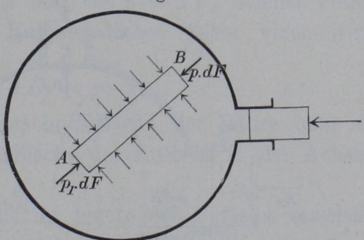
A. Gleichgewicht flüssiger Körper.

Man bezeichnet einen flüssigen Körper als im Gleichgewichte befindlich, wenn seine sämmtlichen Theilchen entweder in wirklicher Ruhe sind, oder doch in scheinbarer Ruhe in Bezug auf einen gleichförmig geradlinig fortschreitenden Raum, womit also eine gegenseitige Bewegung der Flüssigkeitstheilchen, d. h. eine Formänderung des Körpers ausgeschlossen ist. Sämmtliche Theilchen haben übereinstimmend die Beschleunigung Null, somit verschwinden sämmtliche Ergänzungskräfte $[-mp]$, und es müssen die äusseren Kräfte denselben Bedingungen genügen, wie für das Gleichgewicht eines starren Körpers, d. h. man kann sich jeden beliebigen Theil eines flüssigen Körpers, für dessen Gleichgewicht man die Bedingungen sucht, in einen starren Körper verwandelt denken, wobei aber die anzubringenden Kräfte den Eigenschaften flüssiger Körper entsprechen müssen.

I. Gleichgewicht flüssiger Körper ohne Einwirkung der Schwere.

Ist ein im Gleichgewichte befindlicher tropfbar flüssiger oder gasförmiger Körper ringsum von Gefässwänden umschlossen, die auf ihn Druckkräfte ausüben, so hat das Eigengewicht des flüssigen Körpers auf seine Druckverhältnisse in vielen Fällen der Anwendung einen so unbedeutenden Einfluss, dass es der Vereinfachung wegen gerathen ist, diesen Einfluss ganz zu vernachlässigen.

Fig. 173.



In dem Gefässe (Fig. 173) befinde sich Flüssigkeit im Gleichgewicht. Um eine Beziehung zwischen den Einheitsdrücken p_1 und p bei A und B zu finden, denken wir uns ein von A nach B reichendes gerades Prisma vom Querschnitte dF erstarrt. Das umgebende Wasser übt auf alle Flächen rechtwinklige Druckkräfte aus, u. zw. auf die Endflächen die Kräfte $p_1\,dF$ bezw. $p\,dF$. Bilden wir die Gleichung der Kräftesumme in der Richtung AB, so kommen dabei die Druckkräfte gegen die Seitenflächen des Prismas nicht in Betracht, und da keine Massenkraft wirkt, so muss einfach

$$p_1\,dF = p\,dF,$$

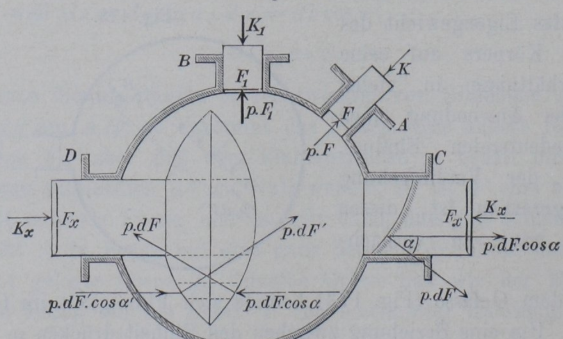
d. h. $p_1 = p$ sein. Da nun A und B beliebig gelegene Punkte des flüssigen Körpers sind, so gilt, zugleich mit Rücksicht auf den Satz S. 157:

In einem flüssigen Körper, der ohne Einwirkung von Massenkräften im Gleichgewicht ist, hat der Einheitsdruck an allen Stellen im Innern und an der Oberfläche und nach allen Richtungen gleiche Grösse. Statt des Wortes Einheitsdruck, d. h. Druck auf die Flächeneinheit, soll künftig kürzer Druck gesagt werden, während die auf irgend eine Flächengrösse kommende Kraft mit dem Worte Druckkraft bezeichnet werden möge; in ähnlicher Weise wurden in der Mechanik elastisch-fester Körper die Worte Spannung und Spannkraft unterschieden. Man nennt diesen Druck auch wohl hydrostatischen Druck.

a) Druckkräfte eines flüssigen Körpers gegen verschiebbare Kolben.

An einem Gefässe (Fig. 174) seien cylindrische Ansatzröhren angebracht, welche von genau passenden, aber reibungslos beweglich

Fig. 174.



gedachten Kolben abgeschlossen werden. Wird durch Druckkraft gegen einen Kolben in dem flüssigen Körper ein Druck p erzeugt und soll der flüssige Körper im Gleichgewichte verbleiben, muss p überall gleich sein. Dann bekommt der Kolben A von einer Querschnittfläche F eine Druckkraft pF, der Kolben B eine Druckkraft pF_1. Die Druckkräfte auf die Kolben verhalten sich also wie die Querschnittsflächen der Kolben, und ebenso grosse, aber nach dem Inneren des Gefässes gerichtete Kräfte $K = pF$ und $K_1 = pF_1$ müssen von aussen auf die Kolben wirken.

Ist der Kolben C an der der Flüssigkeit zugekehrten Seite von einer krummen Fläche begrenzt, so hat der Umstand, dass diese grösser ist als die rechtwinklige Querschnittsfläche des Kolbens und des Ansatzrohres keinen Einfluss auf die Grösse der wirksamen Kolbenkraft. Betrachten wir die Mittellinie des Rohres als x-Achse, so möge die Druckkraft gegen ein Flächentheilchen dF mit der x-Richtung den Winkel α bilden. Es lässt sich $p \cdot dF$ zerlegen in eine Seitenkraft $p \cdot dF \cdot \cos \alpha$ in der x-Richtung, und in eine dazu rechtwinklige. Die letztere drückt den Kolben gegen die Wand der Ansatzröhre und wird durch deren Festigkeit aufgehoben. Wirksam gegen den Kolben, d. h. eine mögliche Bewegung anstrebend, ist nur die Seitenkraft $p \cdot dF \cdot \cos \alpha$. Derselbe Winkel α, den die Normale zu dF mit der x-Richtung bildet, findet sich auch zwischen der Fläche dF und der yz-Ebene, die rechtwinklig zur Achsenrichtung des Rohres steht. Daher ist $dF \cdot \cos \alpha$ die rechtwinklige Projektion von dF auf die Querschnitts-Ebene des Rohres, oder, wie man auch sagen kann, die rechtwinklige Projektion in der x-Richtung, welche wir $dF \cdot \cos \alpha = dF_x$ nennen wollen. Die gesammte Endfläche des Kolbens liefert daher einen wirksamen Druck

$$K_x = p \int dF_x = p \cdot F_x \,,$$

wenn F_x die rechtwinklige Querschnittsfläche der Röhre oder die rechtwinklige Projektion der Endfläche des Kolbens in der Achsenrichtung der Röhre bezeichnet.

Auch wenn der Kolben sich im Innern des Gefässes erweitert, so dass er stellenweise über den cylindrischen Theil hinausragt, wie bei D, wird dadurch seine wirksame Kraft nicht geändert. Ein Flächentheilchen dF dieses überstehenden Theiles liefert in der x-Richtung eine Seitenkraft $p \cdot dF \cdot \cos \alpha = p \cdot dF_x$. Die projicirenden Linien aber, welche in der Richtung des Ansatzrohres von dem Umfange des Flächentheilchens dF ausgehen, treffen die Oberfläche der Kolbenerweiterung noch ein Mal und schneiden aus ihr ein Flächentheilchen dF' heraus, welches eine Druckkraft $p \cdot dF'$ und eine Seitenkraft in der Richtung des Rohres $p \cdot dF' \cdot \cos\alpha' = p \cdot dF_x$ erfährt. Diese Seitenkraft ist der von dF gelieferten gleich und entgegengesetzt und hebt sich damit auf. In gleicher Weise liefern sämmtliche der Flüssigkeit ausgesetzte Oberflächentheile des Kolbens, die beim rechtwinkligen Projiciren in der Längenrichtung des Ansatzrohres paarweise auf einander fallen, keinen Beitrag zur wirksamen Kolbenkraft. Es bleibt als wirksame Druckfläche des Kolbens nur dessen rechtwinklige Querschnittsfläche F_x mit der wirksamen Kolbenkraft

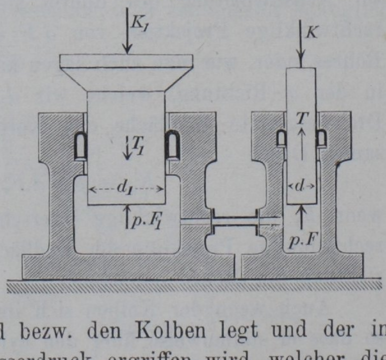
1) $$K_x = p \cdot F_x$$

übrig, auch geht K_x durch den Schwerpunkt von F_x, gerade so, als ob der Kolben dem Wasser eine rechtwinklige Querschnittsfläche F_x als Endfläche zukehrte.

b) Wasserdruck-Presse.

Dieselbe hat den Zweck, mittels einer Triebkraft K einen bedeutend grösseren Widerstand K_1 zu überwinden. In die beiden mit einer tropfbaren Flüssigkeit gefüllten, durch ein Rohr verbundenen Cylinder (Fig. 175) reichen Kolben von den Durchmessern d und d_1 dicht schliessend hinein. Der dichte Schluss, die sog. Dichtung, wird durch je einen Lederstulp, einen Ring von hufeisenförmigem Querschnitte (Fig. 176) bewirkt, der sich mit den beiden Schenkeln an die Cylinderwand bezw. den Kolben legt und der in dem Hohlraume von dem Wasserdruck ergriffen wird, welcher die Schenkel auseinander zu treiben sucht. Je stärker der Wasserdruck, um so fester legt sich der Stulp an die zu dichtenden Theile.

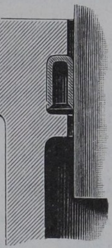
Fig. 175.



Bei dem Arbeiten der Presse bleibt nun der flüssige Körper nicht ganz im Gleichgewichte, da beim Niederdrücken des kleinen

Kolbens Flüssigkeit aus dem kleinen Cylinder in den grossen hinübertritt. Wenn wir aber annehmen, dass die Bewegung nur langsam erfolge, können wir annähernd mit den Gleichgewichts-Bedingungen rechnen.

Fig. 176.



Während der Kolben vom Durchmesser d an dem Stulp von der Höhe h abwärts gleitet, wird der letztere mit Kräften gegen den Kolben gedrückt, deren Summe $p \cdot d\pi h$ beträgt, also eine Reibung $T = f p d \pi h$ hervorruft, wenn p der Druck in der Presse ist. Für das Gleichgewicht dieses Kolbens gilt dann

$$K = p \cdot {}^1\!/_4\, d^2 \pi + f p d \pi h .$$

An dem grösseren Kolben vom Durchmesser d_1 sei die Stulphöhe h_1, dann beträgt die hier abwärts gerichtete Reibung $T_1 = f p d_1 \pi h_1$, und es gilt für diesen Kolben

$$K_1 = p\, {}^1\!/_4\, d_1{}^2 \pi - f p\, d_1 \pi h_1 .$$ Sonach wird

$$1) \qquad \frac{K_1}{K} = \frac{d_1{}^2}{d^2} \, \frac{1 - 4 f \dfrac{h_1}{d_1}}{1 + 4 f \dfrac{h}{d}} .$$

Bewegt sich der kleine Kolben um v abwärts, so muss eine Raummenge Wasser $= {}^1\!/_4\, d^2 \pi v$ in den grossen Cylinder übertreten und $= {}^1\!/_4\, d_1{}^2 \pi c$ sein, wenn c die Bewegung des grossen Kolbens. Mithin ist die Geschwindigkeits-Übersetzung $v : c = d_1{}^2 : d^2$. Der Wirkungsgrad wird hiernach

$$\eta = \frac{K_1 c}{K v} = \frac{1 - 4 f \dfrac{h_1}{d_1}}{1 + 4 f \dfrac{h}{d}} = \frac{K_0}{K} ,$$

wenn $K_0 = K_1 \dfrac{d^2}{d_1{}^2}$ die für eine vollkommene Presse ohne Reibung $(f = 0)$ erforderliche Triebkraft wäre.

Beispiel: Für $h : d = h_1 : d_1 = 0{,}2$, $d_1 : d = 18$ und $f = 0{,}15$ ist

$$\eta = \frac{1 - 4 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}2}{1 + 4 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}2} = 0{,}79 ;$$

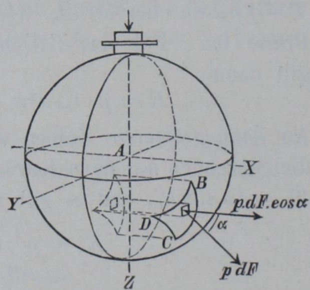
die Wasserdruckpresse arbeitet also erheblich günstiger als Keil- und Schraubenpressen (Theil 1, S. 215 und 264). Es wird $K_1 : K = 18^2 \cdot 0{,}79 = 256$. Die

Übersetzung ist eine sehr erhebliche und kann durch Wahl von $d_1 : d$ beliebig festgesetzt werden. Hier würde mit einer Triebkraft $K = 100$ kg eine Nutzkraft $K_1 = 25600$ kg erreicht werden.

c) Druckkraft auf ein beliebiges Stück der Gefässwand.

Soll das Gesammt-Ergebnis der Druckkräfte auf ein Stück BCD (Fig. 177) der Wandung eines Gefässes, in dem der Druck p herrscht, bestimmt werden, so bedenke man, dass ein Flächentheilchen die Druckkraft $p\,dF$ erfährt, die mit drei rechtwinkligen Achsen die Winkel α, β, γ bilden möge. Dann bekommt man gerade so, als ob BCD die Endfläche eines in der x-Richtung verschiebbaren Kolbens wäre, in dieser Achsenrichtung eine gesammte Kraft

Fig. 177.



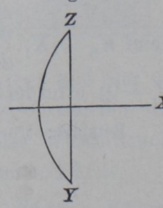
1) $D_x = p\,\Sigma\,dF \cdot \cos\alpha = p \cdot F_x$,

ebenso in den beiden anderen Achsenrichtungen

2) $$D_y = p\,\Sigma\,dF \cdot \cos\beta = p \cdot F_y,$$
$$D_z = p\,\Sigma\,dF \cdot \cos\gamma = p \cdot F_z.$$

Darin bezeichnen F_x, F_y und F_z die Projektionen der gedrückten Flächen auf die yz-, die xz- und die xy-Ebene, oder die rechtwinkligen Projektionen in den Richtungen der x-, der y- und der z-Achse, wobei die etwa paarweise aufeinander fallenden Projektionen von Flächentheilchen fortzulassen sind. Die Seitenkräfte gehen durch die Schwerpunkte der entsprechenden Projectionsflächen F_x, F_y und F_z hindurch und werden sich im Allgemeinen nicht zu einer Einzelkraft zusammensetzen lassen, sondern daneben noch ein Achsenmoment liefern. Gehört die Fläche freilich einer Kugel an, so gehen die einzelnen Kräfte $p \cdot dF$ sämmtlich durch deren Mittelpunkt und liefern eine durch denselben Punkt gehende Einzelkraft.

Fig. 178.



Auch noch in solchen Fällen lassen sich die Druckkräfte zu einer Einzelkraft D zusammensetzen, wo die Begrenzungslinie des Flächenstückes eine ebene Kurve ist. Legt man dann nämlich die yz-Ebene in die Ebene dieser Kurve (Fig. 178), so heben sich beim Projiciren in der y- und in der z-Richtung die Flächen gegenseitig auf, weil sie sämmtlich paarweise auf einander fallen. Es ist $F_y = F_z = 0$, daher auch $D_y = D_z = 0$, mithin der Gesammtdruck

4) $$D = D_x = p F_x.$$

Darin ist F_x die ebene Fläche der Umgrenzungslinie, und D geht durch deren Schwerpunkt.

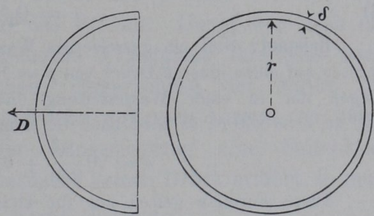
d) Wandstärke von Gefässen und Röhren,

Wird ein kugelförmiges Gefäss (Fig. 179) vom Halbmesser r und der Wandstärke δ nach einem grössten Kreise durchschnitten, so übt die Flüssigkeit bei einem Drucke p für die Flächeneinheit auf die eine Halbkugelfläche eine Kraft D aus, welche nach vorstehender Gl. 4 mit $F_x = r^2\pi$ sein muss:

$$D = p r^2 \pi.$$

Diese Kraft muss durch die Spannkräfte der ringförmigen Schnittfläche im Gleichgewichte gehalten werden.

Fig. 179.

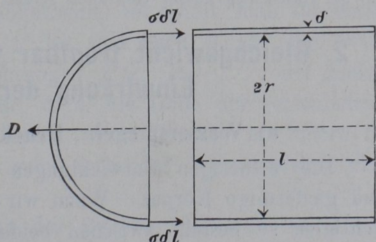


Hinsichtlich der Spannungen in der Wand werde hier die vereinfachende Annahme gemacht, dass sie sich gleichmässig über die Dicke δ vertheilen, überall den Werth σ haben. Da nun die Schnittfläche $= 2r\pi\delta$, so muss

$$2r\pi \cdot \delta \cdot \sigma = p \cdot r^2 \pi \quad \text{oder}$$

1) $$\delta = \frac{r}{2}\,\frac{p}{\sigma}.$$

Fig. 180.



Eine cylindrische Röhre (Fig. 180) vom Halbmesser r, der Wandstärke δ, dem innern Drucke p, der Länge l erfährt die stärksten Spannungen an irgend einer durch die Achse gelegten Schnittebene. Für die gesammte Druckkraft gegen die eine Hälfte ist die Fläche $F_x = 2rl$ massgebend mit $D = 2prl$. Unter der auch hier gemachten Voraussetzung überall gleicher Spannung σ (vgl. weiter unten) ergiebt sich an jeder der beiden Schnittflächen die Spannkraft $\sigma\delta l$, daher wird

$$2\sigma\cdot\delta\cdot l = 2p\cdot r\cdot l, \quad \text{mithin}$$

2) $$\delta = r\frac{p}{\sigma},$$

d. h. doppelt so gross wie beim kugelförmigen Gefässe. Gl. 2 ist wahrscheinlich zuerst von Mariotte angegeben worden.

Die Formeln 1 und 2 geben für kleine Werthe von p so geringe Wandstärken, wie sie aus Gründen der Herstellung und Handhabung nicht zulässig sind. Daher fügt man jenen noch einen Zusatzwerth $+c$ bei, der sich nur nach Ausführungs-Rücksichten bestimmt. Bei Gefässen und Röhren aus Gusseisen beträgt etwa

3) $$c = 0{,}7^{\text{cm}}.$$

Beispiel: Soll ein gusseisernes Wasserleitungsrohr von $r = 20^{\text{cm}}$ Halbmesser auf einen inneren Druck von $p = 10^{\text{at}}$ berechnet werden und wählt man wegen der in einer Wasserleitung unvermeidlichen Stösse die Spannung nur zu $\sigma = 250^{\text{at}}$, so wird nach Gl. 2 und 3

$$\delta = 20\frac{10}{250} + 0{,}7 = 1{,}5^{\text{cm}}.$$

Diese Formeln gelten nur für kleine Werthe von $p:\sigma$. Für grössere Drücke, wie sie bei den Cylindern von Wasserdruckpressen und besonders bei Kanonenrohren vorkommen, ist die Voraussetzung überall gleicher Spannung selbst annäherungsweise nicht mehr zutreffend, vielmehr ergeben genauere Rechnungen, dass die Spannung an der Innenseite des Rohres stets grösser ist als an den übrigen Stellen. Kanonenrohre erleiden denn auch die ersten Risse stets an der Innenwandung, und man untersucht sie darauf hin mittels eines Spiegels, um sie rechtzeitig ausser Gebrauch setzen zu können.

2. Gleichgewicht tropfbar flüssiger Körper unter Einwirkung der Schwere.

a) Wasserspiegel. Druck in der Flüssigkeit.

Die bisherigen Entwicklungen galten vereint für tropfbare und gasförmige Körper. Wenn wir nun aber die Schwere berücksichtigen, so besteht zwischen beiden der wesentliche Unterschied, dass erstere eine unveränderliche, letztere aber eine sehr veränderliche Dichte haben, so dass die tropfbaren Körper hier erst besonders behandelt werden sollen.