Bleibt die Luftmenge aber demselben Druck unterworfen, so wird sie bei einer Temperaturerhöhung sich ausdehnen, u. zw. wird nach Gl. 5 der Einheitsraum mit der absoluten Temperatur verhältnisgleich sich ändern.

$$\frac{v}{v_1} = \frac{T}{T_1}.$$

Bei einer Temperatur-Erhöhung von $0 + 273$ auf $100 + 273$ wird also v auf das 1,366 fache wachsen. Betrug die Dichte ursprünglich $\gamma_1 = 1{,}293$, so wird sie abnehmen auf $\gamma = 1{,}293 : 1{,}366 = 0{,}9466$. Auf dieser Verdünnung der Luft durch Erwärmung beruht bekanntlich der Luftballon von Mongolfier (1783), sowie das Aufsteigen warmer Luft in kalter.

e) Barometrisches Höhenmessen.

Der Grundgedanke davon ist schon auf S. 205 behandelt worden. Die dort entwickelten Gleichungen setzen überall gleiche Temperatur von $0^0 C$ voraus. Hier soll nun auch der Einfluss einer veränderlichen Temperatur berücksichtigt werden.

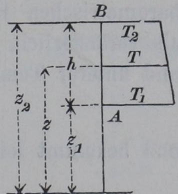
Für ein Lufttheilchen von der Höhe dz galt die Gleichgewichts-Bedingung (S. 204, Gl. 2, Fig. 232)

$$dp = -\gamma\, dz, \quad \text{oder, wegen}$$

$$\gamma = \frac{1}{v} = \frac{p}{RT}$$

(Gl. 1, S. 202 und Gl. 5, S. 210)

Fig. 236.



1) $$dp = -\frac{p}{RT}\,dz.$$

Das Gesetz, nach welchem die Lufttemperatur T zwischen zwei Punkten A und B (Fig. 236) sich ändert, ist nicht genau bekannt; wir nehmen dafür als genügende Annäherung eine lineare Gleichung

2) $$T_1 - T = \tau(z - z_1)$$

an; darin bedeutet

3) $$\tau = \frac{T_1 - T_2}{z_2 - z_1}$$

die Temperaturabnahme nach oben auf 1^m Höhe. Es wird nach Gl. 2

$$dT = -\tau\, dz, \quad dz = -\frac{dT}{\tau}.$$

Setzt man dies in Gl. 1 ein, so entsteht

$$\frac{dp}{p} = \frac{1}{R\tau}\,\frac{dT}{T};$$

mithin wenn man zwischen den Grenzen p_2 und p_1 bezw. T_2 und T_1 integrirt:

4) $$\mathrm{l}\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{1}{R\tau}\,\mathrm{l}\left(\frac{T_1}{T_2}\right),$$

oder nach Gl. 3 und 4:

$$h = z_2 - z_1 = \frac{T_1 - T_2}{\tau} = R(T_1 - T_2)\frac{\mathrm{l}\,p_1 - \mathrm{l}\,p_2}{\mathrm{l}\,T_1 - \mathrm{l}\,T_2}.$$

Für das Verhältnis der natürlichen Logarithmen kann man das der Briggischcn setzen, also

5) $$h = R(T_1 - T_2)\frac{\log p_1 - \log p_2}{\log T_1 - \log T_2}.$$

Für trockene Luft wurde auf S. 210 der Festwerth $R = 29{,}27$ angegeben. Für feuchte Luft bleibt diese Zahl nicht mehr gültig. Für mittlere Verhältnisse Deutschlands kann man in obiger Formel $R = 29{,}37$ setzen.

Annäherungs-Rechnung: Gewöhnlich behandelt man behufs barometrischen Höhenmessens die Temperatur der Luftsäule nicht als veränderlich, sondern als überall gleich dem Mittel aus oberer und unterer Temperatur, setzt in Gl. 1 (S. 211)

$$T = {}^1\!/_2\,(T_1 + T_2)$$

und bekommt leicht

$$\frac{dp}{p} = -\frac{1}{RT}\,dz, \quad \text{mithin}$$

6) $$h = RT\,\mathrm{l}\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = RT\cdot 2{,}302\,585\,(\log p_1 - \log p_2)$$

und mit $R = 29{,}37$

7) $$h = 67{,}63\,T(\log p_1 - \log p_2).$$

Die Logarithmen kann man nach Babinet in folgender Weise aus der Formel entfernen: Man setzt

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{2p_1}{2p_2} = \frac{2p_1 + p_2 - p_2}{2p_2 + p_1 - p_1} = \frac{p_1 + p_2 + p_1 - p_2}{p_1 + p_2 - p_1 + p_2} = \frac{1 + \dfrac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}}{1 - \dfrac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}}.$$

Nun ist bekanntlich

$$\mathfrak{l}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right)$$

oder, wenn man nur das erste Glied benutzt, $= 2x$. Sonach wird annähernd

$$\mathfrak{l}\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = 2\,\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}, \text{ oder}$$

$$h = 2\,R\,T\,\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} = 58{,}74\,T\,\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}.$$

Führt man statt T die gewöhnliche Temperatur $273 + t$ ein, so ergiebt sich auch

$$h = 58{,}74\,(273 + t)\,\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}, \text{ oder}$$

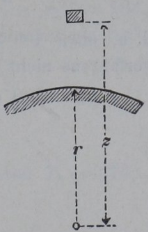
$$h = 16\,036\,(1 + 0{,}003\,665\,t)\,\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}$$

und abgerundet, mit genügender Genauigkeit

8) $$h = 16\,000\,(1 + 0{,}004\,t)\,\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}.$$

Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Schwere. Während in der Nähe der Erdoberfläche das Gewicht von 1^{cbm} Luft $\gamma = \frac{p}{R\,T}$ ist, beträgt es in grosser Höhe, wenn man seine Entfernung vom Mittelpunkte der Erde z und den Erdhalbmesser r nennt (Fig. 237), $\gamma = \frac{p}{R\,T}\,\frac{r^2}{z^2}$ (s. Theil 1, S. 57). Daher wird aus Gl. 1, S. 211:

Fig. 237.



$$d\,p = -\,\frac{p}{R\,T}\,r^2\,\frac{d\,z}{z^2}, \quad \frac{d\,p}{p} = -\,\frac{r^2}{R\,T}\,\frac{d\,z}{z^2}, \text{ also}$$

$$\mathfrak{l}\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{r^2}{R\,T}\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}\right) = \frac{r^2}{R\,T}\,\frac{z_2 - z_1}{z_1\,z_2}.$$

Ist nun $z_1 = r$, $z_2 - z_1 = h$, so folgt

$$\mathfrak{l}\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{r^2}{R\,T}\,\frac{h}{r\,(r+h)} = \frac{h}{1 + \frac{h}{r}}\,\frac{1}{R\,T}, \quad \text{also}$$

9) $$\frac{h}{1 + \frac{h}{r}} = R\,T\,\mathfrak{l}\left(\frac{p_1}{p_2}\right).$$

Der Vergleich mit Gl. 6 (S. 212) zeigt, dass die rechten Seiten übereinstimmen, dass nur links h durch $\dfrac{h}{1+\dfrac{h}{r}}$ ersetzt ist, was aber wegen $r = 6\,370\,000$ meist von h nicht wesentlich abweicht.

Beispiel 1: Es sei wie in dem Beispiel auf S. 205: am unteren Punkte $p_1 = 749{,}2^{\text{mm}}$, am oberen $p_2 = 692{,}7^{\text{mm}}$, ausserdem aber die Temperaturen

$$\text{unten } t_1 = 14{,}4, \quad T_1 = 287{,}4,$$
$$\text{oben } t_2 = 10{,}6, \quad T_2 = 283{,}6; \quad T_1 - T_2 = 3{,}8;$$

dann wird nach Gl. 5

$$h = 29{,}37 \cdot 3{,}8 \frac{\log 749{,}2 - \log 692{,}7}{\log 287{,}4 - \log 283{,}6} = 657{,}4^{\text{ m}}$$

(gegen $628^{\text{ m}}$ für $t_1 = t_2 = 0$).

Gl. 7 (S. 212) liefert mit

$$T = \tfrac{1}{2}(287{,}4 + 283{,}6) = 285{,}5,$$
$$h = 67{,}63 \cdot 285{,}5 (\log 749{,}2 - \log 692{,}7) = 657{,}5^{\text{ m}},$$

mithin fast dasselbe wie vorstehend.

Gl. 8 liefert mit $t = 12{,}5^0$:

$$h = 16\,000\,(1 + 0{,}05) \frac{749{,}2 - 692{,}7}{749{,}2 + 692{,}7} = 658{,}3^{\text{ m}},$$

d. h. etwa $1^{\text{ m}}$ zu viel, was aber bei der sonstigen Unsicherheit dieses Messverfahrens nicht erheblich ist.

Aus Gl. 9 endlich wird in Verbindung mit dem Ergebnisse der Gl. 7:

$$\frac{h}{1 + \dfrac{h}{6\,370\,000}} = 657{,}5, \quad \text{oder}$$

$$h\left(1 - \frac{657{,}5}{6\,370\,000}\right) = 657{,}5, \quad \text{d. h.}$$

$$h = 657{,}6^{\text{ m}}.$$

Beispiel 2: Steighöhe eines Luftballons mit Rücksicht auf die Veränderlichkeit der Temperatur. Sind γ_1 und γ_1' die Dichten der Aussenluft und der Füllung am Erdboden, wo der Druck und die Temperatur p_1 und T_1 betragen und beziehen sich γ_2, γ_2', p_2 und T_2 auf die Grenze der Steighöhe h, so gilt für letztere die Bedingung

$$V(\gamma_2 - \gamma_2') = Q.$$

Wir nehmen an, dass im Ballon dieselbe Temperatur und derselbe Druck herrsche wie aussen. Dann ist nach der Zustandsgleichung (S. 210) wegen $\gamma = 1 : v$, wenn R' der Festwerth für die Gasfüllung,

$$\gamma_1 = \frac{p_1}{R\,T_1}, \quad \gamma_1' = \frac{p_1}{R'\,T_1},$$

$$\gamma_2 = \frac{p_2}{R\,T_2}, \quad \gamma_2' = \frac{p_2}{R'\,T_2}, \quad \text{daher}$$

$$\gamma_2 - \gamma_2' = (\gamma_1 - \gamma_1')\,\frac{p_2}{p_1}\,\frac{T_1}{T_2}, \quad \text{und}$$

$$V(\gamma_2 - \gamma_2') = V(\gamma_1 - \gamma_1')\,\frac{p_2}{p_1}\,\frac{T_1}{T_2} = Q\,;$$

daraus

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V(\gamma_1 - \gamma_1')}{Q}\,\frac{T_1}{T_2}.$$

Setzt man diesen Werth in Gl. 4 (S. 212) ein, so entsteht

$$\mathrm{l}\left(\frac{V(\gamma_1 - \gamma_1')}{Q}\,\frac{T_1}{T_2}\right) = \frac{1}{R\,\tau}\,\mathrm{l}\left(\frac{T_1}{T_2}\right).$$

Daraus folgt $\log \frac{V(\gamma_1 - \gamma_1')}{Q} = \log\left(\frac{T_1}{T_2}\right)\left(\frac{1}{R\,\tau} - 1\right)$ oder

10) $$\log\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{R\,\tau} - 1}\,\log\left(\frac{V(\gamma_1 - \gamma_1')}{Q}\right).$$

Hierdurch ist das Verhältnis der Temperaturen unten und an der Grenze der Steighöhe bestimmt. Kennt man nun die Temperaturabnahme τ auf 1 m Höhe, so ist

11) $$h = \frac{T_1 - T_2}{\tau}$$

Ist nach S. 208 $V = 700$, $\gamma_1 = 1{,}29$, $\gamma_1' = 0{,}45$, $V(\gamma_1 - \gamma_1') = 588$, $Q = 500$ und nimmt man auf 100 m eine Abnahme der Temperatur um $0{,}5^0$, d. h. $\tau = 0{,}005$, $R = 29{,}37$ an, so wird

$$\log\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = \frac{1}{\frac{200}{29{,}37} - 1}\,\log 1{,}176 \quad \text{und} \quad T_2 = 0{,}972\,T_1.$$

Beträgt nun die Temperatur unten $T_1 = 283$, so wird hiernach $T_2 = 275{,}1$, $T_1 - T_2 = 7{,}9^0$, mithin

$$h = 7{,}9 \cdot 200 = 1580\,\mathrm{m}.$$

Eine etwas unrichtige Schätzung von τ beeinflusst das Ergebuis nicht sehr, weil τ sowohl in Gl. 10, als auch in Gl. 11 vorkommt. Mit $\tau = 0{,}006$ wird z. B. $h = 1608$ m, also wenig verschieden. — Zur Erleichterung derartiger Rechnungen dienen Jordan's Barometrische Höhentafeln. (Hannover 1896. Helwing).

4. Gleichgewicht zwischen tropfbaren und gasförmigen Flüssigkeiten.

a) Barometer. Druckmesser.

Die Atmosphäre übt in der Höhe des Meeresspiegels einen Druck $p_0 = 10\,333\ \mathrm{kg/qm}$ aus, also auch auf die Oberfläche einer ruhenden Flüssigkeit. Dieser Druck p_0 kann durch das Gewicht