$$\gamma_2 = \frac{p_2}{R T_2}, \quad \gamma_2' = \frac{p_2}{R' T_2}, \quad \text{daher}$$

$$\gamma_2 - \gamma_2' = (\gamma_1 - \gamma_1') \frac{p_2}{p_1} \frac{T_1}{T_2}, \quad \text{und}$$

$$V(\gamma_2 - \gamma_2') = V(\gamma_1 - \gamma_1') \frac{p_2}{p_1} \frac{T_1}{T_2} = Q;$$

daraus
$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V(\gamma_1 - \gamma_1')}{Q} \frac{T_1}{T_2}.$$

Setzt man diesen Werth in Gl. 4 (S. 212) ein, so entsteht

$$l\left(\frac{V(\gamma_1 - \gamma_1')}{Q} \frac{T_1}{T_2}\right) = \frac{1}{R\tau} \, l\left(\frac{T_1}{T_2}\right).$$

Daraus folgt
$$\log \frac{V(\gamma_1 - \gamma_1')}{Q} = \log\left(\frac{T_1}{T_2}\right)\left(\frac{1}{R\tau} - 1\right) \quad \text{oder}$$

10)
$$\log\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{R\tau} - 1} \log\left(\frac{V(\gamma_1 - \gamma_1')}{Q}\right).$$

Hierdurch ist das Verhältnis der Temperaturen unten und an der Grenze der Steighöhe bestimmt. Kennt man nun die Temperaturabnahme τ auf 1 m Höhe, so ist

11)
$$h = \frac{T_1 - T_2}{\tau}$$

Ist nach S. 208 $V = 700$, $\gamma_1 = 1{,}29$, $\gamma_1' = 0{,}45$, $V(\gamma_1 - \gamma_1') = 588$, $Q = 500$ und nimmt man auf 100 m eine Abnahme der Temperatur um $0{,}5^0$, d. h. $\tau = 0{,}005$, $R = 29{,}37$ an, so wird

$$\log\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = \frac{1}{\frac{200}{29{,}37} - 1} \log 1{,}176 \quad \text{und} \quad T_2 = 0{,}972 \, T_1.$$

Beträgt nun die Temperatur unten $T_1 = 283$, so wird hiernach $T_2 = 275{,}1$, $T_1 - T_2 = 7{,}9^0$, mithin

$$h = 7{,}9 \cdot 200 = 1580 \text{ m}.$$

Eine etwas unrichtige Schätzung von τ beeinflusst das Ergebuis nicht sehr, weil τ sowohl in Gl. 10, als auch in Gl. 11 vorkommt. Mit $\tau = 0{,}006$ wird z. B. $h = 1608$ m, also wenig verschieden. — Zur Erleichterung derartiger Rechnungen dienen Jordan's Barometrische Höhentafeln. (Hannover 1896. Helwing).

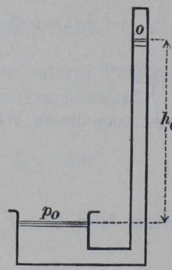
4. Gleichgewicht zwischen tropfbaren und gasförmigen Flüssigkeiten.

a) Barometer. Druckmesser.

Die Atmosphäre übt in der Höhe des Meeresspiegels einen Druck $p_0 = 10\,333$ kg/qm aus, also auch auf die Oberfläche einer ruhenden Flüssigkeit. Dieser Druck p_0 kann durch das Gewicht einer Flüssigkeitssäule von der Höhe $h_0 = p_0 : \gamma$ ersetzt werden, worin γ die Dichte der Flüssigkeit ist. Für Wasser ist $\gamma = 1000$, daher

$$h_0 = 10{,}333^{\text{m}};$$

Fig. 238.



d. h. eine Wassersäule von 10,333 m Höhe drückt durch ihr Gewicht ebenso stark wie die Atmosphäre.

Wird in dem rechtsseitigen, oben geschlossenen Rohre (Fig. 238) der Wasserspiegel um h_0 erhöht und die darüber befindliche Luft entfernt, so wird Gleichgewicht in der Flüssigkeit herrschen, dem Atmosphärendrucke p_0 links wird durch die Flüssigkeitssäule h_0 das Gleichgewicht gehalten. Besteht die Flüssigkeit aus Quecksilber mit $\gamma = 13\,600$, so wird

$$h_0 = \frac{10\,333}{13\,600} = 0{,}76^{\text{m}} \text{ bei } 0^0 \text{ C.}$$

Der mittlere Atmosphärendruck am Meeresspiegel entspricht also einer Quecksilbersäule von 760 mm. Jede Änderung des Luftdruckes giebt sich durch Änderung von h_0 zu erkennen. Darauf beruht das **Barometer** (von *βαρύς*, schwer).

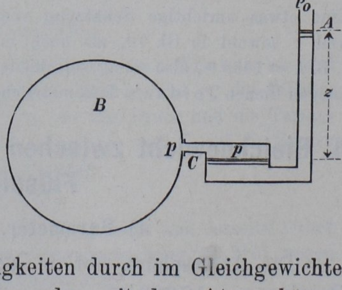
Die im Maschinenwesen eingeführte Atmosphäre von 10 000 kg/qm entspricht $10\,000 : 13\,600 = 0{,}735^{\text{m}} = 735^{\text{mm}}$ Quecksilbersäule.

An der Wettersäule zu Hannover, welche 57 m über dem Meere liegt, ist bei überall gleicher Temperatur von 10° C. der Druck p_2 nach Gl. 7 (S. 212) zu berechnen. Setzt man darin $h = 57$, $T = 283$, $p_1 = 760$, so wird

$$\log p_2 = \log 760 - \frac{57}{67{,}63 \cdot 283}$$

und daraus $p_2 = 754{,}8^{\text{mm}}$.

Fig. 239.



Druckmesser (Manometer, von *μανός*, dünn). Wie man den Atmosphärendruck durch eine Flüssigkeitssäule misst, so kann man auch die Pressungen anderer (tropfbarer oder gasförmiger) Flüssigkeiten durch im Gleichgewichte befindliche Flüssigkeitssäulen messen oder mit dem **Atmosphärendrucke** vergleichen.

Soll der Druck p des in dem Behälter B (Fig. 239) befindlichen Dampfes oder Gases gemessen werden, so verbindet man mit dem Behälter einen oben bei A offenen Druckmesser. Dann wirkt bei A der Atmosphärendruck p_0, und bei C, in einer Tiefe z unter dem Flüssigkeitsspiegel bei A, ist der Druck

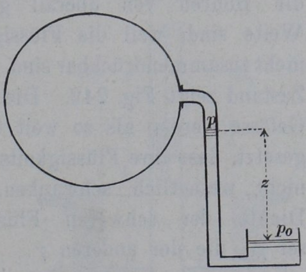
$$p = p_0 + \gamma z,$$

wenn γ die Dichte der Messflüssigkeit ist. Setzt man noch $p_0 = \gamma h_0$, so kommt

$$1) \qquad p - p_0 = \gamma z \quad \text{oder} \quad \frac{p - p_0}{p_0} = \frac{z}{h_0}.$$

Nun ist $p - p_0$ der Überdruck im Behälter B gegen die Atmosphäre und $(p - p_0) : p_0$ der in Atmosphären ausgedrückte Überdruck. Jede Atmosphäre Überdruck ($10000^{\mathrm{kg}}/_{\mathrm{qm}}$) entspricht einer Quecksilbersäule von 735^{mm}; zum Messen von 10 Atmosphären ist daher eine Säule von $7{,}35^{\mathrm{m}}$ erforderlich. Derartige Druckmesser eignen sich deshalb nicht für bewegliche, sondern nur für feststehende Dampfkessel. Bei ersteren benutzt man Federmanometer, die den Druck aus der elastischen Formänderung einer Gefässwand erkennen lassen. Die Theilung solcher Federmanometer lässt sich aber nicht berechnen, sondern muss vielmehr durch Vergleichung mit einem offenen Quecksilber-Druckmesser gefunden werden. Das Quecksilber befindet sich in einer Eisenröhre; ein auf ihm schwimmendes Eisenstück ist durch eine über eine Rolle laufende Schnur mit einem in bequemer Höhe befindlichen Zeiger verbunden, so dass man Hebung und Senkung des Quecksilberspiegels aus der Bewegung des Zeigers zu erkennen vermag.

Fig. 240.



Für geringen Überdruck, wie er z. B. in den Röhren für Leuchtgas herrscht, benutzt man Wasser als Messflüssigkeit und drückt auch den Überdruck nicht in $^{\mathrm{at}}$, sondern in $^{\mathrm{mm}}$ Wassersäule aus; 1^{mm} Wassersäule ist gleichbedeutend mit $\frac{1}{10000}$ Atmosphäre, da 1^{at} mit 10^{m} Wassersäule gleichbedeutend ist; 25^{mm} Wassersäule bedeutet daher $\frac{1}{400}{}^{\mathrm{at}}$.

Zum Messen von Drücken in Kondensatoren, Feuerzügen, Schornsteinen u. dgl., welche kleiner sind als der Atmosphärendruck, dienen **Minderdruck-Messer** (Vakuummeter) (Fig. 240). Es ist

$$p + \gamma z = p_0, \quad \text{oder}$$

$$p_0 - p = \gamma z \quad \text{und}$$

$$\frac{p_0 - p}{p_0} = \frac{z}{h_0};$$

letzteres ist der Minderdruck in Atmosphären.

Zusammengesetzter Druckmesser geringerer Höhe. Die mehrfach auf und nieder gebogenen Röhren (Fig. 241) sind im unteren Theile (unter AB) mit Quecksilber, im oberen Theile mit einer leichteren Flüssigkeit, etwa Wasser oder Glycerin, gefüllt. Bei gleichen Drücken in beiden oberen Gefässen steht das Quecksilber in allen Röhren bis zu der Wagerechten AB. Wächst der Druck auf der linken Seite von p_0 auf p, während rechts der Atmosphärendruck p_0 wirksam bleibt, so senkt sich bei B das Quecksilber um z, steigt bei C und bei A, sinkt bei D um das gleiche Maſs z, wenn die Röhren von überall gleicher Weite sind, weil die Flüssigkeiten nicht zusammendrückbar sind. Diesen Zustand zeigt Fig. 242. Die oberen Gefässe werden als so weit vorausgesetzt, dass ihre Flüssigkeitsspiegel nicht wesentlich schwanken. Die Dichte der schweren Flüssigkeit sei γ_1, die der anderen γ.

Fig. 241.

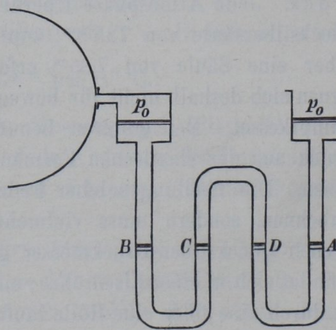
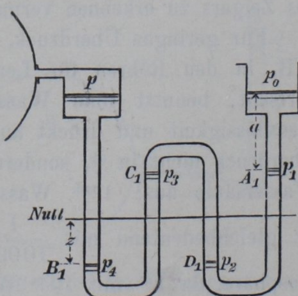


Fig. 242.



Bei A_1 ist der Druck $p_1 = p_0 + \gamma a$, bei D_1 der Druck $p_2 = p_0 + \gamma a + 2\gamma_1 z$, bei C_1 der Druck $p_3 = p_2 - 2\gamma z = p_0 + \gamma a + 2(\gamma_1 - \gamma) z$, bei B_1 der Druck

$p_4 = p_3 + 2\gamma_1 z$, im oberen, linksseitigen Gefässe der Druck $p = p_4 - \gamma(a + 2z) = p_0 + 4(\gamma_1 - \gamma)z$; mithin ist der Überdruck in ^{at}:

$$\frac{p - p_0}{p_0} = \frac{4(\gamma_1 - \gamma)z}{\gamma_1 h_0} = 4\left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_1}\right)\frac{z}{h_0},$$

wenn h_0 die Atmosphärenhöhe für die Flüssigkeit der grösseren Dichte γ_1 ist. Man erkennt leicht, dass, wenn $2n$ Röhren statt 4 in entsprechender Weise hinter einander geschaltet sind,

$$\frac{p - p_0}{p_0} = 2n\left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_1}\right)\frac{z}{h_0} \quad \text{wird.}$$

Für $\gamma_1 = 13600$ (Quecksilber), $\gamma = 1000$ (Wasser), $h_0 = 735^{\text{mm}}$ wird

$$\frac{p - p_0}{p_0} = 2n\left(1 - \frac{1}{13{,}6}\right)\frac{z}{735} = 2n\,\frac{z}{793}.$$

Mit $2n = 8$ wird dann

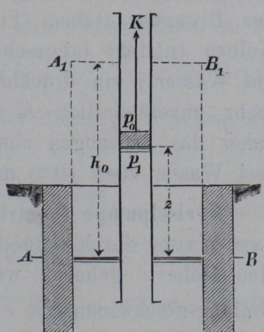
$$z = \frac{p - p_0}{p_0} \cdot 99^{\text{mm}};$$

hier erfordert also 1^{at} nur 99^{mm} Theilungshöhe gegen 735^{mm} beim einfachen Druckmesser.

b) Saugpumpe. Kreiselpumpe. Heber.

AB (Fig. 243) sei der Wasserspiegel eines Brunnens. In einem cylindrischen Rohre, dessen unteres Ende ins Wasser taucht, befindet sich ein beweglicher dicht schliessender Kolben. Der Druck des Wassers im Brunnen und in dem unterhalb des Kolbens befindlichen Theile des Rohres ist am einfachsten zu berechnen, wenn man sich in der Höhe h_0 über dem wahren Wasserspiegel einen Wasserspiegel $A_1 B_1$ denkt, auf den kein Atmosphärendruck wirkt. Ist durch das Spiel der in der Figur nicht gezeichneten Ventile nach einer gewissen Zahl von Kolbenhüben die Luft unter dem Kolben entfernt, so herrscht hier,

Fig. 243.



in der Höhe z über AB, in der Tiefe $h_0 - z$ unter $A_1 B_1$ ein Druck

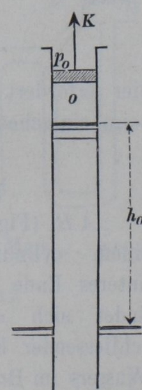
1) $$p_1 = \gamma (h_0 - z).$$

Befindet sich oberhalb des Kolbens noch kein Wasser, so wirkt dort der Druck p_0. Ist F der Querschnitt der Röhre, so ist an dem Kolben eine aufwärts gerichtete Kraft

2) $$K = (p_0 - p_1) F = \gamma F z$$

für den Ruhezustand, sowie für langsame gleichmässige Aufwärts-Bewegung erforderlich, gerade so, als ob die Wassersäule von der Höhe z nicht unterhalb des Kolbens von dem Atmosphärendrucke in der Schwebe erhalten würde, sondern auf dem Kolben lastete. Die Gl. 2 für K gilt aber nur so lange, wie Gl. 1 für p_1 einen positiven Werth ergiebt, d. h. für $z \leqq h_0$, oder so lange sich die untere Kolbenfläche höchstens um h_0 über dem Wasserspiegel AB befindet. Für $z > h_0$ würde nach Gl. 1 der Druck p_1 negativ. Negative Flüssigkeitsdrücke giebt es aber nicht, da Flüssigkeiten keine nennenswerthe Zugfestigkeit haben. Mithin hört bei wachsendem z die Gültigkeit der Gl. 1 mit $z = h_0$ auf. Für $z > h_0$ bleibt der Druck unter dem Kolben Null, das Wasser drückt nicht mehr gegen den Kolben, folgt ihm nicht mehr bei seiner Aufwärts-Bewegung, sondern verbleibt in der Höhe h_0 über dem Wasserspiegel des Brunnens stehen (Fig. 244), und unter dem Kolben entsteht (abgesehen von der Verdampfung des Wassers) ein druckloser Raum, so dass nunmehr unveränderlich $K = \gamma F h_0$ bleibt. Es ist daher das Aufsaugen einer Flüssigkeit nur bis zu einer Höhe h_0 (bei Wasser etwa 10^{m}) möglich.

Fig. 244.

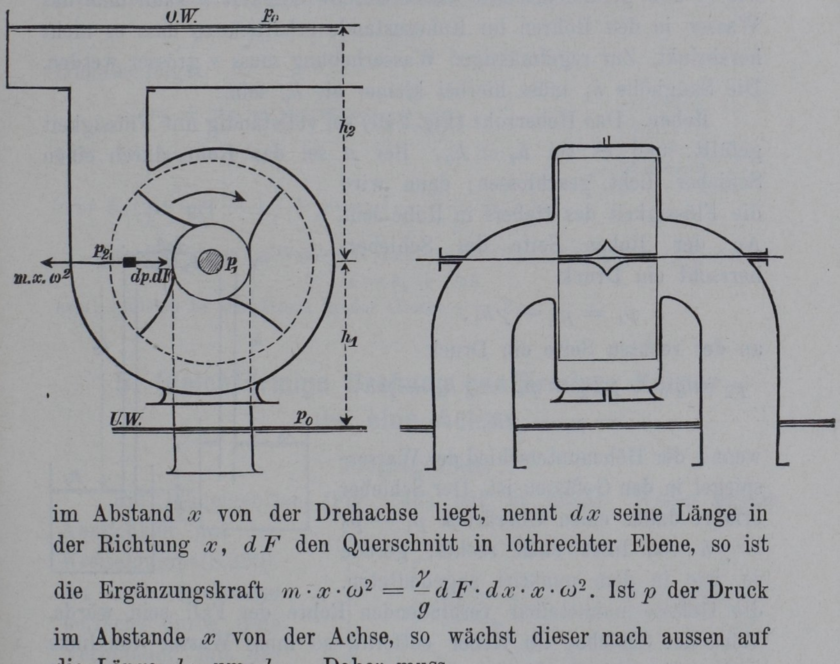


Kreiselpumpe (Centrifugalpumpe) Auf S. 200 wurde gezeigt, dass Wasser durch schnelle Drehung um eine lothrechte Achse auf eine Höhe z gehoben werden konnte und dass die erforderliche Umfangsgeschwindigkeit $v = \sqrt{2gz}$ sein müsse. Bei den zum Wasserfördern bestimmten Kreiselpumpen erfolgt die Drehung meist um eine wagerechte Achse, die oberhalb des Unterwassers liegt, so dass das Wasser auf eine gewisse Höhe angesogen und dann weiter emporgedrückt wird. Es lässt sich zeigen, dass die Beziehung $v = \sqrt{2gz}$ auch bei dieser Anordnung (Fig. 245) gültig bleibt.

Die wagerechte Drehachse liege um h_1 über dem Unterwasser, um h_2 unter dem Oberwasser.

Betrachtet man ein Theilchen m der in gleichmässiger Drehung begriffenen Wassermasse, welches auf dem wagerechten Halbmesser

Fig. 245.



im Abstand x von der Drehachse liegt, nennt dx seine Länge in der Richtung x, dF den Querschnitt in lothrechter Ebene, so ist die Ergänzungskraft $m \cdot x \cdot \omega^2 = \frac{\gamma}{g} dF \cdot dx \cdot x \cdot \omega^2$. Ist p der Druck im Abstande x von der Achse, so wächst dieser nach aussen auf die Länge dx um dp. Daher muss

$$dp \cdot dF = \frac{\gamma}{g} \cdot dF \cdot dx \cdot x \cdot \omega^2 \quad \text{oder}$$

$$dp = \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot x \cdot dx$$

sein. Sind die Drücke für $x = r$ und $x = 0$ bezw. p_2 und p_1, so wird

$$p_2 - p_1 = \frac{\gamma}{2g} r^2 \omega^2.$$

Nun ist

$$p_1 = p_0 - \gamma h_1, \quad p_2 = p_0 + \gamma h_2,$$

daher (mit $r\omega = v$)

$$h_1 + h_2 = \frac{v^2}{2g},$$

oder wenn man den Höhenunterschied zwischen Unter- und Oberwasser $h_1 + h_2 = h$ setzt,

$$v^2 = 2gh; \quad v = \sqrt{2gh},$$

wie S. 200 gefunden. Mit dieser Geschwindigkeit v kann man das Wasser in den Röhren im Ruhezustande erhalten, so dass es nicht herabsinkt. Zur regelmässigen Wasserhebung muss v grösser werden. Die Saughöhe h_1 muss hierbei kleiner als h_0 sein.

Heber. Das Heberrohr (Fig. 246) sei vollständig mit Flüssigkeit gefüllt, und es sei $h_2 < h_0$. Bei A sei das Rohr durch einen Schieber dicht geschlossen; dann wird die Flüssigkeit des Hebers in Ruhe sein. An der linken Seite des Schiebers herrscht ein Druck

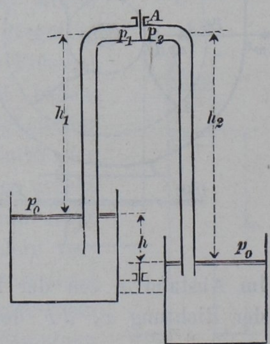
$$p_1 = p_0 - \gamma h_1,$$

an der rechten Seite ein Druck

$$p_2 = p_0 - \gamma h_2 = p_0 - \gamma h_1 - \gamma h,$$
$$= p_1 - \gamma h,$$

wenn h der Höhenunterschied der Wasserspiegel in den Gefässen ist. Der Schieber erfährt daher einen Überdruck $p_1 - p_2 = \gamma h$ von links nach rechts, gerade so, wie in dem punktirt angedeuteten, die Gefässe unmittelbar verbindenden Rohre der Fall sein würde. Wird der Schieber im Heber entfernt, so muss Wasser von links nach rechts hinüberfliessen. Ist $h_1 < h_0$, h_2 aber $> h_0$, so wird $p_2 = 0$, der Überdruck $p_1 - p_2 = p_0 - \gamma h_1 = \gamma(h_0 - h_1) < \gamma h$; auch in diesem Falle wird noch das Wasser hindurchfliessen; erst für $h_1 \geqq h_0$ wird dies nicht mehr stattfinden.

Fig. 246.

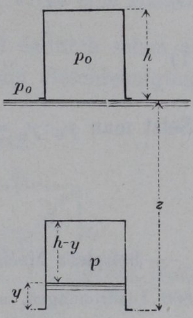


c) Taucherglocke.

Ein oben geschlossenes, unten offenes Gefäss (Fig. 247), welches mit Luft gefüllt ist, werde um die Tiefe z im Wasser niedergesenkt;

dann wird Wasser von unten auf eine Höhe y in dem Gefässe, der Glocke, emporsteigen, und man wird aus der Höhe y auf die Tiefe z schliessen können. Die Luft wird durch das eintretende Wasser von dem Drucke p_0 auf p zusammengedrückt, und wenn man annimmt, dass die Temperatur der Luft sich nicht ändert, so gilt nach dem Boyle'schen Satze

Fig. 247.



$$p : p_0 = h : (h - y).$$

Ausserdem ist aber (wegen der Tiefe z unter Wasser)

$$p = p_0 + \gamma (z - y).$$

Hieraus folgt:

$$p_0 + \gamma z - \gamma y = p_0 \frac{h}{h - y},$$

oder, mit $p_0 = \gamma h_0$:

$$z = h_0 \left(\frac{h}{h - y} - 1 \right) + y = y \left(\frac{h_0}{h - y} + 1 \right).$$

Beispiel: Steigt das Wasser bis zur Mitte der Glocke, ist also $y = \frac{1}{2} h$, so muss

$$z = h_0 + \frac{1}{2} h$$

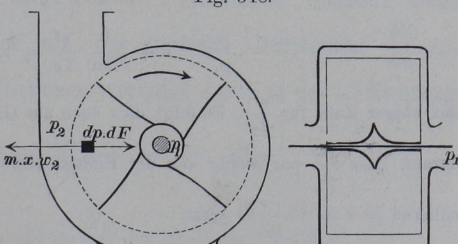
sein; zugleich ist der Druck in der Glocke $p = 2 p_0$.

5. Gleichförmige Drehung gasförmiger Körper um eine Achse.

Flügelgebläse.

Ein Flügelgebläse (Fig. 248) hat in seinem Wesen grosse Ähnlichkeit mit der Kreiselpumpe (S. 220). An der Drehachse herrsche durch freie Verbindung mit der Aussenluft der Druck p_1, am äusseren Umfange betrage der Druck p_2. Für ein Massentheilchen m im Abstande x von der Achse gilt wieder wie auf S. 221

Fig. 348.



$$dp = \frac{\gamma}{g} \omega^2 x \, dx.$$