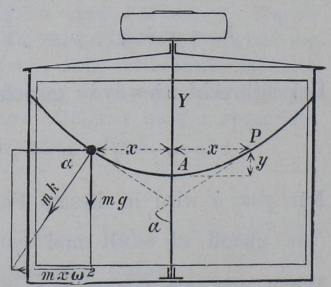
m) Tropfbar flüssige Körper in gleichmässiger Drehung um eine Achse.

Die in einem cylindrischen Gefässe befindliche Flüssigkeit werde durch eine mit Flügeln versehene Welle mittels einer oben angebrachten Riemenscheibe in gleichmässiger Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit ω erhalten (Fig. 224). Dann hat man an jedem Massentheilchen m zu der wirklichen Massenkraft mg nach Theil 1, S. 88 noch die Centrifugalkraft $m x \omega^2$ hinzuzufügen, (wenn x der Abstand des Massentheilchens von der Achse ist), um die gesammte Massenkraft mk zu erhalten. Letztere schliesst mit der Wagerechten einen Winkel α ein, für den gilt

Fig. 224.



1) $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{g}{x\omega^2}.$$

Liegt das Massentheilchen an der Oberfläche und denkt man sich die übrige Masse ausser jenem Theilchen zu einem festen, völlig glatten Körper erstarrt, so muss die Fläche, damit das Theilchen auf ihr in scheinbarer Ruhe verbleibe, rechtwinklig zu der Massenkraft mk stehen, d. h. jenen Winkel α mit der Lothrechten einschliessen. Da die Verhältnisse für alle Punkte einer wagerechten Ebene, die in dem gleichen Abstande x von der Achse sich befinden, dieselben sind, so muss die Oberfläche eine Umdrehungsfläche sein, deren Meridianlinie im Abstande x von der Achse eine Neigung α gegen die Drehachse hat. Für $x = 0$ ist (nach Gl. 1) $\alpha = 90^0$; mit wachsendem x verkleinert sich α, wird die Kurve steiler. Legt man durch den Punkt A, in welchem die Kurve die Drehachse schneidet, ein Achsenkreuz, sind x und y die Koordinaten eines Punktes P der Kurve, so ist das Neigungsverhältnis der Tangente im Punkte P gegen die Lothrechte AY

$$\operatorname{tg}\alpha = dx : dy.$$

Verbindet man hiermit Gl. 1, so wird

$$\omega^2 x\, dx = g\, dy \quad \text{oder}$$

$$d(\tfrac{1}{2}\omega^2 \cdot x^2) = d(g \cdot y).$$

Sind nun die Differentiale zweier Grössen einander gleich, so unterscheiden sich die Grössen selbst um eine von den Veränderlichen unabhängige Grösse C; mithin wird

2) $$\tfrac{1}{2}\omega^2 \cdot x^2 = g \cdot y + C.$$

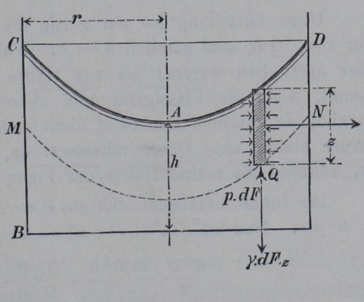
Die Grösse C ist abhängig von der willkürlichen Lage des Anfangspunktes A. Hier ist A so gelegt, dass er mit $x = 0$ und $y = 0$ der gesuchten Kurve angehört. Die allgemeine Gleichung 2 muss also für $x = 0$ und $y = 0$ gültig bleiben. Daraus entsteht die Bedingung $0 = 0 + C$, d. h. $C = 0$ und

3) $$x^2 = \frac{2g}{\omega^2} y \quad \text{oder} \quad y = \frac{\omega^2 x^2}{2g}.$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel mit lothrechter Achse vom Parameter $g : \omega^2$, übereinstimmend mit der Form des sich drehenden Armes (1. Theil, S. 91, Fig. 90), auf dem ein Massenpunkt an jeder Stelle in scheinbarer Ruhe verbleiben soll; die freie Oberfläche ist sonach ein Umdrehungs-Paraboloid. Je grösser ω ist, desto kleiner wird der Parameter, desto steiler stellt sich die Parabel in einem gewissen Abstande von der Achse. Da $\omega x = v$ die Umfangsgeschwindigkeit der Drehung an der Stelle P, so ist die Höhe y dieses Punktes über dem tiefsten Punkt A nach der zweiten Fassung der Gl. 3 gleich der Geschwindigkeitshöhe der Drehgeschwindigkeit des Punktes.

Um den Druck p an irgend einem Punkte Q der sich drehenden Flüssigkeit zu ermitteln, trennen wir (Fig. 225) ein lothrechtes, von Q bis zur Oberfläche reichendes Prisma heraus. An dessen Grundfläche dF wirkt die Druckkraft $p \cdot dF$ aufwärts; diese muss gleich dem Gewichte $\gamma \cdot dF \cdot z$ des Prismas sein, wenn Q in der lothrechten Tiefe z unter der Oberfläche liegt. Die Centrifugalkraft des Prismas kommt in der Gleichung der lothrechten Kräfte nicht vor. Also

Fig. 225.



4) $$p = \gamma z.$$

Für überall gleiche z bekommt auch p überall denselben Werth. Flächen gleichen Druckes haben also in allen Punkten gleiche lothrechte Tiefe unter der Oberfläche, d. h. dieselbe Form MN wie die Oberfläche CD, sind nur in lothrechtem Sinne dagegen verschoben.

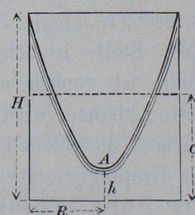
Liegt der tiefste Punkt A der Oberfläche um h über dem Boden, so ist der stärkste Druck im Gefässe, nämlich bei B, von der Grösse

$$p_1 = \gamma \cdot \overline{BC} = \gamma\left(h + \frac{\omega^2 r^2}{2g}\right), \tag{5}$$

wenn r der Drehungshalbmesser von B oder C.

Beispiel: Ein cylindrisches Gefäss (Fig. 226) von der Weite $2R$ und der Tiefe H sei ursprünglich auf eine Höhe c mit ruhender Flüssigkeit gefüllt. Wie gross muss die Drehungsgeschwindigkeit $v = \omega R$ am Umfange werden, damit die Flüssigkeit bis zum Rande steige? Bildet sich bei der Drehung im Gefäss ein vollständiges Paraboloid als Oberfläche, liegt also der tiefste Punkt A des Paraboloides noch um h über dem Boden, so ist, weil der Inhalt eines Paraboloides nach Theil 1, S. 138 halb so gross wie der des umschriebenen Cylinders, die Flüssigkeitsmenge im Gefässe

Fig. 226.



$$R^2\pi\left(H - {}^1\!/_2\,(H - h)\right) = {}^1\!/_2\,R^2\pi\,(H + h).$$

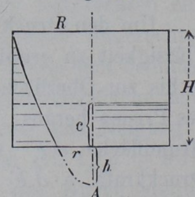
Dies muss $= R^2\pi c$ sein, d. h. $H + h = 2c$. Nach Gl. 3 (S. 197) ist aber

$$H - h = \frac{v^2}{2g}; \quad \text{mithin}$$

$$2H = 2c + \frac{v^2}{2g} \quad \text{oder}$$

$$\frac{v^2}{2g} = 2\,(H - c). \tag{6}$$

Fig. 227.



Diese Gleichung ist nur gültig für $c \geq {}^1\!/_2\,H$. Für $c = {}^1\!/_2\,H$ wird nämlich $h = 0$. War das Gefäss aber anfänglich weniger als zur Hälfte gefüllt, so kommt, wenn die Flüssigkeit zum oberen Rande steigt, der untere Theil des Paraboloids mit dem Punkte A nicht mehr zur Ausbildung. Der Flüssigkeitskörper nimmt eine Querschnittsform an, wie sie in Fig. 227 links gezeichnet ist, während die rechte Hälfte der Figur den Ruhezustand darstellt.

Ihr Inhalt berechnet sich zu $V = R^2\pi H - {}^1\!/_2\,R^2\pi\,(H + h) + {}^1\!/_2\,r^2\pi h = R^2\pi c$. Nun ist (Gl. 3) $r^2 : R^2 = h : (H + h)$, also

$$\frac{R^2 H}{2} - \frac{R^2 h}{2} + \frac{R^2 h^2}{2\,(H + h)} = R^2 c \quad \text{oder}$$

$$H^2 = 2c\,(H + h), \quad \text{mithin,}$$

$$\text{weil } \frac{v^2}{2g} = H + h \text{ ist,}$$

7) $$\frac{v^2}{2g} = \frac{H^2}{2c}; \qquad h = \frac{v^2}{2g} - H.$$

Für $c > {}^1/_2\,H$ gilt Gl. 6, für $c < {}^1/_2\,H$ Gl. 7, für $c = {}^1/_2\,H$ geben beide übereinstimmend $\frac{v^2}{2g} = H$.

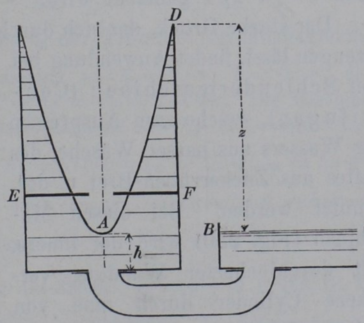
Für $c = {}^2/_3\,H$ giebt Gl. 6: $\frac{v^2}{2g} = \frac{2}{3}H$; der Punkt A (Fig. 226) bleibt um $h = {}^1/_3\,H$ über dem Boden.

Für $c = {}^1/_3\,H$ giebt Gl. 7: $\frac{v^2}{2g} = \frac{3}{2}H$; der tiefste Punkt A des nach unten fortgesetzten Paraboloides liegt (Fig. 227) um ${}^1/_2\,H$ unter dem Boden. ferner wird $r^2 : R^2 = {}^1/_3$, oder $r = 0{,}577\,R$.

Befinden sich im Gefässe keine Flügel, setzt man aber das Gefäss selbst in Drehung um seine lothrechte Achse, so nimmt der flüssige Körper nicht sofort an der Drehung Theil. Bei dem Fehlen jedes Reibungswiderstandes zwischen Gefäss und Flüssigkeit würde letztere durch Drehung des Gefässes überhaupt nicht mitgenommen werden, würde vielmehr in Ruhe verbleiben. Da aber in Wirklichkeit Reibung stattfindet, so wird durch schnelle Drehung des Gefässes auch die Flüssigkeit bald in nahezu die gleiche Drehgeschwindigkeit versetzt.

In den vorstehenden Beispielen wurde eine bestimmte Flüssigkeitsmenge in dem Gefässe angenommen, so dass das Steigen am Umfange eine Senkung in der Mitte zur Folge haben musste. Steht aber (Fig. 228) die Mitte des Bodens des cylindrischen Gefässes, in welchem das Wasser durch Flügel in Drehung um die lothrechte Achse des Gefässes versetzt wird (die Flügel sind in der Figur fortgelassen), durch eine Röhre mit einem grösseren Gefässe in Verbindung, so wird der Punkt A mit dem Wasserspiegel BC in gleicher Höhe liegen müssen, wenn das Wasser im Verbindungsrohr in Ruhe bleiben soll. Bei einer Umfangsgeschwindigkeit v des Wassers am Rande wird dann dessen höchster Punkt D

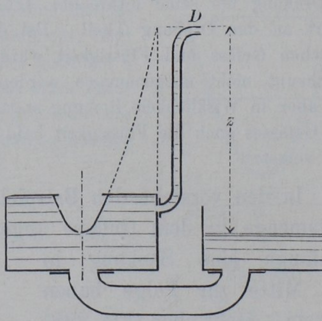
Fig. 228.



um $z = \frac{v^2}{2g}$ über BC liegen, so dass die Vorrichtung ein Mittel darstellt, Wasser zu heben. Bringt man etwas unterhalb D einen Überlauf an, so hat man eine Art von Kreiselpumpe. Doch genügt die Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gz}$ noch nicht zu deren Betriebe, d. h. zur Bewegung des Wassers durch die Pumpe hindurch, sondern nur zum Halten des Wassers im gehobenen Zustande. Für den Betrieb, für wirkliche Wasserförderung würde eine grössere Geschwindigkeit v erforderlich sein, deren Entwickelung aber über den Rahmen dieses Buches hinausgeht.

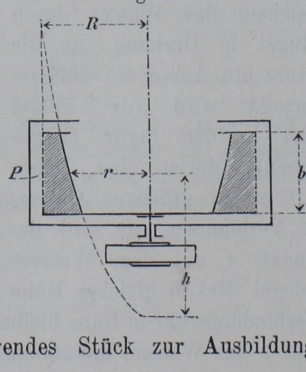
In den Druckverhältnissen des flüssigen Körpers wird dadurch nichts geändert, dass man in Fig. 228 bei EF eine Platte einschiebt, sie mit dem Gefässmantel fest verbindet und den darüber befindlichen Theil des Gefässes und der Flüssigkeit fortnimmt. Es entsteht dann eine Vorrichtung (Fig. 229), bei welcher der am Umfange herrschende Druck sich dadurch bemerkbar machen wird, dass das Wasser in einem seitlichen Rohre sich bis D über das Unterwasser erheben wird, wenn $v = \sqrt{2gz}$ gemacht wird.

Fig. 229.



Der starke Druck, der sich durch grosse Umfangsgeschwindigkeit erzeugen lässt, findet Anwendung bei den Schleudermaschinen (Centrifugen), welche zum Auspressen des Wassers aus nasser Wäsche, des Saftes aus Zuckerrüben-Brei u. dgl. benutzt werden. Bei diesen Maschinen (Fig. 230) wird der innere, mit durchlöcherter Wandung versehene Cylinder durch eine von unten mit ihm verbundene Welle in so schnelle Drehung gesetzt, dass von der paraboloidischen Oberfläche nur ein kleines, sehr steil ansteigendes Stück zur Ausbildung

Fig. 230.



gelangt. Als flüssigen Körper wollen wir uns Rübenmasse denken, welche den schraffirten ringförmigen Körper bildet, der annäherungsweise als ein Ring von der Wandstärke $R - r$ angesehen werden kann. Der drehbare Cylinder ist von einem festen Gehäuse umgeben, in welches der Saft durch die Öffnungen des Mantels eintritt. Der Druck an dem Punkte P beträgt

$$p = \gamma\left(\frac{v^2}{2g} - h\right) \quad \text{oder}$$

$$\text{weil (nach Gl. 3, S. 197) } h = \frac{\omega^2 r^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}\frac{r^2}{R^2},$$

$$p = \gamma \frac{v^2}{2g}\frac{R^2 - r^2}{R^2}.$$

Der stärkste Druck am unteren Rande ist noch um $\frac{1}{2}\gamma b$ grösser. Doch ist dieser Unterschied unbedeutend.

Ist b die Höhe der Trommel, so beträgt das Gewicht der eingefüllten Rübenmasse $Q = \gamma(R^2 - r^2)\pi b$, so dass

$$p = \frac{Q}{R^2 \pi b}\frac{v^2}{2g}$$

geschrieben werden kann, oder, wenn man den Inhalt der ganzen Trommel $R^2\pi b = V$ setzt,

$$8) \qquad p = \frac{Q}{V}\frac{v^2}{2g}.$$

Der Druck ist also mit der Ladung Q der Trommel verhältnisgleich.

Beispiel: Für eine Schleudermaschine sei $R = 0{,}5^{\text{m}}$, $b = 0{,}5^{\text{m}}$, die Ladung $Q = 160^{\text{kg}}$, der Rauminhalt $V = 0{,}5^2\pi \cdot 0{,}5 = 0{,}393^{\text{cbm}}$. Die Maschine mache 1000 Umdrehungen in der Minute, dann ist $v = \frac{1}{6} \cdot 314 = 52{,}3^{\text{m}}/_{\text{sek.}}$ mit $\frac{v^2}{2g} = 140^{\text{m}}$ und $p = \frac{160}{0{,}393} \cdot 140 = 57\,000^{\text{kg}}/_{\text{qm}} = 5{,}7^{\text{kg}}/_{\text{qcm}} = 5{,}7^{\text{at}}$. Die Wandung der Trommel muss also einen inneren Druck von $5{,}7^{\text{at}}$ aushalten. Das Mantelblech erfährt eine Spannung $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, worin $\sigma_1 = 2\gamma_1 \frac{v^2}{2g}$ (s. S. 95, Gl. 4) durch die eigene Masse des Bleches, $\sigma_2 = p\frac{R}{\delta}$ (s. S. 166, Gl. 2) durch den innern Druck p entsteht. Ist $\gamma_1 = 7800^{\text{kg}}/_{\text{cbm}}$, $\delta = 5^{\text{mm}} = 0{,}005^{\text{m}}$, so wird

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= 2 \cdot 7800 \cdot 140 = 2\,184\,000 \\
\sigma_2 &= 57\,000 \cdot 100 \;\;= \underline{5\,700\,000} \\
\sigma &= \qquad\qquad\qquad\; 7\,884\,000^{\text{kg}}/_{\text{qm}}
\end{aligned}$$

oder $\sigma = 788^{\,at}$. Diese erhebliche Anspannung macht es erklärlich, dass derartige Schleudermaschinen in ähnlicher Weise wie Dampfkessel einer sorgfältigen Überwachung unterliegen; besonders muss mit Rücksicht auf Gl. 8 eine Überladung (zu grosses Q) vermieden werden.

3. Gleichgewicht gasförmiger Flüssigkeiten.

Während tropfbar flüssige Körper nahezu unveränderlichen Rauminhalt zeigen, ist der Rauminhalt der Gase in hohem Maſse veränderlich. Wie man das Verhalten elastisch-fester Körper mit Hülfe von Elasticitätsgesetzen beurtheilen konnte, so giebt es für Gase einfache Gesetze, denen ihr äusseres Verhalten unterworfen ist. Eine Änderung des Rauminhaltes einer Gasmenge kann erfolgen durch eine Änderung seiner Temperatur oder seines Druckes (oder beider); die Beziehung zwischen diesen Grössen heisst die Zustandsgleichung.

Es empfiehlt sich, die allgemeinen Gesetze über die Raumänderung auf eine bestimmte Menge eines Gases, nämlich auf $1^{\,kg}$ zu beziehen. Der Rauminhalt, den $1^{\,kg}$ eines Gases in irgend einem Zustande einnimmt, heisst der Einheitsraum oder das specifische Volumen und wird mit v bezeichnet. Die Dichte, d. h. das Gewicht von $1^{\,cbm}$ wird auch hier mit γ bezeichnet. Da nun Dichte mal Rauminhalt gleich dem Gewichte ist, so wird das Gewicht des Einheitsraumes v sein γv, und dies muss $= 1^{\,kg}$ sein, weil v ja die Raummenge von $1^{\,kg}$ war. Somit ist

1) $$\gamma v = 1; \quad v = 1 : \gamma.$$

a) Der Boyle-Mariotte'sche Satz.

Bei gleichbleibender Temperatur ändert sich die Dichte eines Gases verhältnisgleich mit dem Drucke, der Einheitsraum also umgekehrt verhältnisgleich mit dem Drucke.

Beziehen sich p_1, v_1, γ_1 auf einen Anfangszustand, p, v, γ auf einen anderen Zustand, so ist zufolge der Erfahrung

2) $$\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{p}{p_1} = \frac{v_1}{v},$$

oder es ist $pv = \dfrac{p}{\gamma}$ eine unveränderliche Grösse, solange die Temperatur unverändert erhalten wird.