Gleichgewicht erfordert dann $S = S + dS$, d. h. $dS = 0$, S überall gleich. Ferner gemäss dem Krafteck in Fig. 204:

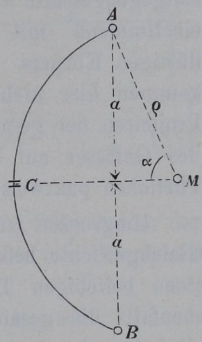
$$S \sin {}^1/_2\, d\vartheta = {}^1/_2\, q\, ds \quad \text{oder,}$$

wegen $\sin d\vartheta = d\vartheta$,

$$S\, d\vartheta = q\, ds = q\, \varrho\, d\vartheta, \quad \text{daher}$$

1) $$\boldsymbol{S = q\,\varrho}.$$

Fig. 205.



Da nun S überall gleich war, so muss wegen der Unveränderlichkeit von q auch ϱ über die ganze Länge des Riegels denselben Werth haben, d. h. der Riegel muss kreisförmig sein.

Zwischen den Wendesäulen A und B (Fig. 205) im Abstande $2a$ sind nun verschiedene Kreisbögen möglich. Für einen Halbmesser ϱ und einen halben Mittelpunktswinkel α ist die Bogenlänge $AC = \varrho\alpha$, die halbe Weite $a = \varrho \sin\alpha$. Einer Spannkraft $S = q\varrho$ entspricht ein Querschnitt $F = q\varrho : \sigma$, wenn δ die Spannung, daher ein Rauminhalt des Riegels eines Flügels

$$V = F\varrho\alpha = \frac{q}{\sigma}\varrho^2\alpha = \frac{q}{\sigma}a^2\frac{\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Soll V möglichst klein werden, so muss nach der Regel vom Minimum

$$0 = \sin^2\alpha - \alpha \cdot 2 \sin\alpha \cos\alpha \quad \text{oder}$$

2) $$\operatorname{tg}\alpha = 2\alpha \quad \text{sein.}$$

Dieser Bedingung genügt ein Winkel $\alpha = 66^\circ 47'$ mit $\sin\alpha = 0{,}919$; dafür wird $\rho = a : 0{,}919 = 1{,}088\,a$,

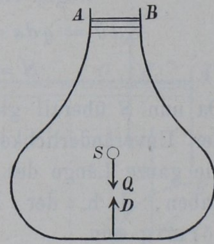
$$F = \frac{q}{\sigma}\rho = 1{,}088\,a\frac{q}{\sigma}.$$

Praktischen Gebrauch macht man von dieser Untersuchung nicht; sie ist nur eine Übungsaufgabe der angewandten Mathematik.

i) Gesammtdruck auf die Gefässwände. Auftrieb einer Flüssigkeit.

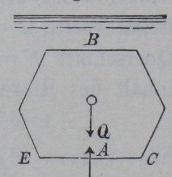
Befindet sich in einem Gefässe (Fig. 206) ein flüssiger Körper mit freiem Wasserspiegel im Gleichgewichte, so wirkt an der Flüssigkeit als Massenkraft das Gewicht $Q = \gamma V$, lothrecht abwärts durch den Schwerpunkt S der Flüssigkeit gehend. Ist D der Gesammtdruck der Gefässwände gegen die Flüssigkeit, d. h. die gesammte Oberflächenkraft, so muss D mit Q im Gleichgewichte sein, d. h. es ist $D = Q = \gamma V$, lothrecht aufwärts durch den Schwerpunkt der Flüssigkeit gehend. Der Gesammtdruck des flüssigen Körpers auf die Gefässwände ist nach dem Gesetze der Wechselwirkung das Entgegengesetzte von D, d. h. völlig übereinstimmend mit dem Gewichte Q des flüssigen Körpers. Seitendrücke D_x und D_y kommen hier nicht in Betracht, weil beim Projiciren der gesammten inneren Oberfläche des Gefässes auf eine lothrechte Ebene die Theilchen paarweise auf einander fallen.

Fig. 206.



Umgrenzen wir in einem grösseren, im Gleichgewichte befindlichen flüssigen Körper einen beliebigen Theil BCE (Fig. 207), so müssen an diesem ebenfalls die gesammte Massenkraft Q und der Gesammtdruck A aller umgebenden Flüssigkeitstheilchen sich aufheben. D. h. es muss $A = Q = \gamma V$, aufwärts gerichtet sein und durch den Schwerpunkt des Körpers V gehen. Vertauscht man nun den Flüssigkeitstheil BCE mit einem anderen Körper, dessen Oberfläche genau mit der Umgrenzung BCE übereinstimmt, so übt die umgebende Flüssigkeit auf den fremden Körper ganz dieselben Kräfte aus, wie auf den etwa erstarrt gedachten Theil BCE des flüssigen Körpers, mithin ist der Gesammtdruck der Flüssigkeit gegen einen in sie eingetauchten Körper

Fig. 207.



1) $$A = \gamma V.$$

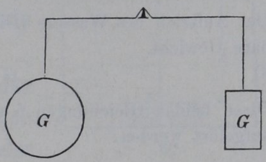
Diese Kraft heisst der **Auftrieb.** Sie ist ganz unabhängig von der Massenvertheilung des eingetauchten Körpers, lediglich bedingt durch den Flüssigkeitskörper, dessen Stelle der feste Körper einnimmt, also durch die von dem festen Körper verdrängte Flüssigkeit.

Der Auftrieb einer Flüssigkeit gegen einen in dieselbe eingetauchten Körper ist lothrecht aufwärts gerichtet, gleich dem Gewichte der verdrängten Flüssigkeit und geht durch deren Schwerpunkt.

Diese Regel gilt sowohl für einen völlig, als auch für einen nur theilweise eingetauchten Körper. In letzterem Falle bedeutet V

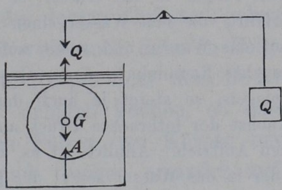
den Rauminhalt des unter Wasser befindlichen Theiles des eingetauchten Körpers. Befindet sich der eingetauchte Körper ganz unter Wasser und ist er nicht zusammendrückbar, so ist der Auftrieb unabhängig von der Tiefe des Körpers unter Wasser, weil nach S. 157 die Dichte γ unveränderlich ist.

Fig. 208.



Hängt man einen Körper vom Gewichte G an eine gleicharmige Waage (Fig. 208), so muss an der anderen Seite derselben ein Gewichtstück G angebracht werden, um den Körper im Gleichgewichte zu halten. Ist aber (Fig. 209) der an der Waage hängende Körper vom Rauminhalte V ganz in eine Flüssigkeit von der Dichte γ eingetaucht und ist sein Gewicht G grösser als der Auftrieb γV, so ist nur eine aufwärts gerichtete Kraft

Fig. 209.



2) $$Q = G - A$$

nöthig, um den Körper im Gleichgewichte zu halten. Diese Kraft Q heisst das scheinbare oder relative Gewicht des Körpers in Bezug auf die Flüssigkeit. Die Wägung eines Körpers im eingetauchten Zustande ersetzt in manchen Fällen eine Bestimmung des Rauminhaltes. Kennt man nämlich V, so ist damit auch der Auftrieb $A = \gamma V$ gegeben, d. h. der Unterschied von G und Q. Ist es aber nicht thunlich, V durch Messung zu bestimmen, so führt die Ermittelung des wahren und des scheinbaren Gewichtes (G und Q) zum Ziele, denn es ist nun

3) $$V = (G - Q) : \gamma .$$

Damit hat man denn auch die mittlere Dichte γ_1 des eingetauchten Körpers, nämlich

4) $$\gamma_1 = \frac{G}{V} = \gamma \frac{G}{G - Q},$$

oder, wenn er homogen ist, seine wahre Dichte.

Bekanntlich verwandte schon Archimedes (281—212 vor Chr.), der das Wesen des Auftriebes beim Baden erkannte, die doppelte Wägung, um festzustellen, wie viel Gold und wie viel Silber in der Krone des Hiero von Syrakus enthalten sei. Ist V_1 die Raummenge Goldes von der Dichte γ_1, V_2 die Raummenge Silbers von der Dichte γ_2 in der Krone, so ist deren wahres Gewicht

5) $$G = \gamma_1 V_1 + \gamma_2 V_2 .$$

Der Auftrieb des Wassers (Dichte γ) ist $A = \gamma\ (V_1 + V_2)$, mithin das scheinbare Gewicht.

6) $$G - Q = \gamma (V_1 + V_2).$$

Diese beiden Gleichungen 5 und 6 können nach den Unbekannten V_1 und V_2 aufgelöst werden:

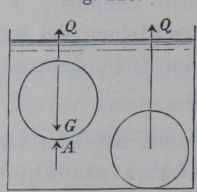
7) $$V_1 = \frac{G\left(1 - \frac{\gamma_2}{\gamma}\right) + \frac{\gamma_2}{\gamma} Q}{\gamma_1 - \gamma_2}.$$

Um V_2 zu erhalten, braucht man in Gl. 7 nur die Indices 1 und 2 mit einander zu vertauschen.

Steht ein Gefäss mit Wasser auf einer Waagschale und taucht man mit dem Finger in das Wasser, so muss die Waagschale sich senken. Der Finger erfährt von dem Wasser einen Auftrieb A, und dieselbe Kraft übt der Finger auf das Wasser und somit auf das Gefäss nach unten aus. Ist V der eingetauchte Rauminhalt, F der Querschnitt des Gefässes in der Höhe des Wasserspiegels, so steigt ja auch das Wasser im Gefässe um $\varDelta h = V : F$, dadurch wächst der lothrechte Druck auf das Gefäss um $\gamma F \varDelta h = \gamma V$, d. h. genau um den Auftrieb. Ähnlich ist es, wenn man ein Stück Holz oder einen Fisch auf oder in das Wasser setzt; der lothrechte Druck auf das Gefäss ist dann, wenn wieder Gleichgewicht herrscht, genau um das Gewicht des Holzes oder Fisches gewachsen.

Die Kraft $Q = G - A = G - \gamma V$, die einen unter Wasser befindlichen Körper in der Schwebe hält (Fig. 210), genügt auch, denselben langsam und gleichmässig im Wasser aufwärts zu bewegen (bei schneller Bewegung entstehen Bewegungswiderstände, die von der Geschwindigkeit abhängig sind). Auch wenn der Körper auf dem Boden des Gefässes liegt, ihn aber nur in einzelnen Punkten oder Linien, nicht in Flächen, berührt, wird eine aufwärts gerichtete, die Grösse $Q = G - \gamma V$ nicht wesentlich überschreitende Kraft hinreichen, den Körper vom Boden empor zu heben.

Fig. 210.



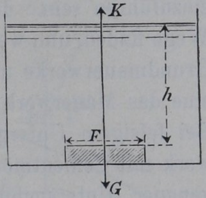
Zweifelhaft kann man über die Grösse der zum Emporheben vom Boden erforderlichen Kraft K sein, wenn der Körper den Boden des Gefässes mittels einer grösseren Fläche berührt. In dem

Falle der Fig. 211 lastet auf der oberen Fläche des Körpers eine Druckkraft $\gamma F h$, und es muss

8) $$K \geqq G + \gamma \cdot F \cdot h$$

sein, um den Körper vom Boden abzuheben, wenn an der unteren Fläche des Körpers kein Wasserdruck wirkt.

Fig. 211.



Letztere Annahme wird aber in den meisten Fällen nicht zutreffen. Befand sich in dem Gefässe schon Wasser, bevor der Körper auf den Boden gesenkt wurde, so wird unter ihm eine dünne Wasserschicht verbleiben, die den Wasserdruck auf die untere Fläche überträgt, so dass nur

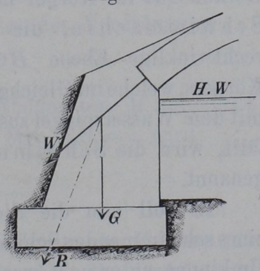
9) $$K \geqq G - \gamma V$$

zum Heben erforderlich sein wird.

Wird der Körper auf den Boden des leeren Gefässes gelegt und dann erst mit Wasser übergossen, so wird auch dann in Folge kleiner Unebenheiten, Poren u. dgl. an dem Körper oder dem Boden in der Regel Wasser unter den Körper dringen können, so dass Formel 9 gültig bleibt. Nur in solchen Fällen, wo Körper und Boden ohne Poren, sauber bearbeitet und trocken einander aufgeschliffen sind, wird das nachträglich eingeführte Wasser vielleicht nicht unter den Körper dringen können, so dass Formel 8 anzuwenden wäre.

Derartige Erwägungen sind erforderlich, wenn es sich um die Standsicherheit des Widerlagers einer gewölbten Brücke handelt. Steht das Widerlager im Trocknen, so hat man das wahre Gewicht G desselben mit dem Kämpferdrucke W des Gewölbes und dem etwaigen Enddrucke zusammenzusetzen, um daraus die für die Sicherheit des Widerlagers massgebende Mittelkraft R zu erhalten. Ist das Bauwerk aber einem Hochwasser $H \cdot W$ ausgesetzt, so hat man zu erwägen, ob es wahrscheinlich ist, dass das Wasser in die Fugen oder unter die Grundfläche des Mauerwerks dringen kann. In diesem Falle würde, wenn auch die Hinterfüllungserde

Fig. 212.

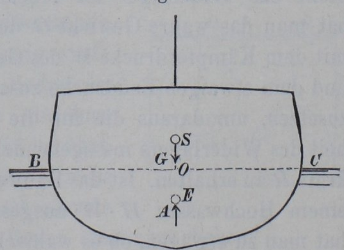


vom Wasser durchzogen ist, der unter Wasser befindliche Theil des Mauerwerks nur mit seinem scheinbaren Gewichte $Q = G - \gamma V = (\gamma_1 - \gamma) V$, d. h. bei $\gamma_1 = 2\gamma$ nur mit der Hälfte seines Gewichtes einzuführen sein. Ist der Boden kiesig, so dürfte das Wasser wohl Wege finden, um, wenn auch nicht sofort, doch mit der Zeit, unter dem Grundmauerwerke mit seinem vollen Drucke zu wirken, wogegen auch eine das Mauerwerk umschliessende Spundwand nicht schützen würde. Bei felsigem Untergrunde könnte es vielleicht gelingen, das Mauerwerk mit Cementmörtel dem Felsen wasserdicht anzuschliessen. Von genauer Untersuchung des Grundes und sorgfältiger Ausführung ist es abhängig, ob man in solchem Falle den Wasserdruck ausser Acht lassen darf.

k) Gleichgewicht schwimmender Körper.

Ist die mittlere Dichte γ_1 eines Körpers kleiner als diejenige des Wassers, so fällt sein scheinbares Gewicht Q für Wasser $= G - \gamma V = (\gamma_1 - \gamma) V$ negativ aus. Der Körper wird daher, wenn er nicht durch eine besondere abwärts gerichtete Kraft Q niedergehalten wird, sich aus dem Wasser erheben, auf dem Wasser schwimmen und wird im Gleichgewichte sein, wenn der Auftrieb γV des eingetauchten Theiles V, der Verdrängung (des Deplacement), sich mit dem wahren Gewichte G des Körpers im Gleichgewichte hält. Dazu ist erforderlich, dass $\gamma V = G$ sei und dass der Schwerpunkt S des Körpers mit dem Schwerpunkt E der verdrängten Wassermasse V in derselben Lothrechte liege. Die Gerade SE im Körper heisst die Schwimmachse, die zu ihr rechtwinklige Ebene BOC des Körpers, welche im Gleichgewichte mit dem Wasserspiegel zusammenfällt, wird die Schwimmebene genannt.

Fig. 213.



Es soll nun die Sicherheit eines schwimmenden Schiffes gegen Umkippen untersucht werden. Das Schiff habe eine Symmetrieebene, die durch die Schwimmachse SE geht.