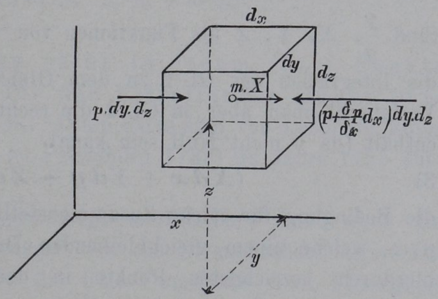
6. Allgemeine Gleichgewichts-Bedingung für Flüssigkeiten, von L. Euler.

Auf ein Massentheilchen $m = \frac{\gamma}{g} dx \cdot dy \cdot dz$ wirke eine Massenkraft, welche in der Form $R \cdot m$ geschrieben und dadurch schon als eine Massenkraft gekennzeichnet wird; R ist die Beschleunigung, welche das Theilchen durch die Kraft erfahren würde. Der Druck betrage an der Stelle x, y, z, wo das Theilchen sich befindet, p; dann ist

Fig. 249.



1) $p = f(x, y, z)$,

da der Druck in der Flüssigkeit im Allgemeinen von Punkt zu Punkt wechseln wird.

Die Beschleunigung R der Massenkraft werde nach den Achsenrichtungen in X, Y, Z zerlegt; dann wirkt auf das Theilchen in der x-Richtung die Massenkraft $X \cdot m$. An der linken Seitenfläche von der Grösse $dy \cdot dz$ wirkt die Oberflächenkraft $p \cdot dy \cdot dz$ (Fig. 249). Beim Übergange von der linken nach der rechten Seitenfläche ändert sich x um dx, während y und z dieselben bleiben; somit wächst auch der Druck um das partielle Differential $\frac{\delta p}{\delta x} dx$. Das Gleichgewicht des Theilchens verlangt daher in der x-Richtung:

$$X \cdot m = \frac{\delta p}{\delta x} dx \cdot dy \cdot dz \quad \text{oder}$$

$$X \frac{\gamma}{g} dx \cdot dy \cdot dz = \frac{\delta p}{\delta x} dx \cdot dy \cdot dz, \quad \text{mithin}$$

$$\frac{\gamma}{g} X dx = \frac{\delta p}{\delta x} dx.$$

In gleicher Weise gilt für die anderen Achsenrichtungen

$$\frac{\gamma}{g} Y dy = \frac{\delta p}{\delta y} dy,$$

$$\frac{\gamma}{g} Z dz = \frac{\delta p}{\delta z} dz.$$

Durch Zusammenzählen der 3 Gleichungen entsteht auf der rechten Seite das vollständige Differential dp des Druckes, nämlich

2) $$\frac{\gamma}{g}(\boldsymbol{X dx + Y dy + Z dz}) = \boldsymbol{dp}.$$

Sind $\frac{\gamma}{g}$, X, Y, Z als Funktionen von x, y, z gegeben, so führt die Integration der Gl. 2 zu dem Gleichgewichtsdrucke p (Gl. 1). Vertauscht man aber in Gl. 2 die rechte Seite dp mit Null, so enthält (da γ nicht Null sein kann)

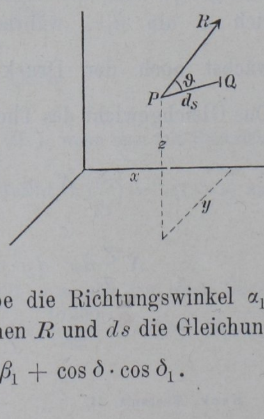
3) $$(\boldsymbol{X dx + Y dy + Z dz}) = 0$$

die Bedingung für solche Zusammenstellungen der Koordinaten x, y, z, welche einem gleichbleibenden Drucke p entsprechen. Die hierdurch bezeichneten Punkte in der Flüssigkeit bilden eine Fläche überall gleichen Druckes, oder eine **Niveaufläche,** deren Gleichung durch Integration von Gl. 3 erhalten und

4) $$f(x, y, z) = \text{Const.}$$

geschrieben werden kann. Die Funktion hat dieselbe Form wie in Gl. 1. Jedem anderen Werthe der Const. entspricht eine andere Niveaufläche mit einem anderen Drucke.

Fig. 250.



Die Niveauflächen stehen in einer einfachen Beziehung zur Richtung der Massenkraft $R \cdot m$. An einem Punkte P innerhalb einer im Gleichgewichte befindlichen Flüssigkeit (Fig. 250) bilde R mit den Achsen die Richtungswinkel α, β, δ. PQ sei ein beliebiges Kurventheilchen ds, welches in einer durch P gelegten Niveaufläche liegen soll; ds habe die Richtungswinkel α_1, β_1, δ_1. Dann gilt für den Winkel ϑ zwischen R und ds die Gleichung

$$\cos\vartheta = \cos\alpha \cdot \cos\alpha_1 + \cos\beta \cdot \cos\beta_1 + \cos\delta \cdot \cos\delta_1.$$

Nun sind X, Y, Z die Projektionen von R; dx, dy, dz diejenigen von ds auf die 3 Achsen, mithin ist

$$R \cos \alpha = X; \quad R \cos \beta = Y; \quad R \cos \delta = Z;$$

$$ds \cos \alpha_1 = dx; \quad ds \cos \beta_1 = dy; \quad ds \cos \delta_1 = dz.$$

Daher wird

$$R\, ds \cos \vartheta = X dx + Y dy + Z dz.$$

Weil nun für Kurventheilchen innerhalb einer Niveaufläche die Gl. 3 gilt, so muss

5) $$R\, ds \cos \vartheta = 0, \quad \text{d. h. } \vartheta = 90^0$$

sein. Oder:

Eine Niveaufläche steht in jedem ihrer Punkte rechtwinklig zu der für den betreffenden Punkt gültigen Massenkraft $R \cdot m$. Diese Sätze sind von Leonhard Euler (geb. zu Basel 1707, gest. zu Petersburg 1783) im Jahre 1755 entwickelt worden.

Aus vorstehendem Satze folgt unmittelbar, dass, wenn die Schwere die einzige Massenkraft ist, die Niveauflächen wagerechte Ebenen sind (S. 168). Da die freie Oberfläche einer Flüssigkeit ebenfalls eine Niveaufläche sein muss, so finden auch die Entwickelungen über die Gestalt der freien Oberfläche (S. 194 und 196) hier noch eine festere Begründung.

B. Bewegung flüssiger Körper.

I. Ausfluss des Wassers aus Gefässen.

Wird in der Seitenwand eines mit Wasser gefüllten Gefässes (Fig. 251) bei A eine kleine Öffnung frei gemacht, so entsteht ein ausfliessender Wasserstrahl. Die einzelnen Wassertheilchen führen eine parabolische Wurfbewegung aus (Theil 1, S. 49). Ist w die wagerechte Geschwindigkeit, mit der ein Wassertheilchen bei A