oder $\sigma = 788^{\text{at}}$. Diese erhebliche Anspannung macht es erklärlich, dass derartige Schleudermaschinen in ähnlicher Weise wie Dampfkessel einer sorgfältigen Überwachung unterliegen; besonders muss mit Rücksicht auf Gl. 8 eine Überladung (zu grosses Q) vermieden werden.

3. Gleichgewicht gasförmiger Flüssigkeiten.

Während tropfbar flüssige Körper nahezu unveränderlichen Rauminhalt zeigen, ist der Rauminhalt der Gase in hohem Maſse veränderlich. Wie man das Verhalten elastisch-fester Körper mit Hülfe von Elasticitätsgesetzen beurtheilen konnte, so giebt es für Gase einfache Gesetze, denen ihr äusseres Verhalten unterworfen ist. Eine Änderung des Rauminhaltes einer Gasmenge kann erfolgen durch eine Änderung seiner Temperatur oder seines Druckes (oder beider); die Beziehung zwischen diesen Grössen heisst die Zustandsgleichung.

Es empfiehlt sich, die allgemeinen Gesetze über die Raumänderung auf eine bestimmte Menge eines Gases, nämlich auf 1^{kg} zu beziehen. Der Rauminhalt, den 1^{kg} eines Gases in irgend einem Zustande einnimmt, heisst der Einheitsraum oder das specifische Volumen und wird mit v bezeichnet. Die Dichte, d. h. das Gewicht von 1^{cbm} wird auch hier mit γ bezeichnet. Da nun Dichte mal Rauminhalt gleich dem Gewichte ist, so wird das Gewicht des Einheitsraumes v sein γv, und dies muss $= 1^{\text{kg}}$ sein, weil v ja die Raummenge von 1^{kg} war. Somit ist

1) $$\gamma v = 1; \quad v = 1 : \gamma .$$

a) Der Boyle-Mariotte'sche Satz.

Bei gleichbleibender Temperatur ändert sich die Dichte eines Gases verhältnisgleich mit dem Drucke, der Einheitsraum also umgekehrt verhältnisgleich mit dem Drucke.

Beziehen sich p_1, v_1, γ_1 auf einen Anfangszustand, p, v, γ auf einen anderen Zustand, so ist zufolge der Erfahrung

2) $$\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{p}{p_1} = \frac{v_1}{v},$$

oder es ist $p v = \frac{p}{\gamma}$ eine unveränderliche Grösse, solange die Temperatur unverändert erhalten wird.

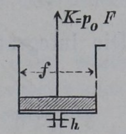
Dies Verhalten der Gase ist vom Engländer Boyle (geb. 1626 zu Lismore (Irland), gest. 1691 zu London) im Jahre 1662 entdeckt, 1679 von dem Franzosen Mariotte (geb. 1620 zu Bourgogne, gest. zu Paris 1684) durch viele Versuche bestätigt worden und wird meist nach Letzterem benannt.

Wird also ein Gas auf $^1/_5$ seines ursprünglichen Raumes zusammengedrückt, mithin seine Dichte um das Fünffache vergrössert, so erhöht sich sein Druck ebenfalls auf das Fünffache — jedoch nur unter der Voraussetzung, dass das Gas nachher dieselbe Temperatur zeigt wie vorher. In den meisten Fällen findet beim Zusammendrücken eine Temperatur-Erhöhung statt, in Folge dessen der Satz dann nicht gültig ist. Nur wenn man durch besondere Vorkehrungen die Temperatur-Änderung verhindert, darf der Satz zur Anwendung gebracht werden.

b) Druckverhältnisse der Atmosphäre bei überall gleicher Temperatur.

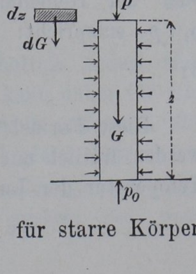
Die Atmosphäre übt auf alle mit ihr in Berührung befindlichen Körper einen Druck aus, der in der Höhe des Meeresspiegels im Mittel $p_0 = 10\,333\,^{\text{kg}}/_{\text{qm}}$ beträgt. Man kann sich hiervon überzeugen, wenn man (Fig. 231) einen Kolben in einem Cylinder vom Querschnitt F bei geöffnetem Hahne h abwärts schiebt, bis sämmtliche Luft unter dem Kolben entfernt ist und dann nach Schliessung des Hahnes den Kolben in die Höhe zu ziehen versucht. Es setzt sich dem, abgesehen von Reibungswiderständen, ein Widerstand $K = p_0 F$ entgegen, der nur von der Wirkung der Luft auf die obere Kolbenfläche herrühren kann.

Fig. 231.



1 $^{\text{cbm}}$ Luft hat bei diesem Drucke p_0 und bei 0^0 C. ein Gewicht $\gamma_0 = 1{,}293\,^{\text{kg}}$.

Fig. 232.



Ebenso wie im Wasser muss auch in der Luft der Druck nach oben hin abnehmen, allerdings nach einem anderen Verhältnisse, weil die Dichte der Luft veränderlich ist. Betrachten wir eine Luftsäule von 1 $^{\text{qm}}$ Querschnitt, die vom Meeresspiegel lothrecht in die Höhe sich erstreckt, so kann man nach S. 159 auch auf diese (Fig. 232) die Gleichgewichts-Bedingungen für starre Körper anwenden. Ist p der Luftdruck in einer Höhe z über dem Meeresspiegel, so wirken an der Luftsäule von der Höhe z die lothrechten Kräfte p_0, p und das Gewicht G; die Seitendrücke kommen nicht in Frage, wenn wir p berechnen wollen. Es ist demnach

1) $$p = p_0 - G.$$

Wäre die Dichte überall γ_0, so könnte man $G = \gamma_0 z$ setzen; dies ist aber hier nicht zulässig, weil mit p auch γ nach oben hin abnimmt. Die Differentiation der Gl. 1 nach z giebt

$$\frac{dp}{dz} = 0 - \frac{dG}{dz}.$$

Nennt man γ die Dichte der Luft in der Höhe z, so ist dG das Gewicht eines Höhentheilchens dz der Säule, daher $dG = \gamma dz$. Hiernach wird

2) $$dp = -\gamma dz.$$

Weil nun nach dem Boyle'schen Satze $\gamma : \gamma_0 = p : p_0$, so folgt

$$dp = -\frac{\gamma_0}{p_0} p\, dz, \quad \text{oder}$$

wenn man behufs der Integration p mit dp auf dieselbe Seite der Gleichung bringt,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\gamma_0}{p_0} dz.$$

Die Integration dieser Gleichung ergiebt:

$$\mathfrak{l}(p) = -\frac{\gamma_0}{p_0} z + C.$$

Nennt man p_1 und p_2 die Atmosphärendrücke in den Höhen z_1 und z_2 über dem Meeresspiegel, so wird

$$\mathfrak{l}\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = -\frac{\gamma_0}{p_0}(z_1 - z_2) = \frac{\gamma_0}{p_0}(z_2 - z_1),$$

oder der Höhenunterschied $h = z_2 - z_1$, der dem Verhältnisse $p_1 : p_2$ entspricht:

3) $$\boldsymbol{h = \frac{p_0}{\gamma_0} \mathfrak{l}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)}.$$

Diese Formel kann zum barometrischen Höhenmessen benutzt werden, freilich nur als erste Annäherung, weil darin überall gleiche Temperatur der Luftsäule angenommen ist. Für 0^0 C. ist

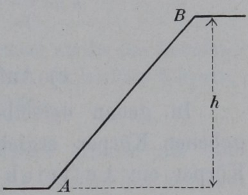
$$p_0 : \gamma_0 = 10\,333 : 1{,}293 = 7992^{\mathrm{m}},$$

wofür man mit genügender Annäherung 8000 m schreiben darf. Will man sich Briggischer Logarithmen bedienen, so hat man, weil der natürliche Log. grösser ist als der Briggische, auf der rechten Seite noch den Faktor 2,302 59 = l 10 hinzuzufügen und erhält rund

$$h = 18\,400\,(\log p_1 - \log p_2)\,. \tag{4}$$

Es ist für die Anwendung der Gleichung nicht erforderlich, dass die beiden Punkte, deren Höhenunterschied man ermitteln will, in einer Lothrechten liegen. Die Gleichung ist ebenso gut auf die Punkte A und B (Fig. 233) anwendbar, wenn nur zwischen beiden ein schräges Luftprisma gleicher Temperatur im Ruhezustande sich befindet.

Fig. 233.



Der Luftdruck wird bekanntlich mittels Barometers durch eine Quecksilbersäule ausgedrückt. Da der Luftdruck mit jener Säule verhältnisgleich ist, so kann man in dem Verhältnisse $p_1 : p_2$ unmittelbar die Barometer-Ablesungen anstatt der Drücke benutzen.

Beispiel 1: Es sei $p_1 = 749{,}2$ mm, $p_2 = 692{,}7$ mm Quecksilbersäule, dann ist

$$h = 18\,400\,(\log 749{,}2 - \log 692{,}7) = 628\text{ m},$$

Später (S. 214) werden wir dasselbe Beispiel mit Rücksicht auf verschiedene Temperaturen in A und B behandeln.

Beispiel 2: Auf S. 8 wurde für die Atmosphäre der runde Werth 1 kg/qcm = 10 000 kg/qm eingeführt. Es soll mittels der Gl. 4 berechnet werden, in welcher Höhe über dem Meere dieser Druck bei 0° C. etwa stattfindet.

$$h = 18\,400\,(\log 10\,333 - \log 10\,000) = 264\text{ m},$$

d. i. etwa die Höhe von Ilsenburg am Fusse des Brockens (s. 1. Theil, S. 94).

Zu einem Höhenunterschiede $h = 100$ m gehört nach Gl. 4 ein Werth

$$\log\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{100}{18\,400} = 0{,}005\,434\,8\,.$$

oder $p_1 : p_2 = 1{,}012\,59$. In dem gleichen Verhältnis ändert sich auch die Dichte, d. h. etwa nur um $^1/_{80}$. Man kann daher für alle Fälle, bei denen es nicht auf grosse Genauigkeit ankommt, für Luftsäulen bis zu 100 m die Dichte als überall gleich betrachten.

Mit überall gleicher Dichte $\gamma = 1{,}293$ gerechnet, würde auf 100 m Höhe ein Unterschied des Luftdrucks von 129,3 kg/qm sich ergeben, also, wenn

$p_1 = 10\,333$, würde $p_2 = 10\,204$, mit einem Verhältnisse $1{,}012\,64$, welches von dem obigen genaueren Werthe nur sehr wenig abweicht. Diese Übereinstimmung hängt auch damit zusammen, dass in der Reihe

$$\mathfrak{l}\,(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{3} - + \ldots$$

für kleine x einfach $\mathfrak{l}\,(1 + x) = x$, also, wenn $p_1 : p_2$ nur wenig von 1 verschieden,

$$\mathfrak{l}\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{p_1}{p_2} - 1 = \frac{p_1 - p_2}{p_2}$$

gesetzt werden kann, womit dann, wenn man $p_1 = p_0$ setzt, Gl. 3 wird

$$h = \frac{p_0}{\gamma_0}\,\frac{p_0 - p_2}{p_2} = \frac{p_0 - p_2}{\gamma_2} \quad \text{(annähernd).}$$

c) Auftrieb der Luft. Luftballon.

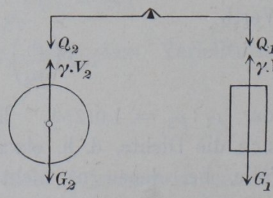
In genau derselben Weise wie bei einem von Wasser umgebenen Körper ergiebt sich auch für die von der Luft umhüllten Körper ein Auftrieb der Luft, gleich und entgegengesetzt dem Gewichte der verdrängten Luftmasse. Genau genommen, muss bei der Ermittelung des Gewichtes und des Schwerpunktes der verdrängten Luftmasse auf die Veränderlichkeit der Dichte Rücksicht genommen werden. Hat aber der verdrängende Körper keine sehr grosse Höhenausdehnung, so kann man nach S. 205 für seinen Bereich die Dichte γ der Luft meist als überall gleich ansehen und den Auftrieb

1) $$A = \gamma V$$

setzen, wenn V der Rauminhalt ist.

Wägt man also von Luft umgebene Körper (Fig. 234), so wird, wenn der Zeiger der Waage auf Null steht, dadurch nicht die Gleicheit der wahren Gewichte und somit der Massen beider Körper, sondern die Gleichheit der scheinbaren Gewichte (s. S. 185) bewiesen. Auf der rechten Seite wirkt auf die Waage $Q_1 = G_1 - \gamma V_1$, auf der linken Seite $Q_2 = G_2 - \gamma V_2$. Ist $V_2 > V_1$, so muss $G_2 > G_1$ sein, wenn $Q_1 = Q_2$ ist. Bringt man die Waage unter die Glocke einer Luftpumpe und vermindert durch allmähliches Auspumpen der Luft die Dichte γ, so wird Q_2 schneller zunehmen

Fig. 234.



als Q_1, der Körper von grösserem Rauminhalt und geringerer Dichte also sinken.

Beispiel: Ein Körper von Holz ($\gamma_2 = 750$ kg/cbm) werde in der Luft mit einem Gewichtstücke von Eisen ($\gamma_1 = 7500$) so abgewogen, dass der Zeiger der Waage auf Null zeigt. Welches ist das Verhältnis der beiden Massen? Die Waage beweist

$$V_1 (7500 - 1{,}3) = V_2 (750 - 1{,}3),$$

wenn man die Luftdichte $\gamma = 1{,}3$ setzt. Daher ist

$$\frac{V_2 750}{V_1 7500} = \frac{7500 - 1{,}3}{(750 - 1{,}3)\, 10} = 1{,}00156 .$$

In diesem Verhältnis ist die Masse des Holzkörpers grösser als die des Gewichtstückes. Bei feinen Wägungen muss daher, besonders bei sehr leichten Körpern, die augenblickliche Dichte der Luft berücksichtigt werden.

Luftballon. Ist das Gewicht eines Körpers kleiner als der Auftrieb der umgebenden Luft, so tritt an die Stelle des scheinbaren Gewichtes eine Steigkraft $K = \gamma V - G$. Bedeutet V den Rauminhalt eines mit leichtem Gase von der Dichte γ' (bei 0^0 C. und mittlerem Atmosphärendrucke $p_0 = 10\,333$ kg/qm) gefüllten Ballons, so wird, wenn das Gewicht der Gasfüllung $\gamma' V$ besonders eingeführt und Q das Gewicht aller übrigen Theile (Hülle, Tauwerk, Gondel, Ausrüstung, Besatzung, Ballast) ist, deren Rauminhalt gegenüber V vernachlässigt werden darf, die Steigkraft bei der Stellung dicht über dem Erdboden

$$K_0 = V(\gamma - \gamma') - Q .$$

Beim Steigen nimmt der Druck und die Dichte der Luft ab. Wäre der Ballon fest geschlossen und undehnbar, so würde die Dichte γ' des Gases unverändert erhalten. Es bliebe dann aber, wenn wir überall gleiche Temperatur in der Luft annehmen, der innere Druck so gross wie zu Anfang, d. h. grösser als der verminderte äussere Luftdruck. Einem solchen inneren Überdrucke darf man aber wegen der Gefahr des Zerreissens den Ballon nicht aussetzen. Deshalb wird an der Hülle des Ballons ein Sicherheits-Ventil angebracht, welches so eingerichtet ist, dass es den Druck im Inneren nicht erheblich über den Aussendruck steigen lässt. In Folge dessen wird dann auch die Dichte des Gases sich in gleichem Verhältnisse mit dem äusseren Druck ändern.

Beträgt der Luftdruck am Boden p_1, in einer Höhe h aber p_2, so wird in dieser Höhe die Steigkraft noch sein:

$$K = V(\gamma - \gamma')\frac{p_2}{p_1} - Q. \tag{3}$$

Die Steigkraft hört auf, wenn

$$V(\gamma - \gamma')\frac{p_2}{p_1} = Q \quad \text{oder}$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V(\gamma - \gamma')}{Q}$$

geworden ist. Dem entspricht bei einer überall gleichen Temperatur von 0° C. eine Steighöhe (Gl. 4, S. 205)

$$h = 18\,400 \log\left(\frac{V(\gamma - \gamma')}{Q}\right).$$

Beispiel: Ein Ballon von 700 ^{cbm} Rauminhalt werde mit Leuchtgas von der Dichte $\gamma' = 0{,}45$ gefüllt. Das Gewicht der Hülle, des Tauwerks, der Gondel, der Ausrüstung, des Ballastes und der Besatzung betrage $Q = 500$ ^{kg}, dann ergiebt sich die Steigkraft über dem Erdboden zu

$$K_0 = 700\,(1{,}29 - 0{,}45) - 500 = 88\ ^{kg}.$$

Diese Grösse hat die Spannkraft des Haltetaues, welches den Ballon am Boden festhält. Die Steighöhe des Ballons wird

$$h = 18\,400 \log\frac{V(\gamma - \gamma')}{Q}$$

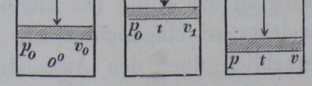
$$= 18\,400 \log 1{,}176 = 1295\ ^{m}.$$

Bei Füllung mit Wasserstoff ($\gamma' = 0{,}09$) wird $K_0 = 340$ ^{kg}, $h = 4146$ ^{m}. (Vgl. a. S. 215.)

d) Satz von Gay-Lussac. Zustandsgleichung der vollkommenen Gase.

Der Satz des französischen Physikers Gay-Lussac (geb. 1778 zu Leonard, gest. 1850 zu Paris), aufgestellt im Jahre 1802, bezieht sich auf die Ausdehnung der Gase durch Temperatur-Erhöhung bei gleichbleibendem Drucke.

Fig. 235.



Wird 1 ^{kg} Gas von 0° C. Temperatur, vom Rauminhalte v_0 und dem Drucke p_0 (Fig. 235) auf t^0 C. unter gleichbleibender Kolbenbelastung, d. h. gleichbleibendem Drucke p_0 erwärmt, so erfolgt eine

Ausdehnung auf den Einheitsraum v_1, und es ist das Ausdehnungs-Verhältnis

1) $$\frac{v_1 - v_0}{v_0} = \alpha t \quad \text{oder} \quad v_1 = v_0(1 + \alpha t),$$

worin α, die Ausdehnungsziffer, nicht allein für ein bestimmtes Gas unveränderlich ist, sondern sogar für alle Gase denselben Zahlenwerth

$$\alpha = 0{,}003\,665 = 1 : 273$$

hat. In der Gleichung 1 liegt der Satz von Gay-Lussac, dass die Ausdehnung eines Gases verhältnisgleich der Temperatur-Erhöhung ist. Verstärkt man nun den Druck des Gases durch Erhöhung der Kolbenbelastung auf p, so wird der Einheitsraum sich auf v vermindern, und wenn man diese Änderung künstlich so regelt, dass bei ihr keine Änderung der Temperatur des Gases erfolgt, so gilt für sie der Boyle'sche Satz

2) $$v : v_1 = p_0 : p.$$

Verbindet man die Gl. 1 und 2, so entsteht

$$pv = p_0 v_0 (1 + \alpha t) = p_0 v_0 \alpha \left(\frac{1}{\alpha} + t\right),$$

oder mit Einführung des Zahlenwerthes für α

$$pv = \frac{p_0 v_0}{273}(273 + t).$$

Bei einem bestimmten Drucke p_0 und einer Temperatur von 0^0 C. hat nun 1 kg eines Gases einen bestimmten Raum v_0, daher ist $p_0 v_0 : 273$ für ein bestimmtes Gas eine gegebene Grösse, die mit R bezeichnet wird, so dass

3) $$pv = R(273 + t).$$

Für $t = -273$ wird die rechte Seite und somit $pv = 0$, also, da der Raum von 1 kg Gas nicht wohl Null werden kann, $p = 0$; d. h. bei einer Temperatur von -273^0 C. würde der Druck p und somit das Ausdehnungs-Bestreben des Gases aufhören, wenn die Erfahrungssätze von Boyle und Gay-Lussac noch für Wärmegrade, die von den Temperaturen der Versuche so weit entfernt liegen, gültig wären. Diese Temperatur -273^0 C. nennt man den absoluten

Nullpunkt und bezeichnet die nach Celsius-Graden von diesem Nullpunkt aus gezählte Temperatur

4) $$273 + t = T$$

als die absolute Temperatur. Man erhält die absolute Temperatur eines Körpers in Celsius-Graden, indem man zu seiner vom Gefrierpunkte des Wassers aus gezählten Temperatur t in Celsius-Graden 273 hinzuzählt. Dem Gefrierpunkte des Wassers $t = 0^0$ entspricht die absolute Temperatur $T = 273^0$.

Mit Gl. 4 erhält nun Gl. 3 die überraschend einfache Form

5) $$pv = RT.$$

Diese Gleichung heisst die Zustandsgleichung der Gase. Sie gilt für die Gase ziemlich genau, so lange sich dieselben weit vom Verflüssigungspunkte befinden, während in der Nähe desselben sich erhebliche Abweichungen zeigen. In den folgenden Anwendungen auf Luft und andere Gase setzen wir eine vollkommene Gültigkeit der Gl. 5 voraus und nennen die Gase in diesem Sinne vollkommene Gase, indem wir uns vorstellen, das Gas sei unendlich weit von der Verflüssigung entfernt.

Den Festwerth R findet man, indem man Gl. 5 auf einen bestimmten Zustand p, v, T anwendet. Da nun trockene atmosphärische Luft bei $t = 0^0$ C. oder $T = 273^0$ und bei einem Drucke $p_0 = 10333\ {}^{\mathrm{kg}}/_{\mathrm{qm}}$ eine Dichte $\gamma_0 = 1{,}293$, daher einen Einheitsraum $v_0 = 1 : 1{,}293$ hat, so wird für trockene Luft

$$R = \frac{10333}{1{,}293 \cdot 273} = 29{,}27\,.$$

Wird eine Luftmenge fest eingeschlossen, so dass sie sich nicht ausdehnen kann, so muss v unverändert bleiben. Erhöht man nun die Temperatur, so muss nach Gl. 5 der Druck p verhältnisgleich der absoluten Temperatur sich ändern.

$$\frac{p}{p_1} = \frac{T}{T_1}.$$

War zu Anfang $T_1 = 0 + 273$, nachher $T = 100 + 273 = 373$, so wird

$$\frac{p}{p_1} = \frac{373}{273} = 1{,}366.$$

Hatte die Luft ursprünglich den Atmosphärendruck, so wird sie nach Erhöhung der Temperatur um 100^0 einen Druck von 1,366 Atmosphären ausüben. Hierauf beruht die Heissluftmaschine.

Bleibt die Luftmenge aber demselben Druck unterworfen, so wird sie bei einer Temperaturerhöhung sich ausdehnen, u. zw. wird nach Gl. 5 der Einheitsraum mit der absoluten Temperatur verhältnisgleich sich ändern.

$$\frac{v}{v_1} = \frac{T}{T_1}.$$

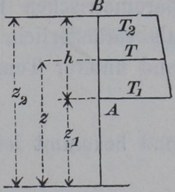
Bei einer Temperatur-Erhöhung von $0 + 273$ auf $100 + 273$ wird also v auf das 1,366 fache wachsen. Betrug die Dichte ursprünglich $\gamma_1 = 1{,}293$, so wird sie abnehmen auf $\gamma = 1{,}293 : 1{,}366 = 0{,}9466$. Auf dieser Verdünnung der Luft durch Erwärmung beruht bekanntlich der Luftballon von Mongolfier (1783), sowie das Aufsteigen warmer Luft in kalter.

e) Barometrisches Höhenmessen.

Der Grundgedanke davon ist schon auf S. 205 behandelt worden. Die dort entwickelten Gleichungen setzen überall gleiche Temperatur von $0^0 C$ voraus. Hier soll nun auch der Einfluss einer veränderlichen Temperatur berücksichtigt werden.

Für ein Lufttheilchen von der Höhe dz galt die Gleichgewichts-Bedingung (S. 204, Gl. 2, Fig. 232)

Fig. 236.



$$dp = -\gamma dz, \quad \text{oder, wegen}$$

$$\gamma = \frac{1}{v} = \frac{p}{RT}$$

(Gl. 1, S. 202 und Gl. 5, S. 210)

1) $$dp = -\frac{p}{RT} dz.$$

Das Gesetz, nach welchem die Lufttemperatur T zwischen zwei Punkten A und B (Fig. 236) sich ändert, ist nicht genau bekannt; wir nehmen dafür als genügende Annäherung eine lineare Gleichung

2) $$T_1 - T = \tau (z - z_1)$$

an; darin bedeutet

3) $$\tau = \frac{T_1 - T_2}{z_2 - z_1}$$

die Temperaturabnahme nach oben auf 1^m Höhe. Es wird nach Gl. 2

$$dT = -\tau dz, \quad dz = -\frac{dT}{\tau}.$$

Setzt man dies in Gl. 1 ein, so entsteht

$$\frac{dp}{p} = \frac{1}{R\tau}\,\frac{dT}{T};$$

mithin wenn man zwischen den Grenzen p_2 und p_1 bezw. T_2 und T_1 integrirt:

4) $$\mathfrak{l}\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{1}{R\tau}\,\mathfrak{l}\left(\frac{T_1}{T_2}\right),$$

oder nach Gl. 3 und 4:

$$h = z_2 - z_1 = \frac{T_1 - T_2}{\tau} = R(T_1 - T_2)\frac{\mathfrak{l}p_1 - \mathfrak{l}p_2}{\mathfrak{l}T_1 - \mathfrak{l}T_2}.$$

Für das Verhältnis der natürlichen Logarithmen kann man das der Briggischen setzen, also

5) $$h = R(T_1 - T_2)\frac{\log p_1 - \log p_2}{\log T_1 - \log T_2}.$$

Für trockene Luft wurde auf S. 210 der Festwerth $R = 29{,}27$ angegeben. Für feuchte Luft bleibt diese Zahl nicht mehr gültig. Für mittlere Verhältnisse Deutschlands kann man in obiger Formel $R = 29{,}37$ setzen.

Annäherungs-Rechnung: Gewöhnlich behandelt man behufs barometrischen Höhenmessens die Temperatur der Luftsäule nicht als veränderlich, sondern als überall gleich dem Mittel aus oberer und unterer Temperatur, setzt in Gl. 1 (S. 211)

$$T = {}^1\!/\!_2\,(T_1 + T_2)$$

und bekommt leicht

$$\frac{dp}{p} = -\frac{1}{RT}\,dz, \quad \text{mithin}$$

6) $$h = RT\,\mathfrak{l}\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = RT\cdot 2{,}302\,585\,(\log p_1 - \log p_2)$$

und mit $R = 29{,}37$

7) $$h = 67{,}63\,T(\log p_1 - \log p_2).$$

Die Logarithmen kann man nach Babinet in folgender Weise aus der Formel entfernen: Man setzt

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{2p_1}{2p_2} = \frac{2p_1 + p_2 - p_2}{2p_2 + p_1 - p_1} = \frac{p_1 + p_2 + p_1 - p_2}{p_1 + p_2 - p_1 + p_2} = \frac{1 + \dfrac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}}{1 - \dfrac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}}.$$

Nun ist bekanntlich

$$\mathfrak{l}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right)$$

oder, wenn man nur das erste Glied benutzt, $= 2x$. Sonach wird annähernd

$$\mathfrak{l}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)=2\,\frac{p_1-p_2}{p_1+p_2},\ \text{oder}$$

$$h=2\,R\,T\,\frac{p_1-p_2}{p_1+p_2}=58{,}74\,T\,\frac{p_1-p_2}{p_1+p_2}.$$

Führt man statt T die gewöhnliche Temperatur $273+t$ ein, so ergiebt sich auch

$$h=58{,}74\,(273+t)\,\frac{p_1-p_2}{p_1+p_2},\ \text{oder}$$

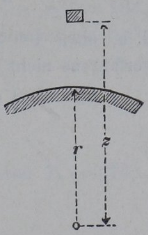
$$h=16\,036\,(1+0{,}003\,665\,t)\,\frac{p_1-p_2}{p_1+p_2}$$

und abgerundet, mit genügender Genauigkeit

8) $$h=16\,000\,(1+0{,}004\,t)\,\frac{p_1-p_2}{p_1+p_2}.$$

Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Schwere. Während in der Nähe der Erdoberfläche das Gewicht von 1^{cbm} Luft $\gamma=\dfrac{p}{R\,T}$ ist, beträgt es in grosser Höhe, wenn man seine Entfernung vom Mittelpunkte der Erde z und den Erdhalbmesser r nennt (Fig. 237), $\gamma=\dfrac{p}{R\,T}\,\dfrac{r^2}{z^2}$ (s. Theil 1, S. 57).

Fig. 237.



Daher wird aus Gl. 1, S. 211:

$$d\,p=-\frac{p}{R\,T}\,r^2\,\frac{d\,z}{z^2},\quad \frac{d\,p}{p}=-\frac{r^2}{R\,T}\,\frac{d\,z}{z^2},\ \text{also}$$

$$\mathfrak{l}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)=\frac{r^2}{R\,T}\left(\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_2}\right)=\frac{r^2}{R\,T}\,\frac{z_2-z_1}{z_1\,z_2}.$$

Ist nun $z_1=r$, $z_2-z_1=h$, so folgt

$$\mathfrak{l}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)=\frac{r^2}{R\,T}\,\frac{h}{r\,(r+h)}=\frac{h}{1+\dfrac{h}{r}}\,\frac{1}{R\,T},\quad \text{also}$$

9) $$\frac{h}{1+\dfrac{h}{r}}=R\,T\,\mathfrak{l}\left(\frac{p_1}{p_2}\right).$$

Der Vergleich mit Gl. 6 (S. 212) zeigt, dass die rechten Seiten übereinstimmen, dass nur links h durch $\dfrac{h}{1+\dfrac{h}{r}}$ ersetzt ist, was aber wegen $r = 6\,370\,000$ meist von h nicht wesentlich abweicht.

Beispiel 1: Es sei wie in dem Beispiel auf S. 205: am unteren Punkte $p_1 = 749{,}2^{\text{mm}}$, am oberen $p_2 = 692{,}7^{\text{mm}}$, ausserdem aber die Temperaturen

$$\text{unten } t_1 = 14{,}4\,, \quad T_1 = 287{,}4\,,$$

$$\text{oben } t_2 = 10{,}6\,, \quad T_2 = 283{,}6\,; \quad T_1 - T_2 = 3{,}8\,;$$

dann wird nach Gl. 5

$$h = 29{,}37 \cdot 3{,}8\,\frac{\log 749{,}2 - \log 692{,}7}{\log 287{,}4 - \log 283{,}6} = 657{,}4^{\text{m}}$$

(gegen 628^{m} für $t_1 = t_2 = 0$).

Gl. 7 (S. 212) liefert mit

$$T = {}^1\!/_2\,(287{,}4 + 283{,}6) = 285{,}5\,,$$

$$h = 67{,}63 \cdot 285{,}5\,(\log 749{,}2 - \log 692{,}7) = 657{,}5^{\text{m}},$$

mithin fast dasselbe wie vorstehend.

Gl. 8 liefert mit $t = 12{,}5^0$:

$$h = 16\,000\,(1 + 0{,}05)\,\frac{749{,}2 - 692{,}7}{749{,}2 + 692{,}7} = 658{,}3^{\text{m}},$$

d. h. etwa 1^{m} zu viel, was aber bei der sonstigen Unsicherheit dieses Messverfahrens nicht erheblich ist.

Aus Gl. 9 endlich wird in Verbindung mit dem Ergebnisse der Gl. 7:

$$\frac{h}{1 + \dfrac{h}{6\,370\,000}} = 657{,}5\,, \quad \text{oder}$$

$$h\left(1 - \frac{657{,}5}{6\,370\,000}\right) = 657{,}5\,, \quad \text{d. h.}$$

$$h = 657{,}6^{\text{m}}.$$

Beispiel 2: Steighöhe eines Luftballons mit Rücksicht auf die Veränderlichkeit der Temperatur. Sind γ_1 und γ_1' die Dichten der Aussenluft und der Füllung am Erdboden, wo der Druck und die Temperatur p_1 und T_1 betragen und beziehen sich γ_2, γ_2', p_2 und T_2 auf die Grenze der Steighöhe h, so gilt für letztere die Bedingung

$$V(\gamma_2 - \gamma_2') = Q\,.$$

Wir nehmen an, dass im Ballon dieselbe Temperatur und derselbe Druck herrsche wie aussen. Dann ist nach der Zustandsgleichung (S. 210) wegen $\gamma = 1 : v$, wenn R' der Festwerth für die Gasfüllung,

$$\gamma_1 = \frac{p_1}{R\,T_1}, \quad \gamma_1' = \frac{p_1}{R'\,T_1},$$

$$\gamma_2 = \frac{p_2}{R\,T_2}, \quad \gamma_2' = \frac{p_2}{R'\,T_2}, \quad \text{daher}$$

$$\gamma_2 - \gamma_2' = (\gamma_1 - \gamma_1')\,\frac{p_2}{p_1}\,\frac{T_1}{T_2}, \quad \text{und}$$

$$V(\gamma_2 - \gamma_2') = V(\gamma_1 - \gamma_1')\,\frac{p_2}{p_1}\,\frac{T_1}{T_2} = Q;$$

daraus
$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V(\gamma_1 - \gamma_1')}{Q}\,\frac{T_1}{T_2}.$$

Setzt man diesen Werth in Gl. 4 (S. 212) ein, so entsteht

$$\mathrm{l}\left(\frac{V(\gamma_1 - \gamma_1')}{Q}\,\frac{T_1}{T_2}\right) = \frac{1}{R\,\tau}\,\mathrm{l}\left(\frac{T_1}{T_2}\right).$$

Daraus folgt
$$\log\frac{V(\gamma_1 - \gamma_1')}{Q} = \log\left(\frac{T_1}{T_2}\right)\left(\frac{1}{R\,\tau} - 1\right) \quad \text{oder}$$

10)
$$\log\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = \frac{1}{\dfrac{1}{R\,\tau} - 1}\,\log\left(\frac{V(\gamma_1 - \gamma_1')}{Q}\right).$$

Hierdurch ist das Verhältnis der Temperaturen unten und an der Grenze der Steighöhe bestimmt. Kennt man nun die Temperaturabnahme τ auf 1^{m} Höhe, so ist

11)
$$h = \frac{T_1 - T_2}{\tau}$$

Ist nach S. 208 $V = 700$, $\gamma_1 = 1{,}29$, $\gamma_1' = 0{,}45$, $V(\gamma_1 - \gamma_1') = 588$, $Q = 500$ und nimmt man auf 100^{m} eine Abnahme der Temperatur um $0{,}5^0$, d. h. $\tau = 0{,}005$, $R = 29{,}37$ an, so wird

$$\log\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = \frac{1}{\dfrac{200}{29{,}37} - 1}\,\log 1{,}176 \quad \text{und} \quad T_2 = 0{,}972\;T_1.$$

Beträgt nun die Temperatur unten $T_1 = 283$, so wird hiernach $T_2 = 275{,}1$, $T_1 - T_2 = 7{,}9^0$, mithin

$$h = 7{,}9 \cdot 200 = 1580^{\mathrm{m}}.$$

Eine etwas unrichtige Schätzung von τ beeinflusst das Ergebuis nicht sehr, weil τ sowohl in Gl. 10, als auch in Gl. 11 vorkommt. Mit $\tau = 0{,}006$ wird z. B. $h = 1608^{\mathrm{m}}$, also wenig verschieden. — Zur Erleichterung derartiger Rechnungen dienen Jordan's Barometrische Höhentafeln. (Hannover 1896. Helwing).

4. Gleichgewicht zwischen tropfbaren und gasförmigen Flüssigkeiten.

a) Barometer. Druckmesser.

Die Atmosphäre übt in der Höhe des Meeresspiegels einen Druck $p_0 = 10\,333^{\mathrm{kg}}/_{\mathrm{qm}}$ aus, also auch auf die Oberfläche einer ruhenden Flüssigkeit. Dieser Druck p_0 kann durch das Gewicht