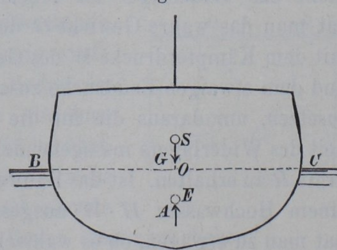
vom Wasser durchzogen ist, der unter Wasser befindliche Theil des Mauerwerks nur mit seinem scheinbaren Gewichte $Q = G - \gamma V = (\gamma_1 - \gamma) V$, d. h. bei $\gamma_1 = 2\gamma$ nur mit der Hälfte seines Gewichtes einzuführen sein. Ist der Boden kiesig, so dürfte das Wasser wohl Wege finden, um, wenn auch nicht sofort, doch mit der Zeit, unter dem Grundmauerwerke mit seinem vollen Drucke zu wirken, wogegen auch eine das Mauerwerk umschliessende Spundwand nicht schützen würde. Bei felsigem Untergrunde könnte es vielleicht gelingen, das Mauerwerk mit Cementmörtel dem Felsen wasserdicht anzuschliessen. Von genauer Untersuchung des Grundes und sorgfältiger Ausführung ist es abhängig, ob man in solchem Falle den Wasserdruck ausser Acht lassen darf.

k) Gleichgewicht schwimmender Körper.

Ist die mittlere Dichte γ_1 eines Körpers kleiner als diejenige des Wassers, so fällt sein scheinbares Gewicht Q für Wasser $= G - \gamma V = (\gamma_1 - \gamma) V$ negativ aus. Der Körper wird daher, wenn er nicht durch eine besondere abwärts gerichtete Kraft Q niedergehalten wird, sich aus dem Wasser erheben, auf dem Wasser schwimmen und wird im Gleichgewichte sein, wenn der Auftrieb γV des eingetauchten Theiles V, der Verdrängung (des Deplacement), sich mit dem wahren Gewichte G des Körpers im Gleichgewichte hält. Dazu ist erforderlich, dass $\gamma V = G$ sei und dass der Schwerpunkt S des Körpers mit dem Schwerpunkt E der verdrängten Wassermasse V in derselben Lothrechte liege. Die Gerade SE im Körper heisst die Schwimmachse, die zu ihr rechtwinklige Ebene BOC des Körpers, welche im Gleichgewichte mit dem Wasserspiegel zusammenfällt, wird die Schwimmebene genannt.

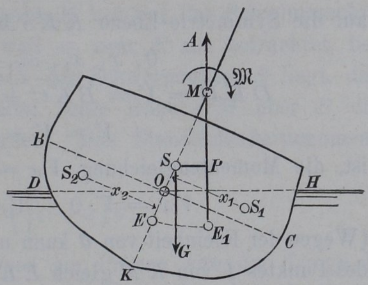
Fig. 213.



Es soll nun die Sicherheit eines schwimmenden Schiffes gegen Umkippen untersucht werden. Das Schiff habe eine Symmetrieebene, die durch die Schwimmachse SE geht.

Es werde in irgend einer Weise, etwa mittels zweier wagerechten Taue ein Kräftepaar $\mathfrak{M}$ auf den Körper ausgeübt, dessen Achse rechtwinklig zur Querschnitts-Ebene steht, und dadurch eine Schiefstellung um den kleinen Winkel ϑ bewirkt. Hierdurch ändert sich die Form der Verdrängung und damit die Lage des Auftriebes A. Ist nun auch in dieser schrägen Lage (Fig. 214) Gleichgewicht, bilden G und A ein Kräftepaar, welches das Umsturzmoment $\mathfrak{M}$ aufhebt, so befand sich das Schiff in der aufrechten Lage (vor Einwirkung des Momentes $\mathfrak{M}$) im sicheren Gleichgewichte; nach einer Störung desselben kehrt es unter Einwirkung von G und A selbstthätig in die aufrechte Lage zurück. Nach Fig. 214 ist dazu erforderlich, dass die neue Lage von A (durch den Schwerpunkt E_1 der jetzigen Verdrängung DKH) rechts von G, d. h. rechts von S liege, dass A die Schwimmachse in einem Punkte M schneide, der oberhalb des Schwerpunktes S liegt. Das Standsicherheits-Moment ist dann

Fig. 214.



$$\mathfrak{M} = G \cdot SP = \gamma V \cdot \overline{SM} \sin \vartheta,$$

oder bei kleinem Winkel ϑ

$$1) \qquad \mathfrak{M} = G \cdot \overline{SM} \cdot \vartheta = \gamma V \cdot \overline{SM} \cdot \vartheta.$$

Die Länge SM ist für die Standsicherheit massgebend. Nennt man die seitliche Verschiebung des Schwerpunktes der Verdrängung

$$EE_1 = x,$$

so kann EE_1 bei kleinem ϑ auch als Kreisbogen um M aufgefasst und $EE_1 = x = EM \cdot \vartheta$ gesetzt werden. Mit $ES = e$ wird

$$2) \qquad SM = ME - e = \frac{x}{\vartheta} - e.$$

Da die Störung der aufrechten Lage durch ein Kräftepaar hervorgerufen wurde, so bleibt stets $A = G$, d. h. die Verdrängung V der Grösse nach unverändert; mithin muss das eintauchende

Keilstück $V_1 = COH$ mit dem Schwerpunkte S_1 gleich dem austauchenden Keilstücke $V_2 = BOD$ mit dem Schwerpunkte S_2 sein. Bezieht man nun die Schwerpunkte

$$E \quad E_1 \quad S_1 \quad S_2$$

auf die Symmetrie-Ebene $KESM$ mit den Abständen

$$0, \; x, \; x_1, \; x_2, \quad \text{so gilt, weil}$$

$$DKH = V = BKC + OCH - OBD, \quad \text{d. h.}$$

$$V = V + V_1 - V_2$$

ist, die Momentengleichung $Vx = \Sigma(Vx)$ (Theil 1, S. 126):

$$Vx = V \cdot 0 + V_1 x_1 - V_2(-x_2).$$

(Wegen der Kleinheit von ϑ kann nämlich der rechtwinklige Abstand des Punktes E von KM gleich $EE_1 = x$ gesetzt werden; auch wollen wir voraussetzen, dass BC und DH sich auf der Schwimmachse in O schneiden und dass $x_1 = x_2$ gesetzt werden darf. Der Abstand des Punktes S_2 ist als $-x_2$ eingeführt, da S_2 links von KM liegt.) Hiernach wird

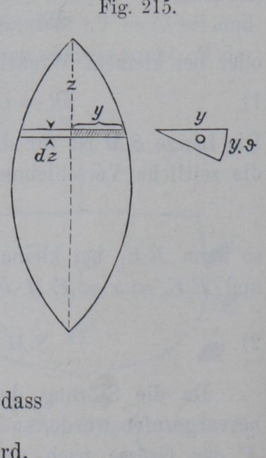
3) $$x = \frac{2 V_1 x_1}{V} \quad \text{und} \quad SM = \frac{2 V_1 x_1}{V \vartheta} - e.$$

Die Grösse $V_1 x_1$ ist von der Gestalt der Wasserlinie (Fig. 215) abhängig. Ist in einem Abstande z von der Vorderkante die halbe Breite in der Schwimmebene y, so liefert ein Längentheilchen dz zu V_1 einen Beitrag $\frac{1}{2} y^2 \cdot \vartheta \cdot dz$ und zu $V_1 x_1$ annähernd einen Beitrag $\frac{1}{2} y^2 \cdot \vartheta \cdot \frac{2}{3} y \cdot dz = \frac{1}{3} y^3 \cdot \vartheta \cdot dz$, so dass

$$V_1 x_1 = \tfrac{1}{3} \vartheta \int y^3 \cdot dz$$

wird. Nun ist aber $\frac{1}{3} y\, dz \cdot y^2$ das Trägheitsmoment des in Fig. 215 schraffirten Theilchens der Schwimmfläche in Bezug auf ihre Längsachse (Theil 1, S. 271). Also ist das Trägheitsmoment der ganzen Schwimmfläche in Bezug auf ihre Längsachse

Fig. 215.



4) $$\mathfrak{J} = \frac{2}{3} \int y^3 \cdot dz, \quad \text{so dass}$$

$$2 V_1 \cdot x_1 = \mathfrak{J} \cdot \vartheta \quad \text{wird.}$$

Führt man dies in Gl. 3 ein, so ergiebt sich

$$5)\qquad SM = \frac{\mathfrak{J}}{V} - e.$$

Diese Länge ist hiernach bei kleinem Neigungswinkel ϑ von diesem Winkel unabhängig, oder der Punkt M hat auf der Schwimmachse eine bestimmte Lage und wird, weil er, vom E aus betrachtet, bei sicherem Gleichgewichte jenseits des Schwerpunktes S liegt, das Metacentrum ($\mu\varepsilon\tau\alpha$ = jenseits), seine Höhe SM über S die metacentrische Höhe genannt. Das Standsicherheitsmoment ist sonach

$$6)\qquad \mathfrak{M} = \gamma V\left(\frac{\mathfrak{J}}{V} - e\right)\vartheta.$$

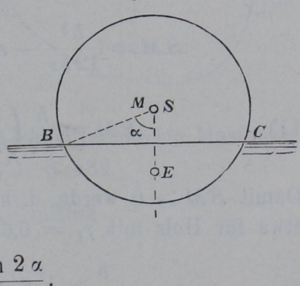
Ist der schwimmende Körper ein Prisma von der Länge l, ist F der Querschnitt der Verdrängung $V = Fl$ und b die Breite in der Schwimmebene, so wird $\mathfrak{J} = {}^1/_{12}\, l b^3$, daher

$$7)\qquad SM = \frac{b^3}{12F} - e.$$

Die Länge SM ist jedoch nur für geringe Neigungswinkel von deren Grösse unabhängig. Für die stärkeren Bewegungen der Seeschiffe darf ein festes Metacentrum nicht angenommen werden.

Hat der eingetauchte Raum, die Verdrängung V, die Gestalt eines Cylinder- oder Kugelabschnittes, so ändert eine Drehung die Form von V gar nicht; es geht der Auftrieb stets durch die Achse des Cylinders bezw. den Mittelpunkt der Kugel. Ist der Körper ein Cylinder oder eine Kugel überall gleicher Dichte γ_1, so fallen Schwerpunkt S und Metacentrum M zusammen; ein derartiger Körper schwimmt also in unentschiedenem Gleichgewichte; er setzt einer Drehung keinen Widerstand entgegen und kehrt auch nicht in die ursprüngliche Lage zurück.

Fig. 216.



Für die Eintauchung eines Cylinders (Fig. 216) gilt die Gleichung $r^2 \pi \gamma_1 = r^2(\alpha - {}^1/_2 \sin 2\alpha)\gamma$. Diese Gleichung lässt sich nach α nur durch Probiren auflösen, nach $\gamma_1 : \gamma$ aber mit:

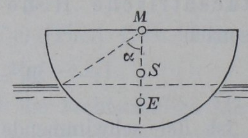
$$8)\qquad \frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{2\pi}.$$

Soll $\alpha = 60^0 = {}^1/_3\,\pi$ werden, so muss

$$\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{{}^2/_3\,\pi - 0{,}866}{2\,\pi} = 0{,}195 \quad \text{sein.}$$

Für einen homogenen Halbcylinder (Fig. 217) ist die metacentrische Höhe $SM = \frac{4}{3}\,\frac{r}{\pi}$ (Theil 1, S. 132.) Die Eintauchungstiefe ist bedingt durch

Fig. 217.



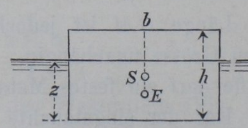
$^1/_2\,r^2\,\pi\,\gamma_1 = r^2(\alpha - {}^1/_2 \sin 2\,\alpha)\,\gamma$ oder

9) $$\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{2\,\alpha - \sin 2\,\alpha}{\pi}.$$

Soll jetzt $\alpha = 60^0$ werden, so muss $\gamma_1 : \gamma = 2 \cdot 0{,}195 = 0{,}39$ sein.

Für ein homogenes rechtwinkliges Parallelepiped von der Höhe h, der Breite b, der Dichte γ_1 (Fig. 218) gilt für die Eintauchungstiefe z die Gleichung

Fig. 218.



$$\gamma z b = \gamma_1 h b, \quad \text{d. h.}$$

10) $$z = h\,\frac{\gamma_1}{\gamma}.$$

Der Schwerpunkt S des Körpers liegt um $^1/_2\,h$, der Schwerpunkt E der Verdrängung um $^1/_2\,z$ vom Boden entfernt, mithin ist

$$e = ES = \frac{1}{2}(h - z) = \frac{h}{2}\left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma}\right).$$

Dann wird nach Gl. 7 (S. 191), weil $F = bz$,

$$SM = \frac{b^3}{12\,bz} - e = \frac{b^2}{12\,h}\,\frac{\gamma}{\gamma_1} - \frac{h}{2}\left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma}\right),$$

11) $$SM = \frac{h}{12}\left(\frac{b^2}{h^2}\,\frac{\gamma}{\gamma_1} - 6\left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma}\right)\right).$$

Damit $SM > 0$ werde, d. h. Standsicherheit vorhanden sei, muss etwa für Holz mit $\gamma_1 = 0{,}6\,\gamma$

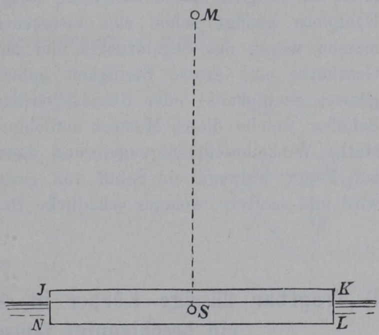
$$\frac{b}{h} > \sqrt{6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4} = 1{,}2 \quad \text{sein.}$$

Ist aber (Fig. 219) $b = 8h$ und wiederum $\gamma_1 = 0{,}6\,\gamma$, so wird

$$SM = \frac{h}{12}\left(\frac{64}{0{,}6} - 6 \cdot 0{,}4\right) = 8{,}7\,h.$$

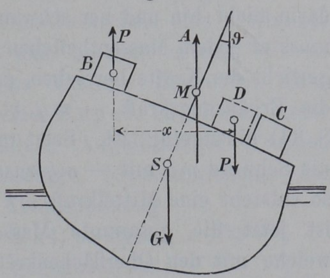
Ein solcher flossartiger Körper hat also eine grosse metacentrische Höhe und bedeutende Standsicherheit. Jedoch gilt dies nur, so lange von den Oberkanten J und K keine unter Wasser, von den Unterkanten N und L keine über Wasser liegt. Bei stärkeren Neigungen, wie sie in unruhigem Wasser leicht vorkommen, ist die Standsicherheit geringer.

Fig. 219.



Bei neu gebauten Schiffen wird die metacentrische Höhe SM zuweilen durch einen Krängungs-(Neigungs-)Versuch ermittelt. Das Schiff möge anfänglich gerade geschwommen haben. Wird nun eine schwere Last P von B etwa nach D verschoben um die Entfernung x, so ist die Fortnahme von B gleichbedeutend mit der Anbringung einer dort aufwärts gerichteten Kraft P, während bei D eine gleiche abwärts gerichtete Kraft auftritt. Die Verschiebung bewirkt demnach ein Kräftepaar Px. Entsteht dabei eine Schrägstellung um den Winkel ϑ, der mittels eines Lothes am Mastbaum abgelesen werden kann, so ist nach Gl. 1, S. 189

Fig. 220.



$$G \cdot \overline{SM} \cdot \vartheta = P \cdot x, \quad \text{mithin}$$

$$SM = \frac{P}{G}\,\frac{x}{\vartheta}.$$

Beispiel: Für ein Seeschiff betrage die Verdrängung $V = 10\,000$ cbm, dann ist, weil für Seewasser $\gamma = 1025$ kg/cbm, $G = 10\,250$ t. Wird eine schwere Last (etwa ein Geschütz) von $P = 20$ t um 5 m seitwärts verschoben und entsteht dadurch eine Neigung $\vartheta = {}^1/_2{}^0 = 0{,}0087$, so folgt

$$SM = \frac{20}{10\,250}\,\frac{5}{0{,}0087} = 1{,}11 \text{ m}.$$

Wie gross die metacentrische Höhe für Schiffe verschiedenen Zweckes sein muss, ist lediglich durch Erfahrung festgestellt worden. Bei transatlantischen Dampfern genügt schon eine metacentrische Höhe von 0,3 m; Segelschiffe müssen wegen des Segeldruckes und Kriegsschiffe wegen des Abfeuerns der Geschütze eine grosse Steifigkeit haben, daher etwa $SM = 1$ m. Ein zu grosses Steifigkeits- oder Standsicherheits-Moment ist für die Festigkeit des Schiffes, welche dieses Moment aufnehmen muss, nicht vortheilhaft, hat auch starke Winkelbeschleunigungen und daher heftige, unangenehme Bewegungen zur Folge, während ein Schiff von geringerer Steifigkeit weniger angegriffen wird und sanftere, weniger schädliche Bewegungen ausführt.

l) Tropfbar flüssige Körper in scheinbarer Ruhe in Bezug auf ein beschleunigt fortschreitendes Gefäss.

Das Gefäss (Fig. 221) möge eine gleichbleibende Beschleunigung q mit der Neigung α aufwärts haben. Soll nun eine Flüssigkeit darin in scheinbarer Ruhe verbleiben, darin nicht hin und her schwanken, so muss an jedem Massentheilchen Gleichgewicht der Kräfte herrschen, nachdem die Ergänzungskraft $-mq$ (1. Theil, S. 84) hinzugefügt ist. Setzt man nun die Schwere mg mit $-mq$ zusammen, so entsteht eine Mittelkraft mk. Dies ist jetzt die gesammte Massenkraft, welche mit den Oberflächenkräften im Gleichgewichte sein muss. An die Stelle der einzigen Massenkraft mg im wirklichen Ruhezustande tritt nun in jeder Beziehung mk. Der Wasserspiegel muss daher jetzt rechtwinklig zur Richtung von k stehen. Für den Druck p in einem rechtwinkligen Abstande z vom Wasserspiegel gilt $p \cdot dF = \frac{\gamma}{g} dF \cdot zk$, weil ein Prisma von

Fig. 221.