) vom Querschnitt  $F$  und nimmt in diesem eine Länge  $x$  des Raumes ein, so ist

$$v = F \cdot x.$$

Das Gas übt auf den Kolben eine Kraft  $p \cdot F$  aus. Bei einer Verschiebung des Kolbens um  $dx$  nach aussen überträgt das Gas eine Arbeit an den Kolben

$$d\mathfrak{A} = p \cdot F \cdot dx,$$

oder, weil  $F \cdot dx = dv$ :

$$1) \quad d\mathfrak{A} = p \cdot dv.$$

Dies ist die Ausdehnungsarbeit bei einer unendlich kleinen Vergrößerung des spezifischen Volumens. Zwischen dieser Arbeit und der auf sie verwendeten Wärmemenge  $dQ$  besteht nach den Lehren der Physik ein festes Verhältnis. Überhaupt sind Wärme und Arbeit gleichwerthig. Mag Wärme  $Q$  in Arbeit  $\mathfrak{A}$  umgewandelt werden, wie bei der Dampfmaschine, der Heissluft- und Gaskraftmaschine, oder mag äusseres Arbeitsvermögen  $\mathfrak{A}$  in Wärme  $Q$  übergehen, wie z. B. bei der Reibung (1. Theil, S. 265) oder beim Stosse (s. S. 132), — immer besteht zwischen beiden ein festes Verhältnis, es ist

$$2) \quad Q = A \cdot \mathfrak{A}.$$

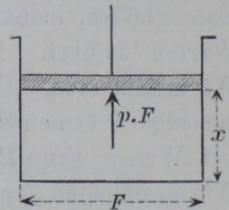
Der Festwerth  $A$  heisst der Wärmewerth der Arbeitseinheit, d. h. die Anzahl der Wärmeeinheiten, die durch  $1 \text{ mkg}$  erzeugt werden können, der reciproke Werth  $1:A$  heisst der Arbeitswerth der Wärmeeinheit, d. i. die Anzahl der Meterkilogramme, die einer Wärmeeinheit gleichwerthig sind. Messungen der verschiedensten Art haben auf die Zahl

$$3) \quad \frac{1}{A} = 424 \text{ mkg}; \quad A = \frac{1}{424} \text{ WE} \text{ geführt.}$$

Der Wärmezustand oder innere Zustand eines Theilchens eines Körpers, insbesondere eines Gases, ist bedingt durch seine Temperatur  $T$ , seinem Druck  $p$  und sein spezifisches Volumen  $v$ , von denen aber zwei die dritte bestimmen, weil zwischen ihnen eine feste Beziehung, die Zustandsgleichung  $T = f(p, v)$  besteht, welche für Gase nach S. 210 die einfache Form

$$4) \quad T = \frac{p \cdot v}{R}$$

Fig. 343.



hat, worin  $T$  die sog. absolute Temperatur =  $273 + t$  bedeutet.  $R$  ist für jedes Gas ein besonderer Festwerth, für atmosphärische Luft = 29,27. Weil  $R = \frac{p \cdot v}{T}$ , so ist, wenn man verschiedene Gase auf gleiche Temperatur, z. B. den Gefrierpunkt  $t_0 = 0$ ,  $T_0 = 273$ , und auf gleichen Druck, z. B. den Atmosphärendruck  $p_0$  bringt,  $R$  verhältnissgleich mit dem für diesen Zustand gültigen specifischen Volumen  $v_0$ , oder umgekehrt verhältnissgleich mit der Dichte  $\gamma_0$  der verschiedenen Gase. So ist für Wasserstoff, dessen Dichte bei dem Atmosphärendruck von 760 mm Quecksilbersäule und der Temperatur des Gefrierpunktes  $\gamma_0 = 0,08957$  beträgt, die Grösse

$$R = \frac{29,27 \cdot 1,2932}{0,08957} = 422,6.$$

Nach dem Vorstehenden, besonders nach Gl. 4, bestimmen  $p$  und  $v$  schon den Wärmezustand eines Gastheilchens vollständig. Es soll nun die Wärmemenge berechnet werden, die man einem Kilogramm Gas von überall gleichem Wärmezustande zuführen muss, damit das Gas eine unendlich kleine Zustandsänderung erfahre.

In Gleichung 4 erscheint  $T$  als Funktion zweier Veränderlichen  $p$  und  $v$ . Die theilweisen Differentiale von  $T$  sind

$$5) \quad \frac{\delta T}{\delta p} dp = \frac{v}{R} dp; \quad \frac{\delta T}{\delta v} dv = \frac{p}{R} dv.$$

Die vollständige Differential von  $T$  bei gleichzeitiger Änderung von  $p$  und  $v$  ist

$$6) \quad dT = \frac{v}{R} dp + \frac{p}{R} dv.$$

In Figur 344 ist eine unendlich kleine aber totale Zustandsänderung angedeutet, welche durch Zuführung der Wärmemenge  $dQ$

Fig. 344.

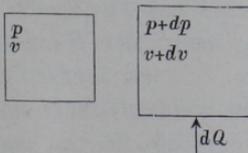
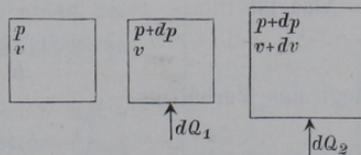


Fig. 345.



bewirkt wird. Diese kann in zwei auf einander folgende partielle Änderungen nach Fig. 345 zerlegt werden. Die erste Änderung

bei gleichbleibendem  $v$  erfordere die Wärmemenge  $dQ_1$ ; bei dieser ändert sich  $T$  nur partiell nach  $p$  um

$$\frac{\delta T}{\delta p} dp = \frac{v}{R} dp,$$

wobei die spezifische Wärme  $c$  in Frage kommt; und es ist nach der Bedeutung von  $c$

$$dQ_1 = c \frac{\delta T}{\delta p} dp = \frac{cv}{R} dp.$$

Die zweite Änderung bei nun gleichbleibendem  $p + dp$  erfordere die Wärmemenge  $dQ_2$ ; für diese gilt offenbar

$$dQ_2 = c_1 \frac{\delta T}{\delta v} dv = c_1 \frac{p}{R} dv.$$

Die ganze erforderliche Wärmemenge ist dann

$$dQ = dQ_1 + dQ_2 \quad \text{oder}$$

$$7) \quad dQ = \frac{cv}{R} dp + c_1 \frac{p}{R} dv.$$

Da nach Gl. 6 
$$\frac{v}{R} dp = dT - \frac{p}{R} dv,$$

so kann man Gl. 7 auch schreiben:

$$8) \quad dQ = c \cdot dT + (c_1 - c) \frac{p}{R} dv.$$

Hierin bedeutet  $c \cdot dT$  diejenige Wärmemenge, welche zur Erhöhung der Temperatur verwendet wird, während  $(c_1 - c) \frac{p}{R} dv$  diejenige Wärmemenge bezeichnet, die zur Ausdehnungs-Arbeit  $d\mathcal{A} = p dv$  nöthig ist. Hiernach ergibt sich  $\frac{c_1 - c}{R}$  als diejenige Grösse  $A$  (Gl. 2, S. 334), mit der die Arbeit  $p \cdot dv$  zu multipliciren ist, um die entsprechende, d. h. gleichwerthige Wärmemenge zu liefern. Also ist

$$9) \quad A = \frac{c_1 - c}{R}.$$

Man pflegt das Verhältnis

$$10) \quad \frac{c_1}{c} = n$$

einzuführen. Für Luft ist  $n = 1,405$  (nahezu  $= \sqrt{2}$ ), für Sauerstoff 1,40, für Stickstoff, Wasserstoff und Kohlenoxyd ebenfalls



der Zustandsänderung die sog. Zustandskurve (Fig. 346). Die Arbeit  $\mathfrak{A} = \int p dv$  wird dann gemessen durch die Fläche  $BCDE$  der Zustandskurve.

**Zustandsänderung bei gleichbleibender Temperatur (isothermische Zustandsänderung).** Wird der Vorgang so geregelt, dass bei veränderlichem  $v$  die Temperatur  $T$  unverändert  $= T_1$  bleibt, so wird, weil anfänglich  $T_1 = \frac{p_1 v_1}{R}$  war und später  $T_1 = \frac{p v}{R}$  ist,

$$14) \quad p \cdot v = p_1 \cdot v_1.$$

Dies ist die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, bezogen auf die Asymptoten. Diese Zustandskurve ist die Darstellung des Boyle-Mariotte'schen Satzes, der ja (S. 202) für gleichbleibende Temperatur gilt. Jedem Punkte  $p_1$ ,  $v_1$  der Ebene  $APV$  entspricht ein bestimmter Werth  $p_1 v_1 = R T_1$ , eine bestimmte Hyperbel, eine bestimmte Zustandsänderung bei einer Temperatur  $T_1$  (Fig. 347).

Trägt man behufs Darstellung der Zustandsgleichung  $p \cdot v = R T$  die Grössen  $T$  lothrecht auf, während die Achsen  $AV$  und  $AP$  in einer wagerechten Ebene liegen, so erhält man die durch den Festwerth  $R$  bestimmte Zustandsfläche des Gases; ein wagerechter Schnitt in der Höhe  $T_1$  liefert dann die isothermische Zustandskurve.

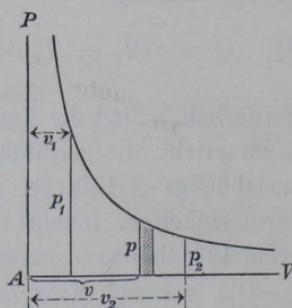
Die Ausdehnungsarbeit für 1 kg des Gases von dem Rauminhalte  $v_1$  auf  $v_2$  ist

$$\mathfrak{A} = \int_{v_1}^{v_2} p dv \quad \text{oder mit}$$

$$p = \frac{p_1 \cdot v_1}{v}:$$

$$15) \quad \mathfrak{A} = p_1 \cdot v_1 \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v} = p_1 v_1 \ln \left( \frac{v_2}{v_1} \right),$$

Fig. 347.



wofür man auch schreiben kann

$$16) \quad \mathfrak{A} = p_1 v_1 \ln \left( \frac{p_1}{p_2} \right) = p_2 v_2 \ln \left( \frac{v_2}{v_1} \right) = R T_1 \ln \left( \frac{v_2}{v_1} \right).$$

Diese Zustandsänderung mit gleichbleibendem  $T = T_1$  wird nur dann erfolgen, wenn für jede unendlich kleine Ausdehnung  $dv$  dem Gase die der Arbeit  $p dv$  entsprechende Wärmemenge  $dQ = A \cdot d\mathfrak{A}$  zugeführt wird (nach Gl. 12 mit  $dT = 0$ ). Aus der Figur 347 ist ersichtlich, dass bei gleichmässiger Änderung von  $v$  die Wärmezuführung zu Anfang stärker sein muss als später.

Bei einer Zusammendrückung von  $v_2$  auf  $v_1$  muss die Arbeit  $\mathfrak{A}$  als Verdichtungsarbeit von aussen auf das Gas übertragen werden, es ist die Arbeit  $\mathfrak{A}$ , welche der Gasdruck auf den Kolben überträgt, und somit auch  $Q$ , negativ, d. h. es muss dem Gase die Wärmemenge  $Q$  entzogen werden (etwa durch Kühlwasser).

**Beispiel:** Ein Kilogramm Luft habe die Temperatur  $t_1 = 10^\circ$  mit  $T_1 = 283^\circ$ , den Druck  $p_1 = 50\,000 \text{ kg/qm} = 5 \text{ at}$ , also den Rauminhalt  $v_1 = R T_1 : p_1 = 0,16567 \text{ cbm}$ . Bei der Ausdehnung auf  $v_2 = 5 v_1$ , wobei unter Gleicherhaltung der Temperatur  $T = T_1$  der Druck auf  $1/5 p_1$  abnimmt, wird von dem Gase die Arbeit

$$\mathfrak{A} = 50\,000 \cdot 0,16567 \ln(5) = 13\,323 \text{ mkg}$$

geleistet, d. h. eigentlich nur übertragen, denn geliefert wird die Arbeit aus der zuzuführenden Wärme

$$Q = \frac{13323}{424} = 31,42 \text{ WE.}$$

Presst man das Gas wieder zusammen und entzieht fortwährend so viel Wärme, dass die absolute Temperatur stets  $283^\circ$  verbleibt, so muss man obige  $13\,323 \text{ mkg}$  Arbeit aufwenden, die aber in Form von  $31,42 \text{ WE}$  an das etwaige Kühlwasser übergeht.

**Zustandsänderung bei gleichbleibendem Druck.** Bei gleichbleibendem  $p = p_1$  wird die Zustandskurve eine der  $v$ -Achse parallele Gerade (Fig. 348), daher

$$17) \quad \mathfrak{A} = p_1 (v_2 - v_1) = R (T_2 - T_1).$$

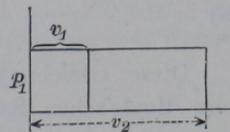
Die Temperaturänderung folgt der Gleichung

$$18) \quad \frac{T}{T_1} = \frac{v}{v_1}$$

(Satz von Gay-Lussac, S. 208). Es ist nach Gl. 13 die zuzuführende Wärmemenge

$$Q = c T_1 \left( \frac{v_2}{v_1} - 1 \right) + A p_1 (v_2 - v_1) = (v_2 - v_1) p_1 \left( \frac{c}{R} + A \right).$$

Fig. 348.



Dies wird wegen  $A = \frac{c_1 - c}{R}$  (Gl. 9):

$$19) \quad Q = (v_2 - v_1) p_1 \frac{c_1}{R} \quad \text{oder auch}$$

$$20) \quad Q = c_1 (T_2 - T_1),$$

wie nach der Bedeutung von  $c_1$  selbstverständlich ist.

Die Zustandsänderung bei gleichbleibendem Raume wird selbstverständlich durch eine zur  $p$ -Achse parallele Gerade dargestellt. Es ist

$$21) \quad \frac{T}{T_1} = \frac{p}{p_1}; \quad \mathfrak{A} = 0 \quad \text{und nach Gl. 13}$$

$$22) \quad Q = c(T_2 - T_1) = \frac{c v_1}{R} (p_2 - p_1);$$

wie der Bedeutung von  $c$  entspricht.

**Zustandsänderung ohne Zuführung oder Entziehung von Wärme.** Denkt man sich das Gas in einem Behälter, etwa einem Cylinder mit beweglichem Kolben befindlich, dessen Wandungen für Wärme undurchlässig sind, und den Kolben nach aussen verschoben, so ändert sich unmittelbar  $v$  und als Folge davon  $p$  und  $T$ . Dieser Vorgang heisst nach dem schottischen Ingenieur und Professor Rankine (geb. 1820 zu Edinburg, gest. 1872 zu Glasgow) **adiabatische Zustandsänderung** (von  $\alpha\delta\alpha\beta\alpha\tau\omicron\varsigma$  = undurchdringlich). Die Bedingung für diese Zustandsänderung ist, dass die zugeführte Wärmemenge für jedes Zeittheilchen Null sei, d. h. nach Gl. 7 und 10

$$0 = \frac{c v}{R} dp + c_1 \frac{p}{R} dv. \quad \text{Daraus wird}$$

$$\frac{dp}{p} = - \frac{c_1}{c} \frac{dv}{v} = - n \frac{dv}{v} \quad \text{und}$$

$$23) \quad \frac{p}{p_1} = \left( \frac{v_1}{v} \right)^n.$$

Diese Gleichung heisst der Poisson'sche Satz. Während beim Boyle'schen Satze der Exponent der rechten Seite = 1 ist, hat er hier den Werth  $n = 1,41$ . Da nun  $p_1 v_1 = R T_1$  und  $p v = R T$ , also  $\frac{p}{p_1} = \frac{T}{T_1} \frac{v_1}{v}$ , so wird für die Temperaturänderung

$$24) \quad \frac{T}{T_1} = \left( \frac{v_1}{v} \right)^{n-1} = \left( \frac{p}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Gl. 13 giebt mit  $Q = 0$ :

$$25) \quad \mathfrak{A} = \frac{c}{A} (T_1 - T_2).$$

Für  $v_2 > v_1$  ist  $p_2 < p_1$  und  $T_2 < T_1$ , es erfolgt eine Temperaturabnahme; die Ausdehnungsarbeit wird hier auf Kosten des inneren Arbeitsvermögens, d. h. der Temperatur, verrichtet. Bei der Zusammendrückung auf einen kleineren Raum erfolgt eine Erhöhung des Druckes sowie der Temperatur. Die von aussen zur Zusammendrückung aufgewandte Arbeit setzt sich vollständig in inneres Arbeitsvermögen, Erhöhung der Temperatur, um.

Die Bedingungen für eine adiabatische Zustandsänderung sind annähernd erfüllt, wenn ohne besondere Vorkehrungen eine Raumänderung schnell erfolgt. Dann ist keine Zeit zur Wärmemittheilung, und das Gas ist bei Leistung einer Arbeit auf sein eigenes Arbeitsvermögen, d. h. seine eigene Wärme angewiesen, muss andererseits eine empfangene äussere Arbeit in Wärme umsetzen. Geht eine Zustandsänderung aber in einem nicht besonders geschützten dünnwandigen Metallgefässe sehr langsam vor sich, so kann man annehmen, das eingeschlossene Gas habe stets annähernd die Temperatur der äusseren Luft. Diese bewirkt dann die erforderliche Zuführung oder Entziehung von Wärmemenge.

**Beispiel 1:** Ein Kilogramm Luft habe die Temperatur  $t_1 = 10^\circ$ ,  $T_1 = 283^\circ$ , den Druck  $p_1 = 50\,000$  kg/qm, also den Rauminhalt  $v_1 = 0,165\,67$  cbm. Bei einer adiabatischen Ausdehnung auf  $v_2 = 3v_1$  vermindert sich der Druck auf  $p_2 = p_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{1,41} = 0,2125 p_1 = 10\,623$  kg/qm, die Temperatur auf  $T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{0,41} = 0,6373 T_1 = 180^\circ$ , entsprechend  $t_2 = -93^\circ$ . Es entsteht also eine überraschend grosse Abkühlung um  $103^\circ$  C. Die Ausdehnungsarbeit beträgt (Gl. 25)

$$\mathfrak{A} = 0,1684 \cdot 424 \cdot 103 = 7354 \text{ mkg.}$$

**Beispiel 2:** Hatte 1 kg Luft anfänglich den Druck  $p_1 = 10\,000$  kg/qm und die Temperatur  $t_1 = 15^\circ$ ,  $T_1 = 288^\circ$  und wird diese Luftmenge ohne Wärmeentziehung auf  $\frac{1}{5}$  ihres Rauminhalts verdichtet, so wird

$$\frac{p_2}{p_1} = 5^{1,41} = 9,67 \quad \text{mit} \quad p_2 = 96\,700,$$

$$\frac{T_2}{T_1} = 5^{0,41} = 1,93 \quad \text{mit} \quad T_2 = 557^\circ,$$

$t_2 = 284^\circ$ . (Zinn kommt schon bei  $230^\circ$  zum Schmelzen, Blei erst bei  $330^\circ$ .)

Die Zusammendrückungsarbeit ergiebt sich zu

$$\mathfrak{A} = 0,1684 \cdot 424 \cdot 269 = 19\,207 \text{ mkg.}$$

## 7. Ausfluss von Gasen aus Gefässen.

In einem grossen Gefässe (Fig. 349) befinde sich Gas von dem Zustande  $p_1, v_1, T_1$ . Bei  $C$  finde aus der Öffnung  $F$  ein Ausfluss mit der Geschwindigkeit  $w$  statt.

Zur Erhaltung des Beharrungszustandes denken wir uns die Rückwand des Gefässes durch einen Kolben von der Grösse  $F_1$  ersetzt, der mit der sehr kleinen

Geschwindigkeit  $w_1$  vorrückt, also in der Zeit  $dt$  um  $AB = w_1 \cdot dt$ . Auch nehmen wir an der Öffnung eine Röhre von der Länge  $CD = w \cdot dt$  an, in der ein Kolben unter einer Gegenkraft  $p \cdot F$  zurückweicht. Der Zustand des Gases sei in der Öffnung  $p, v, T$ . Zwischen  $A$  und  $B$  findet sich das Massenthelchen  $m$  von dem Gewichte

$$mg = \gamma_1 F_1 w_1 dt = \frac{F_1 w_1 dt}{v_1},$$

ebenso zwischen  $C$  und  $D$  mit

$$mg = \frac{F \cdot w \cdot dt}{v}.$$

Während der Zeit  $dt$  erfolgt die Zunahme an Arbeitsvermögen, weil  $w_1$  sehr klein ist:  $\frac{mw^2}{2}$ . Die Kräfte  $p_1 \cdot F_1$  und  $p \cdot F$  leisten die Arbeit

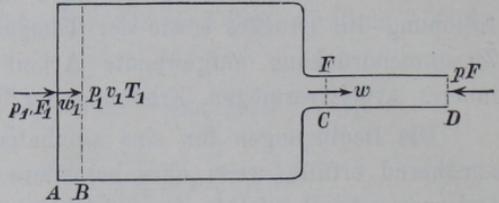
$$p_1 \cdot F_1 \cdot w_1 \cdot dt - p \cdot F \cdot w \cdot dt = mg(p_1 v_1 - p v) = mg \cdot R(T_1 - T).$$

In der Zeit  $dt$  erfährt das Gasgewicht  $mg$  eine Temperaturverminderung  $T_1 - T$ , für welche man die Gleichungen der adiabatischen Zustandsänderung annehmen kann, also

$$1) \quad \frac{T}{T_1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Die dieser Temperaturverminderung entsprechende Wärmemenge beträgt für  $1 \text{ kg}$   $c(T_1 - T)$ , für das Gewicht  $mg$  also

Fig. 349.



$mg \cdot c(T_1 - T)$ , und kommt dem Arbeitsvermögen der Ausströmung mit  $mg \frac{c}{A}(T_1 - T)$  zu Gute. Daher wird

$$\frac{mw^2}{2} = mg \cdot R(T_1 - T) + mg \frac{c}{A}(T_1 - T) \quad \text{und}$$

$$\frac{w^2}{2g} = (T_1 - T) \left( R + \frac{c}{A} \right).$$

Weil nun nach Gl. 11, S. 337.

$$\frac{c}{A} = \frac{R}{n-1}, \quad \text{so wird}$$

$$R + \frac{c}{A} = R \left( 1 + \frac{1}{n-1} \right) = R \frac{n}{n-1},$$

mithin bei Vernachlässigung der Reibung

$$2) \quad \frac{w^2}{2g} = (T_1 - T) R \frac{n}{n-1} = R \frac{n}{n-1} T_1 \left\{ 1 - \left( \frac{p}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right\}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist als die wirksame Druckhöhe zu bezeichnen, welche sich bei der Abwesenheit von Widerstandshöhen in die Geschwindigkeitshöhe  $\frac{w^2}{2g}$  umsetzt.

Die sekundliche Gewichtsmenge des ausströmenden Gases ist wegen  $\gamma = 1 : v$  nunmehr

$$G = \alpha \cdot F \cdot \frac{w}{v}.$$

Führt man hierin für  $w$  den Werth aus Gl. 2, und nach Gl. 23, S. 340  $v = v_1 \left( \frac{p_1}{p} \right)^{\frac{1}{n}}$  ein, so wird mit  $\varphi \cdot \alpha = \mu$  (vgl. S. 345)

$$3) \quad G = \mu \cdot F \sqrt{2g R \frac{n}{n-1} \cdot T_1 \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right] \left( \frac{p}{p_1} \right)^{\frac{2}{n}} \cdot \frac{1}{v_1^2}}.$$

Hiernach ist  $G^2$  verhältnissgleich mit

$$\left( \frac{p}{p_1} \right)^{\frac{2}{n}} - \left( \frac{p}{p_1} \right)^{\frac{(n+1)}{n}},$$

ein Ausdruck, der zu einem Maximum wird für

$$4) \quad \frac{p}{p_1} = \left( \frac{2}{n+1} \right)^{\frac{n}{n-1}}; \quad \text{hiermit ergibt sich}$$

$$5) \quad G_{\max} = \mu F \sqrt{2g \frac{n}{n+1} \left( \frac{2}{n+1} \right)^{\frac{2}{n-1}} \frac{p_1}{v_1}},$$

worin noch

$$\frac{p_1}{v_1} = \frac{p_1^2}{R T_1} \quad \text{gesetzt werden kann.}$$

Mit  $n = 1,41$ ,  $\frac{1}{n} = 0,709$ ,  $\frac{n-1}{n} = 0,291$ ,  $\frac{n}{n-1} = 3,44$  wird

$$6) \quad \frac{p}{p_1} = 0,5265$$

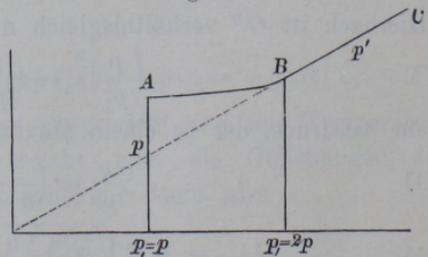
und für Luft mit  $R = 29,27$ :

$$7) \quad G_{max} = \mu F 0,3972 \frac{p_1}{\sqrt{T_1}}.$$

Stellt man sich also vor, der Druck im Gefässe bliebe unverändert  $p_1$ , der Aussendruck  $p$  aber nehme ab, so wird nach Gl. 1 auch die Temperatur  $T$  der ausströmenden Luft abnehmen, die Geschwindigkeit  $w$  zunehmen. Da aber zugleich nach Gl. 23, S. 340,  $v$  zunimmt, die Dichte sich vermindert, so wird, trotz des Wachsens der sekundlich ausströmenden Raummenge, das ausströmende Gewicht  $G$  nur zunehmen, solange  $\frac{p}{p_1} > 0,5265$ . Bei noch weiterer Abnahme von  $p$  wird aber  $G$  wieder kleiner, und es würde für  $p = 0$ , d. h. für die Ausströmung in einen leeren Raum nach Gl. 3  $G = 0$  werden, weil für  $p = 0$ ,  $v = \infty$ ,  $\gamma = 0$  wird.

In Wirklichkeit trifft dies nicht zu. Einestheils würde für  $p = 0$ , nach Gl. 23 und 24, S. 340,  $v = \infty$  und  $T = 0$ , und so weit reicht die Gültigkeit der Zustandsgleichung der Gase nicht; auch trifft die Annahme nicht zu, dass in demjenigen Querschnitt, in welchem die Geschwindigkeit  $w$  herrscht, der Druck des ausströmenden Gases gleich dem im Aussenraume stattfindenden Drucke  $p$  sei; vielmehr herrscht dort ein Druck  $p' > p$ . Über diesen Druck  $p'$  hat Professor Fliegner (Zürich) nach dem Civilingenieur 1874 Versuche angestellt. Nimmt der Druck  $p_1$  im Gefässe von  $p$  beginnend allmählich zu, so ist anfangs  $p' = p$ , nimmt für  $p_1 = 2p$  den Werth  $p' = 0,5767 p_1$  an, und es bleibt für weiter wachsendes  $p_1$  unverändert  $p' = 0,5767 p_1$ . Das Gesetz der Veränderlichkeit von  $p'$  folgt dem Zuge  $ABC$  (Fig. 350).

Fig. 350.



Für die schwach gekrümmte Kurve  $AB$  kann man annähernd eine Gerade  $AB$  setzen. Hiernach ist

$$8) \quad p' = p + 0,1534(p_1 - p) \text{ für } p_1 = p \text{ bis } p_1 = 2p,$$

$$9) \quad p' = 0,5767 p_1 \text{ für } p_1 > 2p.$$

Zur Berechnung der Geschwindigkeit  $w$  hat man sonach in Gl. 1 und 2, S. 342/3 statt  $p$  den Druck  $p'$  nach Gl. 8 und 9 einzuführen.

Zugleich fand Fliegner, dass die Reibungswiderstände in einem grossen Gefässe verschwindend klein sind, so dass  $\varphi = 1$ ,  $\mu = \alpha$  gesetzt werden kann.

Für die sekundlich ausfliessende Gewichtsmenge kann nach Fliegner's Versuchen gesetzt werden:

$$10) \left\{ \begin{array}{l} \text{Für } p_1 < 2p: \quad G = \alpha F \cdot 0,790 \sqrt{\frac{p(p_1 - p)}{T_1}}. \\ \text{Für } p_1 > 2p: \quad G = \alpha F \cdot 0,395 \frac{p_1}{\sqrt{T_1}}, \end{array} \right.$$

wenn  $p$  und  $p_1$  in  $\frac{\text{kg}}{\text{qm}}$  verstanden wird.

**Beispiel:** Es sei, wie auf S. 332:  $p$  entsprechend einer Quecksilbersäule von 735 mm, d. h.  $p = 735 \cdot 13,6 = 9996$ ,  $p_1 = 765 \cdot 13,6 = 10404$ ,  $T_1 = 283$ ,  $F = 0,0091 \text{ qm}$ ; dann wird nach Gl. 8:

$$p' = 10059, \quad \frac{p'}{p_1} = 0,9668.$$

Hiernach wird (Gl. 1, S. 342 mit  $p'$  statt  $p$ )

$$\frac{T}{T_1} = 0,9668^{0,291} \text{ und } T = 280,2, \quad T_1 - T = 2,8.$$

$$w = \sqrt{2g \cdot 29,27 \cdot 3,44 \cdot 2,8} = 74,4 \text{ m}$$

gegen 78 m nach S. 332. Die sekundliche Gewichtsmenge ist nach Gl. 10 mit  $\alpha = 0,65$ :

$$G = 0,65 \cdot 0,0091 \cdot 0,79 \sqrt{\frac{9996 \cdot 408}{283}} = 0,0063 \text{ kg/s.}$$

gegen 0,0061 kg/s, auf S. 332.

Die unter Umständen sehr bedeutende Temperatur-Verminderung, welche Luft bei einer adiabatischen Druckverminderung erleidet (s. Beispiel 1, S. 341), kann zur Kühlung von Räumen nur verwertet werden, wenn die Luft unter Verrichtung von Arbeit in dem Cylinder einer Kaltluftmaschine den geringeren Druck angenommen hat. Die Temperatur-Verminderung aber, welche Luft beim freien Ausströmen aus einem Gefässe (Gl. 1, S. 342) erfährt, lässt sich nicht benutzen. Es wird nämlich die mit grosser Geschwindigkeit ausströmende Luft in dem Aussenraume schliesslich in Folge von Reibung wieder zur Ruhe kommen, und dabei wird das der Geschwindigkeit  $w$  entsprechende Arbeitsvermögen wieder in Wärme umgesetzt.

## 8. Bewegung der Luft in Röhren.

In Folge des Reibungswiderstandes beim Durchströmen einer Röhre erfährt die Luft eine Verminderung ihres Druckes um  $\Delta p$ . Wie man bei Wasser eine Widerstandshöhe  $z = \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g}$  einführt (S. 277), so setzt man hier die Druckverminderung

$$\Delta p = \gamma \cdot z = \gamma \cdot \lambda \cdot \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g},$$

wenn  $\gamma$  die Dichte der Luft bedeutet. Man kann dann auch wegen  $\frac{1}{\gamma} = v = \frac{RT}{p}$  schreiben:

$$1) \quad \Delta p = \frac{p}{RT} \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g}.$$

Nach Versuchen von Prof. Ledoux (Annales des mines 1892, Nov., S. 541) kann im Mittel  $\lambda = 0,0179$  gesetzt werden, wofür wir

$$2) \quad \lambda = 0,018$$

schreiben wollen.

**Beispiel:** Eine Leitung von  $d = 0,25$  m Weite und  $l = 1000$  m Länge führe Luft von im Mittel  $20^\circ$  C. ( $T = 293$ ) mit einer Geschwindigkeit  $w = 6$  m/s. aus einem Behälter mit einem Drucke  $p_1 = 60\,000$  kg/qm in einen Tunnel zum Betriebe von Bohrmaschinen. Es soll der Druckverlust der Leitung berechnet werden. Es ist

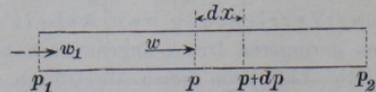
$$\Delta p = \frac{60\,000}{29,27 \cdot 293} 0,018 \cdot \frac{1000}{0,25} \frac{6^2}{2g} = 924 \text{ kg/qm};$$

am Ende der Leitung beträgt der Druck also noch  $59\,076$  kg/qm.

Mit der Druckabnahme ist, wenn man voraussetzt, dass in Folge von Wärmeleitung durch die Röhrenwand eine Temperaturveränderung der Luft nicht vorkommt, eine Vergrößerung des Einheitsraumes  $v$  der Luft nach dem Boyle'schen Satze verbunden. Im Beharrungszustande muss nun

sekundlich das gleiche Luftgewicht  $\gamma F w = \frac{F w}{v}$  durch alle Querschnitte der Röhren hindurchströmen. Gelten daher (Fig. 351)

Fig. 351.



$p_1, v_1, w_1$  für den Anfang,  $p_2, v_2, w_2$  für das Ende,  $p, v, w$  für eine beliebige Stelle der Röhre, so muss

$$\frac{w}{v} = \frac{w_1}{v_1} \text{ und wegen } \frac{v}{v_1} = \frac{p_1}{p}, \quad w = \frac{w_1 p_1}{p}$$

sein. Ferner nach Gl. 1, weil  $p$  mit wachsendem  $x$  abnimmt,

$$3) \quad -dp = \frac{p}{RT} \lambda \frac{dx}{d} \frac{w^2}{2g} = \frac{p}{RT} \frac{\lambda}{d} dx \frac{w_1^2}{2g} \frac{p_1^2}{p^2} \quad \text{also}$$

$$-p dp = \frac{\lambda}{d} \frac{p_1^2}{RT} \frac{w_1^2}{2g} dx. \quad \text{Dies giebt}$$

$$p_1^2 - p_2^2 = 2 \frac{\lambda l}{d} \frac{p_1^2}{RT} \frac{w_1^2}{2g} \quad \text{oder}$$

$$4) \quad p_2 = p_1 \sqrt{1 - \frac{2\lambda l}{RT d} \frac{w_1^2}{2g}}.$$

Ist der Unterschied zwischen  $p_1$  und  $p_2$  gering, so kann man für den Wurzelausdruck die beiden ersten Glieder der binomischen Reihe setzen und erhält

$$p_2 = p_1 \left( 1 - \frac{\lambda}{RT} \frac{l}{d} \frac{w_1^2}{2g} \right);$$

dies stimmt, wenn  $\Delta p = p_1 - p_2$  gesetzt wird, mit Gl. 1 überein.

Streng genommen, müsste auch noch die zur Vergrößerung der Geschwindigkeit erforderliche Druckhöhe berücksichtigt werden. Dann erhält man, weil einem negativen  $dp$  eine negative Druckhöhe  $dz$  entspricht,

$$-dz = -v \cdot dp = \lambda \frac{dx}{d} \frac{w^2}{2g} + \frac{d(w^2)}{2g} \quad \text{oder wegen } w = w_1 \frac{p_1}{p}:$$

$$-dp = \frac{\lambda p}{RT} \frac{dx}{d} \frac{w_1^2}{2g} \frac{p_1^2}{p^2} - \frac{w_1^2}{g} p_1^2 \frac{dp}{p^3} \frac{p}{RT}, \quad \text{mithin}$$

$$-p dp = \frac{\lambda}{RT} \frac{p_1^2}{d} \frac{w_1^2}{2g} dx - \frac{w_1^2 p_1^2}{g RT} \frac{dp}{p} \quad \text{und}$$

$$p_1^2 - p_2^2 = 2\lambda \frac{l}{d} \frac{p_1^2}{RT} \frac{w_1^2}{2g} + 4 \frac{p_1^2}{RT} \frac{w_1^2}{2g} \ln \left( \frac{p_1}{p_2} \right). \quad \text{Hieraus}$$

$$5) \quad \frac{p_2^2}{p_1^2} = 1 - \frac{w_1^2}{2g} \frac{1}{RT_1} \left( 2\lambda \frac{l}{d} + 4 \ln \left( \frac{p_1}{p_2} \right) \right).$$

Der letzte Summand ist aber meist gegen den ersteren verschwindend klein; so wird bei den Werthen des Beispiels auf S. 346

$$\frac{p_1}{p_2} = \text{rund } \frac{60}{59} = 1,017, \quad \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = 0,017,$$

daher der Klammerausdruck in Gl. 5:

$$2 \cdot 0,018 \cdot \frac{1000}{0,25} + 4 \cdot 0,017 = 144 + 0,068.$$

Gl. 5 dürfte daher praktischen Werth kaum haben.

Gl. 4 liefert mit den Zahlen des Beispiels auf S. 346:

$$p_2 = 59070 \text{ statt } 59076 \text{ nach Gl. 1.}$$

Letztere genügt daher für die meisten Fälle.

## 9. Wirkung der Schornsteine.

Die Wirkung der Schornsteine beruht auf der Verminderung der Dichte der Luft oder der Gase durch Erwärmung. Am oberen Ende des Schornsteins (Fig. 352) habe die Aussenluft den Zustand  $p, v, T$ . In dem Raume  $ABCD$  sei durch Heizung oder dgl. die Temperatur auf den Mittelwerth  $T_1$  gebracht. Die Dichte  $\gamma = 1/v$  der äusseren Luft gelte auf die Schornsteinhöhe als überall gleich, dann ist ebenso im Schornsteine der Einheitsraum durchschnittlich  $v_1 = v \frac{T_1}{T}$ , der Druck der äusseren Luft in der Höhe  $AB$ :

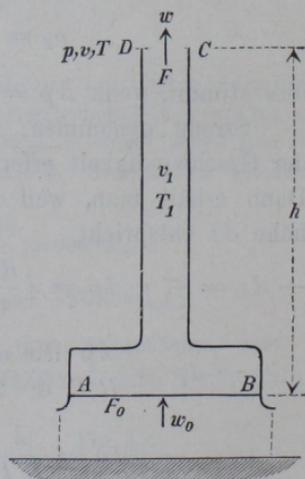
$$p + \frac{h}{v}.$$

Der Raum unterhalb  $AB$  stehe mit der äusseren Luft in freier Verbindung.

Bezeichnen wir wieder mit  $mg$  das Luftgewicht, welches in der Zeit  $dt$  durch jeden Querschnitt des Schornsteins geht, so ist

$$1) \quad mg = \frac{F_0 \cdot w_0 \cdot dt}{v_1} = \frac{F \cdot w \cdot dt}{v_1}.$$

Fig. 352.



Die Zunahme an Arbeitsvermögen während der Zeit  $dt$  beträgt (ähnlich wie auf S. 230)  $m \frac{w^2}{2} - m \frac{w_0^2}{2}$ , wovon  $w_0^2$  vernachlässigt werden kann. Die Arbeit der Schwere ist in diesem Falle negativ  $= -mgh$ , weil die Masse  $m$  unten verschwindet, oben aus dem Schornsteine tritt. Der Druck gegen  $AB$  leistet die Arbeit

$$\left(p + \frac{h}{v}\right) F_0 \cdot w_0 \cdot dt = \left(p + \frac{h}{v}\right) \cdot mg \cdot v_1,$$

der Druck gegen  $CD$  die Arbeit

$$-p \cdot F \cdot w \cdot dt = -p \cdot mg \cdot v_1. \quad \text{Daher ist}$$

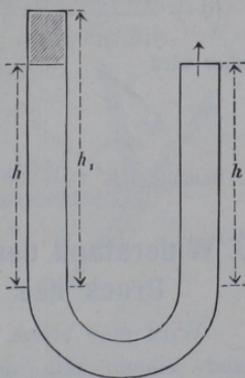
$$m \frac{w^2}{2} = -mg \cdot h + \left(p + \frac{h}{v}\right) mg \cdot v_1 - p mg \cdot v_1 \quad \text{oder}$$

$$2) \quad \frac{w^2}{2g} = h \left(\frac{v_1}{v} - 1\right) = h \left(\frac{T_1}{T} - 1\right).$$

Dies ist die wirksame Saughöhe des Schornsteins. Man kann sich von ihr leicht eine Vorstellung machen: Betrachtet man eine Luftsäule von der Temperatur  $T$  und der Höhe  $h$  und dehnt diese durch Erwärmung auf  $T_1$  der Höhe nach aus, so bekommt sie die Höhe  $h_1 = h \frac{T_1}{T}$  (Fig. 353). Es ist dann  $h_1 - h$  die wirksame Saughöhe.

Ist  $l$  die Länge des Schornsteins, so entsteht durch Reibung eine Widerstandshöhe  $\lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g}$ . Darin ist für gemauerte Röhren von kreisförmigem Querschnitte  $\lambda = 0,03$ , für berusste Schornsteinröhren aber  $\lambda = 0,04$  zu setzen. Ist der Schornstein oder der anschliessende Kanal nicht kreisförmig, so hat man zu bedenken, dass allgemein die Widerstandshöhe der Röhrenreibung  $\beta \frac{u}{F} l \frac{w^2}{2g}$  ist, wenn  $u$  der von der Flüssigkeit berührte Umfang,  $F$  die Fläche des Querschnitts. Für kreisförmige Röhren wurde  $\beta \frac{u}{F} = \frac{4\beta}{d} = \frac{\lambda}{d}$  gesetzt; es ist daher  $\beta = 1/4 \lambda$ ,

Fig. 353.



d. h.  $\beta = 0,0075$  für unberusstes Mauerwerk,  $\beta = 0,01$  für berusstes Mauerwerk.

Für Richtungsänderungen in den Feuerkanälen, die an den Schornstein anschliessen, gelten nach Rietschel\*) folgende Widerstandsziffern:

Für ein scharfes rechtwinkliges Knie:  $\zeta = 1,5$ ; für ein abgerundetes rechtwinkliges Knie:  $\zeta = 1,0$ ; für ein Knie von  $135^\circ$   $\sphericalangle$ :  $\zeta = 0,6$ ; für plötzliche Richtungsänderungen um  $180^\circ$ :  $\zeta = 1,5$  bis  $2,5$ .

Der Rost mit der Brennstoffschicht liefert eine bedeutende Widerstandsziffer  $\zeta = 6$  bis  $12$ , je nach der Art des Rostes und des Brennstoffes.

**Beispiel:** Ein cylindrischer Schornstein von kreisförmigem Querschnitte habe  $d = 0,6$  m Weite und  $h = 30$  m Höhe. An den Schornstein schliessen sich  $30$  m lange Feuerkanäle vom Querschnitt  $1$  m  $\times$   $0,3$  m, in denen zwei abgerundete Umbiegungen von  $180^\circ$  ( $\zeta = 1,5$ ) und ein scharfes rechtwinkliges Knie ( $\zeta = 1,5$ ) vorkommen. Die Widerstandsziffer des Rostes sei  $9$ . Die mittlere innere Temperatur betrage  $T_1 = 200 + 273 = 473$ , die äussere  $T = 10 + 273 = 283^\circ$ . Es soll die Ausströmungsgeschwindigkeit berechnet werden. Die wirksame Saughöhe beträgt

$$30 \left( \frac{473}{283} - 1 \right) = 20,14 \text{ m,}$$

die Widerstandshöhe mit  $\beta = 0,01$ :

$$\left( 9 + \frac{30 \cdot 0,01 \cdot 2(1 + 0,3)}{0,3} + 2 \cdot 1,5 + 1,5 + 0,04 \cdot \frac{30}{0,6} \right) \frac{w^2}{2g} = 18,1 \frac{w^2}{2g}.$$

Daher wird

$$20,14 = \frac{w^2}{2g} (1 + 18,1) \text{ und}$$

$$w = \sqrt{\frac{2g \cdot 20,14}{19,1}} = 4,5 \text{ m.}$$

Im Sommer mit  $T = 300^\circ$  wird  $w = 4,3$  m.

## 10. Widerstand der Luft gegen bewegte fremde Körper; Druck des Windes gegen fremde Körper.

Wird eine ebene, etwa kreisförmige Fläche  $AB$  mit niedrigem Rand einem mit der Geschwindigkeit  $w$  rechtwinklig dagegen strömenden Wind ausgesetzt (Fig. 354), so bildet sich, wie Ober-Ingenieur Friedr. Ritter von Loessl nach seinem Werk über „Die Luftwiderstands-Gesetze“ (Wien 1896) in überzeugender Weise durch Versuche gefunden hat, vor der Platte ein ruhender Luftkörper, der sog. Stauhügel  $ABC$ . Die Seitenflächen desselben bilden mit

\*) Vergl. G. Lang „Der Schornsteinbau“.

der Plattenebene an allen Stellen Winkel  $90^\circ - \beta$ . Der Stauhügel hat bei kreisförmiger Platte die Form eines Kegels, bei quadratischer Platte die Form einer Pyramide, bei rechteckiger Platte diejenige eines Walm-daches, kurz in allen Fällen diejenige Form, in welcher ein Sandkörper mit dem Böschungswinkel (Reibungswinkel)  $90^\circ - \beta$  auf der wagerecht liegenden Platte verbleiben würde, wenn Sand in Übermaß darauf geschüttet wird, bis er nach allen Seiten abfließt.

v. Loessl hat gefunden, dass der Winkel  $\beta = 45^\circ$  ist. Der Lufthügel bildet vor der Platte einen ruhenden Körper, an dessen Mantelfläche die bewegten Lufttheilchen elastisch abprallen. Nach der Lehre vom schiefen Stosse (s. S. 152) prallen die Lufttheilchen mit derselben Geschwindigkeit  $w$  zurück, mit der sie dagegen strömten, und in einer Richtung, die von der Rechtwinkligen zur Stauhügelfläche um den Winkel  $90^\circ - \beta$  abweicht. Für  $\beta = 45^\circ$  prallen die Lufttheilchen parallel zur Platte von dem Stauhügel ab.

Der Druck, der bei diesem Abprallen auf den Stauhügel ausgeübt wird, lässt sich nach dem Satze von der Bewegung des Schwerpunktes (1. Theil, S. 141) berechnen.

In einem Knierohre (Fig. 355) vom Querschnitte  $dF$ , dessen Schenkel in der Richtung der zuströmenden und abprallenden Lufttheilchen liegen, befindet sich eine Flüssigkeit, welche in der Röhre eine Länge  $l$  einnimmt, mit den Längen  $x$  und  $l - x$  auf die beiden Schenkel vertheilt. Bezeichnet man den rechtwinkligen Abstand des Schwerpunktes dieser Flüssigkeit von der Fläche  $AC$  mit  $y_0$ , so ist nach der Lehre vom Schwerpunkte

$$\begin{aligned} y_0 \cdot l &= x \cdot \frac{x}{2} \sin \beta + (l - x) \frac{l - x}{2} \sin \beta \\ &= \sin \beta \left( x^2 + \frac{l^2}{2} - lx \right). \end{aligned}$$

Fig. 354.

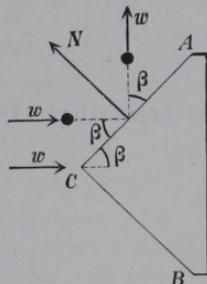
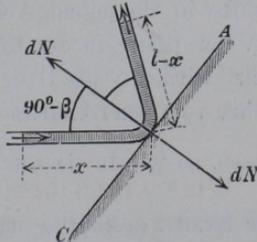


Fig. 355.



Die Differentiation dieser Gleichung ergibt

$$l \cdot dy_0 = \sin \beta (2x \cdot dx - l \cdot dx).$$

Schreitet aber die Flüssigkeit in der Röhre mit der Geschwindigkeit  $w$  fort, so ist  $w dt = - dx$ , mithin  $dx = - w \cdot dt$ , also

$$l \cdot \frac{dy_0}{dt} = - \sin \beta (2xw - lw);$$

aus nochmaliger Differentiation folgt

$$l \cdot \frac{d^2 y_0}{dt^2} = 2 \sin \beta \cdot w^2 \quad \text{und}$$

$$\frac{\gamma}{g} dF \cdot l \cdot \frac{d^2 y_0}{dt^2} = 2 \frac{\gamma}{g} dF \sin \beta \cdot w^2.$$

Bezeichnet man die in jeder Sekunde durch einen Röhrenquerschnitt strömende Flüssigkeits-Masse  $\frac{\gamma}{g} dF \cdot w$  mit  $m$ , so wird

$$1) \quad \frac{\gamma}{g} dF \cdot l \cdot \frac{d^2 y_0}{dt^2} = 2 m \sin \beta \cdot w.$$

Die linke Seite der Gl. 1 enthält die Masse der gesammten betrachteten Flüssigkeit, multiplicirt mit der Seitenbeschleunigung ihres Schwerpunktes in der Richtung rechtwinklig zur Fläche  $AC$ . Dies ist (nach 1. Theil, S. 142) gleich der Summe aller äusseren Kräfte in derselben Achsenrichtung, d. h. gleich dem Widerstande  $dN$  der Röhre in der Richtung rechtwinklig zur Fläche  $AC$ . Umgekehrt wird  $dN$  als Druck auf die Fläche  $AC$  übertragen. Würde die Röhre vom Querschnitte  $dF$  sich geradlinig durch die Fläche  $AC$  fortsetzen, so würde sie aus der Fläche ein Stück  $\frac{dF}{\sin \beta}$  heraus schneiden.

Die Kraft  $2 m \sin \beta \cdot w$  nach Gl. 1, welche auf die Fläche  $\frac{dF}{\sin \beta}$  kommt, erzeugt einen Druck für die Flächeneinheit

$$2) \quad p = \frac{2 m \sin^2 \beta \cdot w}{dF} = 2 \frac{\gamma}{g} w^2 \sin^2 \beta.$$

Dieser Druck herrscht an allen Stellen des in Ruhe befindlichen Stauhügels; mithin überträgt der Stauhügel auf die Platte von der Grösse  $F$  (Fig. 356) eine Druckkraft

$$3) \quad D = 2 \frac{\gamma}{g} \sin^2 \beta \cdot w^2 \cdot F.$$

Weil nun für den vorliegenden Fall  $\beta = 45^\circ$  gefunden wurde, so ist  $\sin^2 \beta = 1/2$  und

$$4) \quad D = \frac{\gamma}{g} F w^2.$$

Diese Formel hat v. Loessl bei seinen Versuchen bestätigt gefunden für ebene Platten, die mit einem erhöhten Rande umgeben sind, sowie auch für gekrümmte Flächen, z. B. halbe Hohlkugeln, deren hohle Seite dem Winde zugekehrt ist. Gl. 4 gibt den grössten möglichen Winddruck auf eine Fläche, welche, in der Richtung des Windes rechtwinklig projiziert, eine Projektion  $F$  hat.

Für eine ebene Kreisfläche ohne Rand ergab sich

$$5) \quad D = 0,83 \frac{\gamma}{g} F w^2;$$

für eine ebene quadratische Fläche ohne Rand

$$6) \quad D = 0,86 \frac{\gamma}{g} F w^2;$$

für eine ebene Rechteckfläche ohne Rand, vom Seitenverhältnisse 2 : 1:

$$7) \quad D = 0,92 \frac{\gamma}{g} F w^2;$$

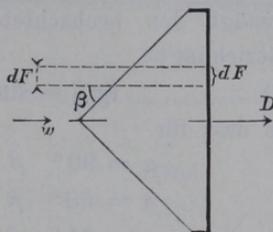
desgl. beim Seitenverhältnisse 4 : 1:

$$8) \quad D = 0,94 \frac{\gamma}{g} F w^2.$$

Eine Druckverminderung oder eine Saugwirkung an der Rückseite der Fläche hat sich nicht ergeben. Wird der Winddruck von der Grundfläche  $F$  eines geraden, nicht sehr langen, prismatischen Körpers anstatt einer Platte  $F$  aufgenommen, so gelten für den Druck ebenfalls die Formeln 5—8.

**Druck gegen schief gestellte Flächen.** Bildet die Platte mit der Windrichtung den Winkel  $\alpha$ , so entsteht nach v. Loessl's Versuchen ebenfalls ein Stauhügel, dessen Neigungswinkel  $\beta$  gegen die Windrichtung nun aber nicht in allen Fällen gleich ist, sondern von  $\alpha$  abhängt. Es hat sich gezeigt, dass bei einer bestimmten

Fig. 356.



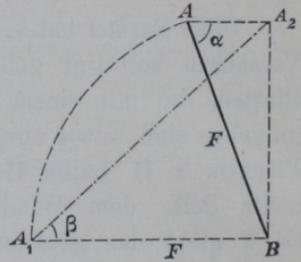
Neigung  $\alpha$  der Platte die Neigung  $\beta$  der Seitenflächen des Stauhügels gegen die Windrichtung ringsum dieselbe ist (Fig. 358), dass  $\beta$  mit  $\alpha$  zu- und abnimmt, u. zw. genügt den beobachteten Werthen die Beziehung:

$$9) \quad \operatorname{tg} \beta = \sin \alpha,$$

so dass für

$$\begin{aligned} \alpha &= 90^\circ & \beta &= 45^\circ \\ \alpha &= 60^\circ & \beta &= 41^\circ \\ \alpha &= 35^\circ & \beta &= 30^\circ \\ \alpha &= 30^\circ & \beta &= 26\frac{1}{2}^\circ \\ \alpha &= 0^\circ & \beta &= 0^\circ \end{aligned}$$

Fig. 357.



wird. Nach Fig. 357 ist  $\beta$  leicht zu konstruiren.

Ist nun  $F$  die Grösse der schief gestellten Fläche, so ist ihre Projektion in der Richtung des Windes  $F \sin \alpha$ . Wendet man daher auf diesen Fall die vorstehende Entwicklung sinngemäss an, so ergibt sich für den Druck  $p$  im Stauhügel (Fig. 358) wiederum der Werth der Gl. 2:

$$10) \quad p = 2 \frac{\gamma}{g} w^2 \sin^2 \beta;$$

daraus entsteht für die Platte  $F$  die rechtwinklige Druckkraft

$$11) \quad N = 2 \frac{\gamma}{g} F w^2 \sin^2 \beta.$$

$$\text{Da nun} \quad \sin^2 \beta = \operatorname{tg}^2 \beta \cos^2 \beta = \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta},$$

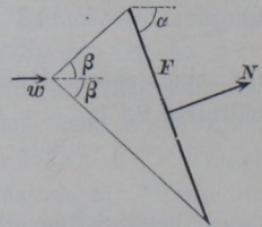
so wird mit  $\operatorname{tg} \beta = \sin \alpha$  nach Gl. 9:

$$12) \quad N = 2 \frac{\gamma}{g} \frac{F w^2 \sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}.$$

v. Loessl entwickelt freilich in anderer Weise  $\sin \alpha$  statt  $2 \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}$  und schreibt einfach

$$13) \quad N = \frac{\gamma}{g} F w^2 \sin \alpha.$$

Fig. 358.



Für verschiedene Werthe von  $\alpha$  liefern die Formeln 12 und 13 folgende Ergebnisse:

	$\frac{2 \sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}$	$\sin \alpha$
$\alpha = 90^\circ$	1	1
$\alpha = 60^\circ$	0,857	0,866
$\alpha = 45^\circ$	0,667	0,707
$\alpha = 35^\circ$	0,494	0,574
$\alpha = 30^\circ$	0,4	0,5
$\alpha = 20^\circ$	0,210	0,342
$\alpha = 10^\circ$	0,059	0,174
$\alpha = 0^\circ$	0	0

Die Unterschiede sind hiernach nur erheblich bei kleinem Winkel  $\alpha$ ; wir empfehlen daher ohne Bedenken die einfachere Formel 11 von v. Loessl.

Der Winddruck gegen einen Schornstein oder Pfeiler, dessen Grundriss ein Quadrat von der Seite  $a$  und dessen Höhe  $h$  ist,

Fig. 359.

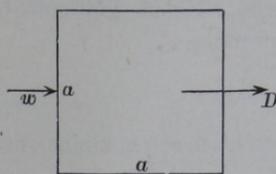
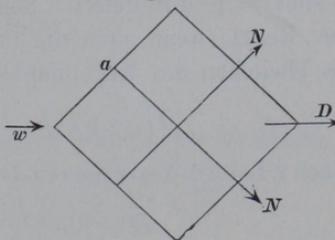


Fig. 360.



beträgt daher, wenn der Wind die eine Seitenfläche rechtwinklig trifft (Fig. 359):  $D = \frac{\gamma}{g} a h w^2$ , und wenn er in der Richtung der Diagonale weht (Fig. 360):

$$D = N\sqrt{2} = \frac{\gamma}{g} a h w^2 0,707 \cdot \sqrt{2} = \frac{\gamma}{g} a h w^2,$$

ist also derselbe wie im ersten Falle, denn jede der beiden getroffenen Seitenflächen  $a \cdot h$  bekommt einen nach Gl. 13 zu bestimmenden Normaldruck  $N$ , und beide  $N$  geben die Mittelkraft  $D$ .

**Druck gegen eine kegelförmige Fläche.** Weht der Wind in der Achsenrichtung des Kegels gegen dessen Spitze und ist  $\alpha$  der Winkel der Kegelseiten gegen die Achse (Fig. 361), so bildet sich vor dem Kegel ebenfalls ein Staukegel mit dem halben Winkel an der Spitze  $= \beta$ . Der Druck in diesem Staukegel wird dann wie auf S. 352 gefunden zu

$$p = 2 \frac{\gamma}{g} w^2 \sin^2 \beta.$$

Die Vergleichung der Gl. 11 und 13 führt zu  $2 \sin^2 \beta = \sin \alpha$ , so dass für ebene Flächen

$$14) \quad p = \frac{\gamma}{g} w^2 \sin \alpha$$

wird. Ist nun  $F$  die Grundfläche des Kegels, so entspricht einem Theilchen  $\frac{dF}{\sin \alpha}$  der Mantelfläche eine Projektion  $dF$  in der Grundfläche. Auf die Mantelfläche  $\frac{dF}{\sin \alpha}$  kommt dann ein Normaldruck  $dN = p \cdot \frac{dF}{\sin \alpha}$ , der in der Windrichtung die Seitenkraft  $dD = dN \sin \alpha = p \cdot dF$  liefert. Sonach ist der gesammte Winddruck auf den Kegel, wenn man die für ebene Flächen geltende Gl. 14 auf die Theilchen des Kegelmantels anwendet,

$$15) \quad D = pF = \frac{\gamma}{g} \cdot F w^2 \sin \alpha.$$

Nach v. Loessl's Versuchen ist  $D$  thatsächlich etwas kleiner, nämlich

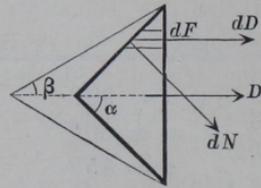
$$16) \quad D = 0.83 \frac{\gamma}{g} \cdot F w^2 \sin \alpha.$$

Diese Formel gilt auch für ein cylindrisches Geschoss mit kegelförmiger Zuspitzung.

Freilich führt die obige Annahme  $2 \sin^2 \beta = \sin \alpha$  für  $\alpha < 30^\circ$  zu dem widersinnigen Ergebnisse  $\beta > \alpha$ .

**Druck gegen eine Cylinderfläche.** Für diesen Fall hat v. Loessl die Form des Stauhügels nicht untersucht. Da aber aus der Neigung  $\beta$  der Seitenfläche des Stauhügels gegen die Windrichtung der Druck im Stauhügel zu  $p = 2 \frac{\gamma}{g} w^2 \sin^2 \beta$  folgt und p

Fig. 361.



an allen Stellen des Hügels den gleichen Werth haben muss, so muss auch die Neigung der Oberfläche des Stauhügels gegen die Windrichtung an allen Stellen die gleiche sein.

Denkt man sich den Cylinder von der Höhe  $h$  mit lothrechter Achse, so stellt sich im Grundrisse der Stauhügel nach Fig. 362 vor den Cylinder; derjenige Theil der Mantelfläche des Cylinders, gegen welche der Stauhügel drückt, hat dann in der Windrichtung eine rechtwinkliche Projektion, welche annähernd (mit Vernachlässigung der an den Grundflächen des

Cylinders entstehenden Unregelmässigkeit) gleich  $F_x = AB \cdot h = 2 \rho \cdot h = 2 r \cos \beta \cdot h = F \cdot \cos \beta$  gesetzt werden kann, wenn  $F = 2 r \cdot h$  den Achsenschnitt des Cylinders bezeichnet. Es wird dann die Druckkraft in der Windrichtung (nach S. 356)

$$D = p \cdot F_x = 2 \frac{\gamma}{g} w^2 \sin^2 \beta F \cos \beta.$$

Die Grösse dieser Kraft hat v. Loessl zu

$$17) \quad D = \frac{2}{3} \frac{\gamma}{g} w^2 F$$

gefunden (vgl. S. 330 für den Druck strömenden Wassers), so dass

$$2 \frac{\gamma}{g} w^2 \sin^2 \beta \cos \beta = \frac{2}{3} \frac{\gamma}{g} w^2 \text{ oder} \\ \sin^2 \beta \cos \beta = 1/3$$

sein muss. Dieser Gleichung entspricht rund.

$$18) \quad \beta = 45^\circ,$$

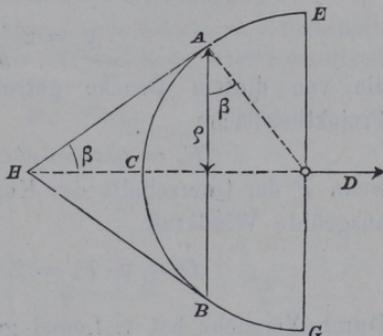
weil für diesen Winkel

$$\sin^2 \beta \cos \beta = 1/2 \cdot 0,707 = 0,3535$$

ist, was von  $1/3$  nur wenig abweicht.

Die Seitenflächen  $AE$  und  $BG$ , die von dem Winde unmittelbar getroffen werden, liefern zu  $D$  einen so geringen Beitrag, dass er vernachlässigt werden kann.

Fig. 362.



Ein Halbcylinder wird, mit der krummen Fläche dem Winde entgegengestellt, nur etwa  $\frac{2}{3}$  so viel Druckkraft erfahren, als wenn er mit der ebenen Fläche dem Winde rechtwinklig zugekehrt ist.

**Druck gegen eine Kugelfläche.** In diesem Falle bildet sich an der Kugel ein Staukegel (Fig. 362) mit dem Drucke

$$p = 2 \frac{\gamma}{g} w^2 \sin^2 \beta;$$

die von diesem Drucke getroffene Kugelhaube  $ACB$  hat die Projektionsfläche

$$F_x = \varrho^2 \pi = r^2 \cos^2 \beta \pi = F \cdot \cos^2 \beta,$$

wenn  $F$  der Querschnitt der Kugel. Daher wird die auf die Kugel ausgeübte Windkraft

$$D = p \cdot F_x = 2 \frac{\gamma}{g} F w^2 \sin^2 \beta \cdot \cos^2 \beta.$$

Durch Versuche hat v. Loessl gefunden

$$19) \quad D = \frac{1}{3} \frac{\gamma}{g} F w^2, \text{ so dass}$$

$$\sin^2 \beta \cos^2 \beta = \frac{1}{6}, \text{ also } \sin 2\beta = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

sein muss. Dies giebt  $\beta = 27^\circ 22'$ . Die Schlankheit dieses Kegels ist überraschend;  $\beta = 45^\circ$  würde  $D = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} F w^2$  liefern wie bei strömendem Wasser (S. 330). Eine Halbkugel erfährt, mit der gewölbten Fläche dem Wind entgegengestellt, nur etwa  $\frac{1}{3}$  so viel Windkraft, als wenn sie mit der ebenen (oder auch hohlen) Fläche dem Winde rechtwinklig zugekehrt ist. Dieselbe Windkraft wie eine Kugel vom Halbmesser  $r$  liefert nach Gl. 16 ein Kegel vom Halbmesser  $r$ , dessen Winkel  $\alpha = 23^\circ 41'$  ist.

**Beispiel 1:** Für eine ebene, dem Winde rechtwinklig entgegenstehende Platte von der Fläche  $F = 1 \text{ qm}$  wird nach Gl. 4, S. 353 der Winddruck  $p = \frac{\gamma}{g} w^2$ . Bei  $10^\circ \text{ C}$ . ist  $\gamma = 1,29 \cdot \frac{273}{283} = 1,24$ ,  $\frac{\gamma}{g} = 0,127$ , also rund

$$p = 0,13 \cdot w^2.$$

Bei verschiedenen Windgeschwindigkeiten wird dann  $p$  folgendermassen:

$w = 1 \text{ m}$ , kaum merkbar,	$p = 0,13 \text{ kg/qm}$ ,
$w = 2 \text{ m}$ , gelinder Wind,	$p = 0,52$ ,
$w = 15 \text{ m}$ , Sturm,	$p = 29 \text{ kg}$ ,
$w = 36 \text{ m}$ , Orkan,	$p = 168$ ,
$w = 50 \text{ m}$ , stärkster Orkan,	$p = 325$ .

Bei der Berechnung der Standsicherheit von Bauwerken kommt in Frage, welchen Windstärken das fragliche Bauwerk wahrscheinlich ausgesetzt sein wird. Als Mittelwerth kann für Mitteleuropa

$$p = \frac{\gamma}{g} \cdot 39,3^2 = 200 \text{ kg/qm}$$

angenommen werden, in der Nähe der Meeresküste bis  $325 \text{ kg/qm}$ .

**Beispiel 2:** Wie hoch darf eine hölzerne Säule von  $r = 0,3 \text{ m}$  Halbmesser sein, damit sie bei einem Winddrucke  $p = 200 \text{ kg/qm}$  an der Grenze der Standsicherheit sei (Fig. 363). Es ist

$$F = 2 r \cdot h = 0,6 \cdot h,$$

die Windkraft

$$D = \frac{2}{3} \cdot 200 \cdot 0,6 h,$$

das Gewicht der Säule bei einer Dichte  $\gamma_1 = 750$ :

$$G = 0,3^2 \pi \cdot h \cdot 750.$$

Für den Grenzzustand der Ruhe ist (nach 1. Theil, S. 167)

$$D \cdot \frac{h}{2} = G \cdot 0,3, \text{ also}$$

$$h = \frac{0,6 G}{D} = 1,575 \text{ m.}$$

Fig. 362.

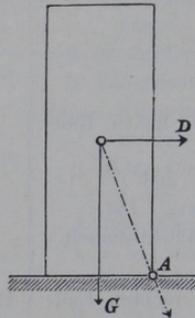
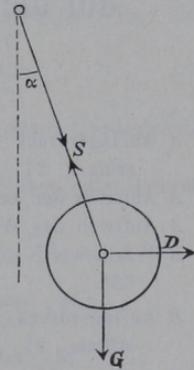


Fig. 364.



**Beispiel 3:** Eine Holzkugel vom Halbmesser  $r = 0,2 \text{ m}$  und der Dichte  $\gamma_1 = 750$  sei an einem Faden aufgehängt (Fig. 364). Bei welcher Neigung  $\alpha$  des Fadens gegen die Lothrechte wird Gleichgewicht herrschen, wenn die Kugel ausser ihrem Gewicht einen Winddruck  $p = 200 \text{ kg/qm}$  erfährt?

Es ist

$$D = \frac{1}{3} \cdot 200 \cdot 0,2^2 \pi, \quad G = 750 \cdot \frac{4}{3} \cdot 0,2^3 \pi \quad \text{und} \quad \text{tg } \alpha = \frac{D}{G} = \frac{1}{3}.$$

