

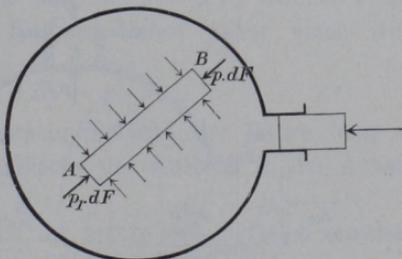
A. Gleichgewicht flüssiger Körper.

Man bezeichnet einen flüssigen Körper als im Gleichgewichte befindlich, wenn seine sämtlichen Theilchen entweder in wirklicher Ruhe sind, oder doch in scheinbarer Ruhe in Bezug auf einen gleichförmig geradlinig fortschreitenden Raum, womit also eine gegenseitige Bewegung der Flüssigkeitstheilchen, d. h. eine Formänderung des Körpers ausgeschlossen ist. Sämtliche Theilchen haben übereinstimmend die Beschleunigung Null, somit verschwinden sämtliche Ergänzungskräfte $[-m p]$, und es müssen die äusseren Kräfte denselben Bedingungen genügen, wie für das Gleichgewicht eines starren Körpers, d. h. man kann sich jeden beliebigen Theil eines flüssigen Körpers, für dessen Gleichgewicht man die Bedingungen sucht, in einen starren Körper verwandelt denken, wobei aber die anzubringenden Kräfte den Eigenschaften flüssiger Körper entsprechen müssen.

I. Gleichgewicht flüssiger Körper ohne Einwirkung der Schwere.

Ist ein im Gleichgewichte befindlicher tropfbar flüssiger oder gasförmiger Körper ringsum von Gefässwänden umschlossen, die auf ihn Druckkräfte ausüben, so hat das Eigengewicht des flüssigen Körpers auf seine Druckverhältnisse in vielen Fällen der Anwendung einen so unbedeutenden Einfluss, dass es der Vereinfachung wegen gerathen ist, diesen Einfluss ganz zu vernachlässigen.

Fig. 173.



In dem Gefässe (Fig. 173) befinde sich Flüssigkeit im Gleichgewicht. Um eine Beziehung zwischen den Einheitsdrücken p_1 und p_2 bei A und B zu finden, denken wir uns ein von A nach B reichendes gerades Prisma vom Querschnitte dF erstarrt. Das umgebende Wasser übt auf alle Flächen rechtwinklige Druckkräfte aus, u. zw. auf

die Endflächen die Kräfte $p_1 dF$ bzw. $p dF$. Bilden wir die Gleichung der Kräftesumme in der Richtung AB , so kommen dabei die Druckkräfte gegen die Seitenflächen des Prismas nicht in Betracht, und da keine Massenkraft wirkt, so muss einfach

$$p_1 dF = p dF,$$

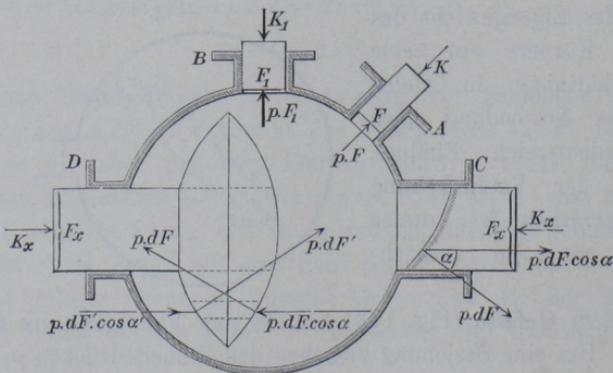
d. h. $p_1 = p$ sein. Da nun A und B beliebig gelegene Punkte des flüssigen Körpers sind, so gilt, zugleich mit Rücksicht auf den Satz S. 157:

In einem flüssigen Körper, der ohne Einwirkung von Massenkraften im Gleichgewicht ist, hat der Einheitsdruck an allen Stellen im Innern und an der Oberfläche und nach allen Richtungen gleiche Grösse. Statt des Wortes Einheitsdruck, d. h. Druck auf die Flächeneinheit, soll künftig kürzer Druck gesagt werden, während die auf irgend eine Flächengrösse kommende Kraft mit dem Worte Druckkraft bezeichnet werden möge; in ähnlicher Weise wurden in der Mechanik elastisch-fester Körper die Worte Spannung und Spannkraft unterschieden. Man nennt diesen Druck auch wohl hydrostatischen Druck.

a) Druckkräfte eines flüssigen Körpers gegen verschiebbare Kolben.

An einem Gefässe (Fig. 174) seien cylindrische Ansatzröhren angebracht, welche von genau passenden, aber reibungslos beweglich

Fig. 174.



gedachten Kolben abgeschlossen werden. Wird durch Druckkraft gegen einen Kolben in dem flüssigen Körper ein Druck p erzeugt

und soll der flüssige Körper im Gleichgewichte verbleiben, muss p überall gleich sein. Dann bekommt der Kolben A von einer Querschnittsfläche F eine Druckkraft pF , der Kolben B eine Druckkraft pF_1 . Die Druckkräfte auf die Kolben verhalten sich also wie die Querschnittsflächen der Kolben, und ebenso grosse, aber nach dem Inneren des Gefässes gerichtete Kräfte $K = pF$ und $K_1 = pF_1$ müssen von aussen auf die Kolben wirken.

Ist der Kolben C an der der Flüssigkeit zugekehrten Seite von einer krummen Fläche begrenzt, so hat der Umstand, dass diese grösser ist als die rechtwinklige Querschnittsfläche des Kolbens und des Ansatzrohres keinen Einfluss auf die Grösse der wirksamen Kolbenkraft. Betrachten wir die Mittellinie des Rohres als x -Achse, so möge die Druckkraft gegen ein Flächentheilchen dF mit der x -Richtung den Winkel α bilden. Es lässt sich $p \cdot dF$ zerlegen in eine Seitenkraft $p \cdot dF \cdot \cos \alpha$ in der x -Richtung, und in eine dazu rechtwinklige. Die letztere drückt den Kolben gegen die Wand der Ansatzröhre und wird durch deren Festigkeit aufgehoben. Wirksam gegen den Kolben, d. h. eine mögliche Bewegung anstrebend, ist nur die Seitenkraft $p \cdot dF \cdot \cos \alpha$. Derselbe Winkel α , den die Normale zu dF mit der x -Richtung bildet, findet sich auch zwischen der Fläche dF und der yz -Ebene, die rechtwinklig zur Achsenrichtung des Rohres steht. Daher ist $dF \cdot \cos \alpha$ die rechtwinklige Projektion von dF auf die Querschnitts-Ebene des Rohres, oder, wie man auch sagen kann, die rechtwinklige Projektion in der x -Richtung, welche wir $dF \cdot \cos \alpha = dF_x$ nennen wollen. Die gesammte Endfläche des Kolbens liefert daher einen wirksamen Druck

$$K_x = p \int dF_x = p \cdot F_x,$$

wenn F_x die rechtwinklige Querschnittsfläche der Röhre oder die rechtwinklige Projektion der Endfläche des Kolbens in der Achsenrichtung der Röhre bezeichnet.

Auch wenn der Kolben sich im Innern des Gefässes erweitert, so dass er stellenweise über den cylindrischen Theil hinausragt, wie bei D , wird dadurch seine wirksame Kraft nicht geändert. Ein Flächentheilchen dF dieses überstehenden Theiles liefert in der x -Richtung eine Seitenkraft $p \cdot dF \cdot \cos \alpha = p \cdot dF_x$. Die projicirenden Linien aber, welche in der Richtung des Ansatzrohres von dem Umfange des Flächentheilchens dF ausgehen, treffen die Oberfläche

der Kolbenerweiterung noch ein Mal und schneiden aus ihr ein Flächentheilchen dF' heraus, welches eine Druckkraft $p \cdot dF'$ und eine Seitenkraft in der Richtung des Rohres $p \cdot dF' \cdot \cos \alpha' = p \cdot dF_x$ erfährt. Diese Seitenkraft ist der von dF gelieferten gleich und entgegengesetzt und hebt sich damit auf. In gleicher Weise liefern sämtliche der Flüssigkeit ausgesetzte Oberflächentheile des Kolbens, die beim rechtwinkligen Projiciren in der Längsrichtung des Ansatzrohres paarweise auf einander fallen, keinen Beitrag zur wirksamen Kolbenkraft. Es bleibt als wirksame Druckfläche des Kolbens nur dessen rechtwinklige Querschnittsfläche F_x mit der wirksamen Kolbenkraft

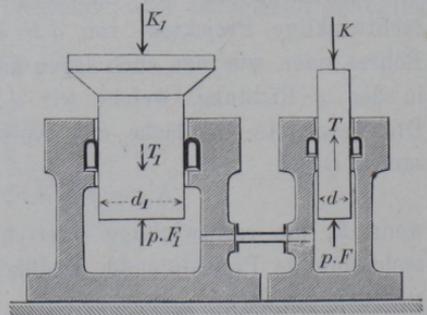
$$1) \quad K_x = p \cdot F_x$$

übrig, auch geht K_x durch den Schwerpunkt von F_x , gerade so, als ob der Kolben dem Wasser eine rechtwinklige Querschnittsfläche F_x als Endfläche zukehrte.

b) Wasserdruck-Pressen.

Dieselbe hat den Zweck, mittels einer Triebkraft K einen bedeutend grösseren Widerstand K_1 zu überwinden. In die beiden mit einer tropfbaren Flüssigkeit gefüllten, durch ein Rohr verbundenen Cylinder (Fig. 175) reichen Kolben von den Durchmessern d und d_1 dicht schliessend hinein. Der dichte Schluss, die sog. Dichtung, wird durch je einen Lederstulp, einen Ring von hufeisenförmigem Querschnitte (Fig. 176) bewirkt,

Fig. 175.



der sich mit den beiden Schenkeln an die Cylinderwand bzw. den Kolben legt und der in dem Hohlraume von dem Wasserdruck ergriffen wird, welcher die Schenkel auseinander zu treiben sucht. Je stärker der Wasserdruck, um so fester legt sich der Stulp an die zu dichtenden Theile.

Bei dem Arbeiten der Presse bleibt nun der flüssige Körper nicht ganz im Gleichgewichte, da beim Niederdrücken des kleinen

Kolbens Flüssigkeit aus dem kleinen Cylinder in den grossen hinübertritt. Wenn wir aber annehmen, dass die Bewegung nur langsam erfolge, können wir annähernd mit den Gleichgewichts-Bedingungen rechnen.

Während der Kolben vom Durchmesser d an dem Stulp von der Höhe h abwärts gleitet, wird der letztere mit Kräften gegen den Kolben gedrückt, deren Summe $p \cdot d\pi h$ beträgt, also eine Reibung $T = fp d\pi h$ hervorruft, wenn p der Druck in der Presse ist. Für das Gleichgewicht dieses Kolbens gilt dann

$$K = p \cdot \frac{1}{4} d^2 \pi + fp d\pi h.$$

An dem grösseren Kolben vom Durchmesser d_1 sei die Stulphöhe h_1 , dann beträgt die hier abwärts gerichtete Reibung $T_1 = fp d_1 \pi h_1$, und es gilt für diesen Kolben

$$K_1 = p \frac{1}{4} d_1^2 \pi - fp d_1 \pi h_1. \quad \text{Sonach wird}$$

$$1) \quad \frac{K_1}{K} = \frac{d_1^2}{d^2} \frac{1 - 4f \frac{h_1}{d_1}}{1 + 4f \frac{h}{d}}.$$

Bewegt sich der kleine Kolben um v abwärts, so muss eine Raummenge Wasser $= \frac{1}{4} d^2 \pi v$ in den grossen Cylinder übertreten und $= \frac{1}{4} d_1^2 \pi c$ sein, wenn c die Bewegung des grossen Kolbens. Mithin ist die Geschwindigkeits-Übersetzung $v : c = d_1^2 : d^2$. Der Wirkungsgrad wird hiernach

$$\eta = \frac{K_1 c}{K v} = \frac{1 - 4f \frac{h_1}{d_1}}{1 + 4f \frac{h}{d}} = \frac{K_0}{K},$$

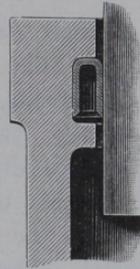
wenn $K_0 = K_1 \frac{d^2}{d_1^2}$ die für eine vollkommene Presse ohne Reibung ($f = 0$) erforderliche Triebkraft wäre.

Beispiel: Für $h : d = h_1 : d_1 = 0,2$, $d_1 : d = 18$ und $f = 0,15$ ist

$$\eta = \frac{1 - 4 \cdot 0,15 \cdot 0,2}{1 + 4 \cdot 0,15 \cdot 0,2} = 0,79;$$

die Wasserdruckpresse arbeitet also erheblich günstiger als Keil- und Schraubpressen (Theil 1, S. 215 und 264). Es wird $K_1 : K = 18^2 \cdot 0,79 = 256$. Die

Fig. 176.



Übersetzung ist eine sehr erhebliche und kann durch Wahl von $d_1 : d$ beliebig festgesetzt werden. Hier würde mit einer Triebkraft $K = 100 \text{ kg}$ eine Nutz-
kraft $K_1 = 25600 \text{ kg}$ erreicht werden.

c) Druckkraft auf ein beliebiges Stück der Gefäßwand.

Soll das Gesamt-Ergebnis der Druckkräfte auf ein Stück BCD (Fig. 177) der Wandung eines Gefäßes, in dem der Druck p herrscht, bestimmt werden, so bedenke man, dass ein Flächentheilchen die Druckkraft $p dF$ erfährt, die mit drei rechtwinkligen Achsen die Winkel α, β, γ bilden möge. Dann bekommt man gerade so, als ob BCD die Endfläche eines in der x -Richtung verschiebbaren Kolbens wäre, in dieser Achsenrichtung eine gesammte Kraft

$$1) D_x = p \sum dF \cdot \cos \alpha = p \cdot F_x,$$

ebenso in den beiden anderen Achsenrichtungen

$$2) D_y = p \sum dF \cdot \cos \beta = p \cdot F_y,$$

$$D_z = p \sum dF \cdot \cos \gamma = p \cdot F_z.$$

Darin bezeichnen F_x, F_y und F_z die Projektionen der gedrückten Flächen auf die yz -, die xz - und die xy -Ebene, oder die rechtwinkligen Projektionen in den Richtungen der x -, der y - und der z -Achse, wobei die etwa paarweise aufeinander fallenden Projektionen von Flächentheilchen fortzulassen sind. Die Seitenkräfte gehen durch die Schwerpunkte der entsprechenden Projectionsflächen F_x, F_y und F_z hindurch und werden sich im Allgemeinen nicht zu einer Einzelkraft zusammensetzen lassen, sondern daneben noch ein Achsenmoment liefern. Gehört die Fläche freilich einer Kugel an, so gehen die einzelnen Kräfte $p \cdot dF$ sämtlich durch deren Mittelpunkt und liefern eine durch denselben Punkt gehende Einzelkraft.

Auch noch in solchen Fällen lassen sich die Druckkräfte zu einer Einzelkraft D zusammensetzen, wo die Begrenzungslinie des Flächenstückes eine ebene Kurve

Fig. 177.

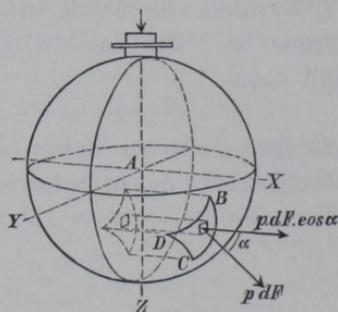
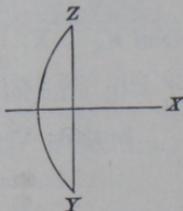


Fig. 178.



ist. Legt man dann nämlich die yz -Ebene in die Ebene dieser Kurve (Fig. 178), so heben sich beim Projiciren in der y - und in der z -Richtung die Flächen gegenseitig auf, weil sie sämmtlich paarweise auf einander fallen. Es ist $F_y = F_z = 0$, daher auch $D_y = D_z = 0$, mithin der Gesamtdruck

$$4) \quad D = D_x = p F_x.$$

Darin ist F_x die ebene Fläche der Umgrenzungslinie, und D geht durch deren Schwerpunkt.

d) Wandstärke von Gefässen und Röhren,

Wird ein kugelförmiges Gefäss (Fig. 179) vom Halbmesser r und der Wandstärke δ nach einem grössten Kreise durchgeschnitten, so übt die Flüssigkeit bei einem Drucke p für die Flächeneinheit auf die eine Halbkugelfläche eine Kraft D aus, welche nach vorstehender Gl. 4 mit $F_x = r^2\pi$ sein muss:

$$D = p r^2 \pi.$$

Diese Kraft muss durch die Spannkraften der ringförmigen Schnittfläche im Gleichgewichte gehalten werden.

Hinsichtlich der Spannungen in der Wand werde hier die vereinfachende Annahme gemacht, dass sie sich gleichmässig über die Dicke δ vertheilen, überall den Werth σ haben. Da nun die Schnittfläche $= 2 r \pi \delta$,

so muss

$$2 r \pi \cdot \delta \cdot \sigma = p \cdot r^2 \pi \quad \text{oder}$$

$$1) \quad \delta = \frac{r}{2} \frac{p}{\sigma}.$$

Eine cylindrische Röhre (Fig. 180) vom Halbmesser r , der Wandstärke δ ,

dem innern Drucke p , der Länge l erfährt die stärksten Spannungen an irgend einer durch die Achse gelegten Schnittebene. Für die

Fig. 179.

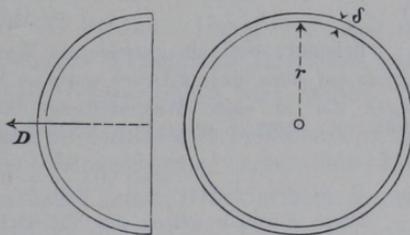
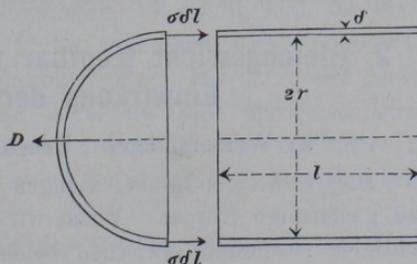


Fig. 180.



gesamte Druckkraft gegen die eine Hälfte ist die Fläche $F_x = 2rl$ massgebend mit $D = 2prl$. Unter der auch hier gemachten Voraussetzung überall gleicher Spannung σ (vgl. weiter unten) ergibt sich an jeder der beiden Schnittflächen die Spannkraft $\sigma \delta l$, daher wird

$$2\sigma \cdot \delta \cdot l = 2p \cdot r \cdot l, \quad \text{mithin}$$

$$2) \quad \delta = r \frac{p}{\sigma},$$

d. h. doppelt so gross wie beim kugelförmigen Gefässe. Gl. 2 ist wahrscheinlich zuerst von Mariotte angegeben worden.

Die Formeln 1 und 2 geben für kleine Werthe von p so geringe Wandstärken, wie sie aus Gründen der Herstellung und Handhabung nicht zulässig sind. Daher fügt man jenen noch einen Zusatzwerth $+ c$ bei, der sich nur nach Ausführungs-Rücksichten bestimmt. Bei Gefässen und Röhren aus Gusseisen beträgt etwa

$$3) \quad c = 0,7 \text{ cm}.$$

Beispiel: Soll ein gusseisernes Wasserleitungsrohr von $r = 20$ cm Halbmesser auf einen inneren Druck von $p = 10$ at berechnet werden und wählt man wegen der in einer Wasserleitung unvermeidlichen Stösse die Spannung nur zu $\sigma = 250$ at, so wird nach Gl. 2 und 3

$$\delta = 20 \frac{10}{250} + 0,7 = 1,5 \text{ cm}.$$

Diese Formeln gelten nur für kleine Werthe von $p : \sigma$. Für grössere Drücke, wie sie bei den Cylindern von Wasserdruckpressen und besonders bei Kanonenrohren vorkommen, ist die Voraussetzung überall gleicher Spannung selbst annäherungsweise nicht mehr zutreffend, vielmehr ergeben genauere Rechnungen, dass die Spannung an der Innenseite des Rohres stets grösser ist als an den übrigen Stellen. Kanonenrohre erleiden denn auch die ersten Risse stets an der Innenwandung, und man untersucht sie darauf hin mittels eines Spiegels, um sie rechtzeitig ausser Gebrauch setzen zu können.

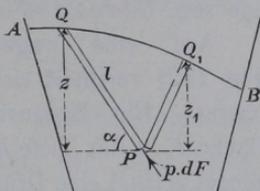
2. Gleichgewicht tropfbar flüssiger Körper unter Einwirkung der Schwere.

a) Wasserspiegel. Druck in der Flüssigkeit.

Die bisherigen Entwicklungen galten vereint für tropfbare und gasförmige Körper. Wenn wir nun aber die Schwere berücksichtigen, so besteht zwischen beiden der wesentliche Unterschied, dass erstere eine unveränderliche, letztere aber eine sehr veränderliche Dichte haben, so dass die tropfbaren Körper hier erst besonders behandelt werden sollen.

Soll die in einem oben offenen Gefäße befindliche Flüssigkeit unter Einwirkung der Schwere als einziger Massenkraft im Gleichgewichte sein, so muss die obere freie Fläche, der Wasserspiegel, eine wagerechte Ebene bilden, d. h. rechtwinklig zu der herrschenden Massenkraft stehen. Um dies zu beweisen, nehmen wir (Fig. 181) den Gleichgewichtszustand bei beliebiger, noch unbestimmter Oberfläche AB an und erhalten Beziehungen, die eine ebene Oberfläche bedingen.

Fig. 181.



Von einem beliebigen Punkte P im Innern ausgehend, umgrenzen wir ein Wasserprisma PQ , dessen Länge l eine Neigung α gegen die Wagerechte bildet. Der Querschnitt des Prismas sei dF , sein Gewicht $\gamma \cdot dF \cdot l$. Ist p der Druck im Punkte P , so wirkt hier eine Längskraft $p \cdot dF$ auf das Prisma. Denkt man sich das Prisma erstarrt, und die umgebende Flüssigkeit ihrerseits auch, wobei aber an den Langflächen, entsprechend der Natur der flüssigen Körper, nur Normaldrücke auftreten können, so liefert das Gewicht $\gamma \cdot dF \cdot l$ in der Längsrichtung eine Seitenkraft $\gamma \cdot dF \cdot l \cdot \sin \alpha$, und wenn die Oberfläche keinen Druck erfährt, so muss

$$p \cdot dF = \gamma \cdot dF \cdot l \cdot \sin \alpha$$

sein. Wird der Höhenunterschied der beiden Punkte P und Q , d. h. $l \sin \alpha = z$ gesetzt, so folgt

$$1) \quad p = \gamma z.$$

Wird von P aus ebenso nach einem anderen Punkte Q_1 der Oberfläche ein Prisma PQ_1 abgetrennt, so erhält man für dessen Gleichgewicht ebenso $p = \gamma z_1$. Da nun nach S. 157 der Druck im Punkte P nach allen Richtungen PQ , PQ_1 . . . der gleiche ist, so muss auch $z = z_1$ sein; d. h. die Höhe der verschiedenen Punkte der Oberfläche über irgend einem Punkte im Innern der Flüssigkeit muss die gleiche sein, d. h. der Wasserspiegel muss eine wagerechte Ebene bilden.

Gl. 1 enthält das Gesetz des Druckes für eine im Gleichgewichte befindliche Flüssigkeit unter Einwirkung der Schwere. Eine Flüssigkeitssäule von der Grundfläche $= 1 \text{ m}^2$ und der Höhe $= z$ Meter hat ein Gewicht γz und bringt dadurch den Druck

$p = \gamma z$ hervor. Man nennt deshalb auch $z = p:\gamma$ die auf eine Flüssigkeit von der Dichte γ bezogene Druckhöhe.

Eine wagerechte Ebene im Innern der Flüssigkeit hat an allen Stellen dieselbe Tiefe unter dem Wasserspiegel, ist daher eine Fläche überall gleichen Druckes, eine sog. Niveau-Fläche.

Auf eine wagerechte Bodenfläche (Fig 182) vertheilt sich der Druck gleichmässig. Ein Bodenstück AB von der Fläche F in der Tiefe h unter dem Wasserspiegel erfährt eine Druckkraft D , die durch den Schwerpunkt der Fläche F hindurchgeht. Diese Kraft ist unabhängig von der Form des Gefässes und der Menge des Wassers in demselben, nur abhängig von der Höhenlage des Wasserspiegels. Mittels eines engen Rohres

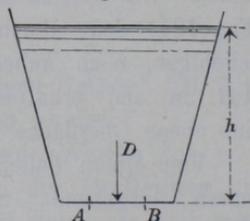


Fig. 182.

welches sich an die Decke eines Gefässes anschliesst, kann man, wenn man Gefäss und Rohr mit Wasser füllt, gegen den Boden AB eine Druckkraft $D = \gamma \cdot F \cdot h$ ausüben, d. h. gleich dem Gewichte eines Wasserkörpers ABB_1A_1 . Die Decke CD des Gefässes erfährt nämlich eine aufwärts gerichtete Druckkraft $D_1 =$ dem Gewichte eines Wasserprismas, das, über der Decke stehend, bis zur Höhe A_1B_1 reicht. Der Druck D_1 hat das Bestreben, Decke und Seitenwände des Gefässes von der Bodenwand nach oben hin abzureissen. Die Mittelkraft von D und D_1 ist dann das Gewicht der wirklich vorhandenen Wassermenge.

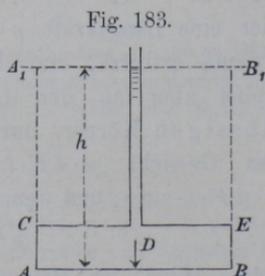


Fig. 183.

Ist (Fig. 184) der Wasserspiegel von dem Flächeninhalte F nicht frei, sondern wird auf ihn, vielleicht mittels eines Kolbens, eine Kraft K übertragen, entsprechend einem Drucke $p_0 = K:F$ und einer Druckhöhe $h_0 = p_0:\gamma$, so kann man, weil es für die Wirkung einer Kraft gleichgültig ist, ob sie durch einen Kolben

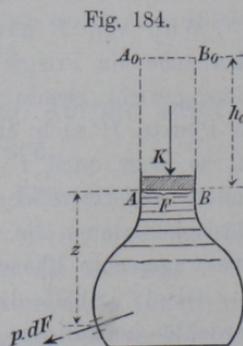


Fig. 184.

oder durch das Gewicht einer Wassermasse erzeugt wird, die Wirkung des Kolbens auch ersetzen durch Höherlegung des Wasserspiegels um die Grösse h_0 . Man denkt sich also die wahre Oberfläche AB mit dem darauf lastenden Kolben ersetzt durch die ideelle freie Oberfläche A_0B_0 und kann alle Druckverhältnisse im Gefäss auf diese beziehen. In einer Tiefe z unter AB herrscht dann ein Druck $p = \gamma(z + h_0)$.

b) Druckkraft gegen eine ebene Seitenwand. Druckmittelpunkt.

Das ebene Wandstück GE (Fig. 185) erfährt über seine ganze Fläche F stetig, aber ungleichmässig vertheilte, parallele Druckkräfte. Auf ein Flächentheilchen dF in der Tiefe z unter dem Wasserspiegel kommt die Kraft

$$1) \quad dD = \gamma \cdot dF \cdot z,$$

mithin wird die gesammte Druckkraft

$$D = \gamma \sum dF \cdot z,$$

wofür man nach der Lehre vom Schwerpunkte (Theil 1, S. 128, Gl. 6) schreiben kann

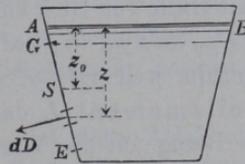
$$2) \quad D = \gamma F z_0,$$

wenn z_0 die Tiefe des Schwerpunktes S von F unter dem Wasserspiegel bedeutet. Die Druckhöhe z_0 des Schwerpunktes von F ist also die mittlere Druckhöhe für die ganze Fläche, nach welcher die Grösse der gesammten Druckkraft D berechnet werden kann.

Vertheilten sich die Kräfte gleichmässig über F , so ginge D durch den Schwerpunkt S der Fläche, da aber der Druck p nach unten hin zunimmt, so muss die Mittelkraft D tiefer liegen als der Schwerpunkt; derjenige Punkt C , in welchem die Druckkraft D die Fläche F schneidet, heisst der **Druckmittelpunkt**.

Um ihn zu finden, benutzen wir Fig. 186. In der Seitenwand ABE ist ein Flächenstück F abgegrenzt. Der Wasserspiegel schneide die Wand in der wagerechten Geraden AX ; rechtwinklig dazu liegt in der Fläche die Achse AY , welche mit der Lothrechten den Winkel α bilde. Ein Flächentheilchen dF habe die Koordinaten x und y , dann ist seine lothrechte Tiefe, unter Wasser

Fig. 185.



$z = y \cos \alpha$. Ebenso gilt für die lothrechte Tiefe z_0 des Schwerpunktes S unter Wasser, wenn y_0 seine parallel mit AY gemessene Ordinate ist,

$$z_0 = y_0 \cos \alpha.$$

Der gesuchte Druckmittelpunkt C habe die Koordinaten x_m und y_m . Es muss nun nach Theil 1, S. 122 in Bezug auf irgend eine Achse das Moment der Mittelkraft D gleich der Momentensumme der Einzelkräfte dD sein. Dies giebt für die Achse AX : $D y_m = \int dD \cdot y$ oder mit Hülfe von Gl. 1 und 2, S. 169: $\gamma F y_0 \cos \alpha y_m = \gamma \cos \alpha \int dF \cdot y^2$, mithin, weil $\int dF y^2$ das Trägheitsmoment J_x der Fläche F

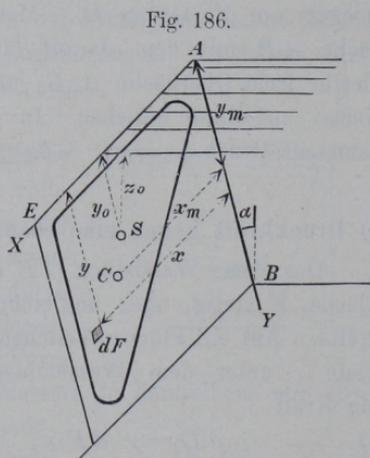


Fig. 186.

in Bezug auf die Wasserspiegelachse AX bedeutet, $F y_0$ aber das statische Moment S_x derselben Fläche auf dieselbe Achse:

$$3) \quad y_m = \frac{J_x}{S_x} = \frac{\int dF \cdot y^2}{F y_0}.$$

Dies ist (1. Theil, S. 279) die Schwingungslänge der Fläche F , falls sie als eine materielle Fläche um die Achse AX als Pendel schwingend gedacht wird. Für die Achse AY ergibt sich

$$D x_m = \int dD \cdot x \quad \text{oder}$$

$$\gamma F y_0 \cos \alpha x_m = \gamma \cos \alpha \int dF \cdot xy,$$

mithin, wenn man bedenkt, das $\int dF \cdot xy$ das Centrifugalmoment C der Fläche F ist (1. Theil, S. 288)

$$4) \quad x_m = \frac{C}{S} = \frac{\int dF \cdot xy}{F y_0}.$$

In den Gl. 3 und 4 kommt der Winkel α nicht vor; wenn sich daher die Seitenwand um die Wasserspiegelachse AX dreht, so behält der Druckmittelpunkt C in ihr seine Lage bei. Wir nehmen daher im Folgenden den Winkel $\alpha = 0$ an, betrachten also die Seitenwand als lothrecht.

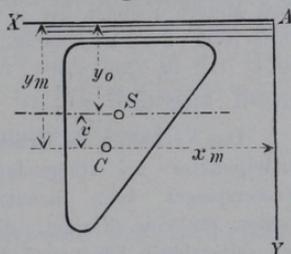
Legt man durch den Schwerpunkt S eine wagerechte Achse (Fig. 187) und nennt v den rechtwinkligen Abstand des Druckmittelpunktes von der Schwerpunktsachse, so ergibt sich aus Gl. 3, weil

$$J_x = J_S + Fy_0^2 \quad (1. \text{ Theil, S. 268})$$

$$y_0 + v = \frac{J_S + Fy_0^2}{Fy_0} = \frac{J_S}{Fy_0} + y_0,$$

$$5) \quad \text{also } v = \frac{J_S}{Fy_0}.$$

Fig. 187.



Erleidet nun der Wasserspiegel eine Parallelverschiebung nach oben, so bleibt J_S unverändert; mit zunehmendem y_0 wird aber v kleiner und kleiner; für $y_0 = \infty$ wird $v = 0$. Dies ist auch selbstverständlich, da, wenn die Fläche in unendlicher Tiefe liegt, die Druckvertheilung an ihr als gleichmässig angesehen werden kann.

Die Lage der AY war bisher beliebig. Ist diese Achse eine Symmetrieachse für die Figur F , so wird $C = \int dF \cdot xy = 0$ (1. Theil, S. 290) und damit auch $x_m = 0$. Es liegt dann der Druckmittelpunkt auf dieser Symmetrie-Achse.

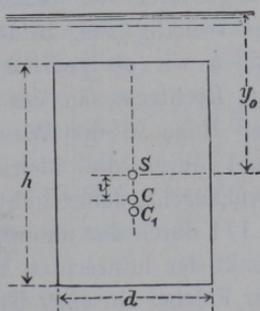
e) Druckkraft gegen eine rechteckige Seitenwand.

Für das Rechteck (Fig. 188) ist (Theil 1, S. 273) $J_S = 1/12 Fh^2$, daher nach Gl. 5

$$1) \quad v = \frac{h^2}{12y_0}.$$

Der Druckmittelpunkt liegt auf der lothrechten Mittellinie des Rechtecks. Wird $y_0 = \infty$, so wird $v = 0$; rückt der Wasserspiegel aber abwärts, und zwar so weit, dass er die Oberkante des Rechtecks trifft, so ist $y_{0 \min} = 1/2 h$, dafür wird $v_{\max} = 1/6 h$, d. h. der Druckmittelpunkt liegt dann bei C_1 im unteren Drittelpunkte der lothrechten Mittellinie. Wasser-

Fig. 188.



spiegel und Druckmittelpunkt bewegen sich hiernach stets in demselben Sinne; beide nach oben oder beide nach unten. Während

aber der Wasserspiegel, von der Oberkante der Figur ausgehend, bis zu $y_0 = \infty$ nach oben rückt, verschiebt sich c nur um $\frac{1}{6}h$ von der tiefsten Lage nach dem Schwerpunkte.

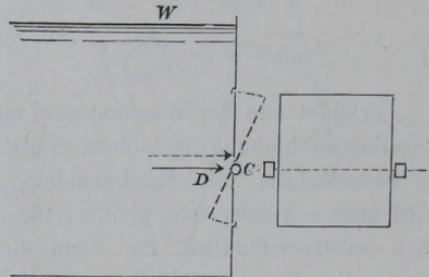
Beispiel: $d = 1 \text{ m}$, $h = 3 \text{ m}$, $y_0 = 2 \text{ m}$, gibt $F = 3 \text{ qm}$, und, wenn man nach Metern rechnet, ist γ das Gewicht von 1 cbm Wasser = 1000 kg , daher $D = 1000 \cdot 3 \cdot 2 = 6000 \text{ kg}$,

$$v = \frac{9}{12 \cdot 2} = \frac{3}{8} \text{ m}.$$

Das Verhalten des Druckmittelpunktes bei steigendem Wasserspiegel kann benutzt werden für eine Klappe, die sich selbstthätig öffnet, sobald der Wasserspiegel eine bestimmte Höhenlage überschreitet (Fig. 189). Durch den zu der Grenzlage W des Wasserspiegels gehörigen Druckmittelpunkt C legt man eine wagerechte Drehachse für die rechtwinklige Klappe.

So lange der Wasserspiegel unterhalb W liegt, geht die Druckkraft D unterhalb der Achse C vorbei und drückt die Klappe gegen die obere und untere Anschlagfläche. Überschreitet der Wasserstand aber die Grenze W , so liegt D in der punktierten Lage oberhalb C , öffnet die Klappe und lässt das Wasser abfließen.

Fig. 189.



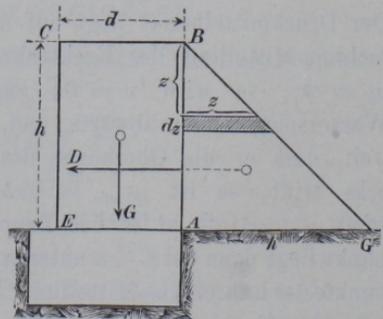
d) Druck gegen eine ebene Mauerfläche oder Bohlwand.

Ist die Mauer $ABCE$ (Fig. 190) auf der rechten Seite bis zur Oberkante mit Wasser in Berührung und betrachtet man ein Längenstück der Mauer = 1 m ,

rechtwinklig zur Bildebene, so haben wir als gedrückte Fläche ein Rechteck von der Breite 1 , der Höhe h ; der Wasserspiegel geht durch die Oberkante der Druckfläche, daher geht D nach S. 171 durch den unteren Drittelpunkt der lothrechten Mittellinie der Fläche. In einer Tiefe z trägt die auf die Einheit der Höhe kommende Kraft $p \times \text{Breite } 1$

= γz . Setzt man noch $\gamma = 1^t = 1^l$, so wird die Darstellung des

Fig. 190.



veränderlichen $p \cdot 1 = z$ eine unter 45° geneigte Gerade BG . Die Druckkraft auf ein Höhentheilchen dz wird

$$dD = z dz,$$

dargestellt durch den wagerechten Flächenstreifen des gleichschenkelig rechtwinkligen Dreiecks ABG . Die Gesamtkraft D wird dargestellt durch die Fläche des Dreiecks $\frac{1}{2}h^2$ und liegt in der Höhe des Schwerpunktes dieser Fläche. $D = \frac{1}{2}\gamma h^2$ liefert in Bezug auf die Aussenkante E der Mauer das Umsturzmoment

$$D \cdot \frac{1}{3}h = \frac{1}{6}\gamma h^3,$$

während bei einer Dichte γ_1 des Mauerwerks das Sicherheitsmoment (1. Theil, S. 167) beträgt $G \cdot \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}\gamma_1 d^2 h$. Die Sicherheit der Mauer gegen Kanten erfordert:

$$\frac{1}{2}\gamma_1 d^2 h > \frac{1}{6}\gamma h^3 \quad \text{oder}$$

$$1) \quad \frac{d}{h} > \sqrt{\frac{1}{3} \frac{\gamma}{\gamma_1}}.$$

Der Verschiebung der Mauer durch D setzt sich die Reibung $f \cdot G$ entgegen (f = Reibungsziffer), mithin muss auch

$$f\gamma_1 d \cdot h > \frac{1}{2}\gamma h^2, \quad \text{d. h.}$$

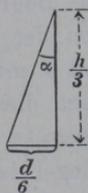
$$2) \quad \frac{d}{h} > \frac{1}{2f} \frac{\gamma}{\gamma_1}$$

sein. Hat das Mauerwerk keine erhebliche Zugfestigkeit und soll gleichwohl ein Öffnen der Fugen vollständig vermieden werden, so muss, was hier allerdings nicht bewiesen werden kann, (s. Keck, Vorträge über Elasticitätslehre, S. 301), die Mittelkraft aus D und G die untere Fuge AE in einem Punkte schneiden, der nicht ausserhalb des mittleren Drittels der Mauerstärke $AE = d$ liegt. Soll er gerade an der Grenze des mittleren Drittels, d. h. um $\frac{1}{6}d$ von der Mitte entfernt liegen, so muss (Fig. 191)

$$\frac{1}{6}d : \frac{1}{3}h = \operatorname{tg} \alpha = D : G \quad \text{sein, oder}$$

$$3) \quad \frac{d}{h} = \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_1}}.$$

Fig. 191.



Beispiel: Für $\gamma_1 = 2\gamma$ und $f = 0,6$ geben die Gleichungen der Reihe nach

- 1) $d > h\sqrt{1/6}$, oder $d > 0,41 h$;
- 2) $d > 0,42 h$;
- 3) $d = 0,7 h$.

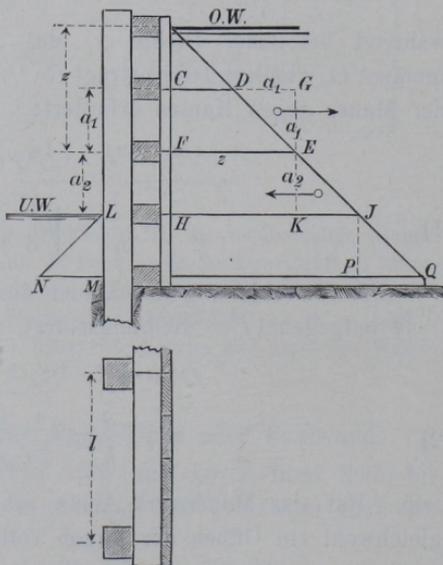
Die letztere Bedingung erfordert also eine bedeutende Stärke.

Eine Bohlenwand (Fig. 192) stütze sich gegen wagerechte Balken, sog. Riegel, die, auf eine Spannweite l frei liegend, sich wiederum gegen lothrechte Pfähle legen. Die mit Bohlen überdeckten Riegel werden gleichmässig über ihre Länge belastet, und zwar soll für einen um z unter Wasser liegenden Riegel F die Belastung q für die Längeneinheit ermittelt werden. Die beiden benachbarten Riegel mögen von dem betrachteten um a_1 und a_2 abstehen.

Hinsichtlich der Kraftübertragung denken wir uns die Bohlen an jedem Riegel durchschnitten; sie wirken dann als statisch bestimmte Träger auf zwei Stützen. Für das Bohlenstück $CF = a_1$

von der Länge Eins, rechtwinklig zur Aufrissfigur, bildet die noch mit γ multiplicirte Trapezfläche $CDEF$ die Belastungsfigur. Man kann diese ansehen als Unterschied des Rechtecks $CGEF$ und des Dreiecks DGE . Ersteres, von dem Inhalte $z a_1$, bringt nach dem Riegel bei F den Auflagerdruck $1/2 \gamma z a_1$, letzteres, vom Inhalte $1/2 a_1^2$, kommt aber nur zu einem Drittel auf F , u. zw. abzüglich, d. h. mit $-1/6 \gamma a_1^2$. Für das Bohlenstück FH ist $FEJH$ die Belastungsfigur, deren Inhalt in die beiden Theile zerfällt $z a_2 + 1/2 a_2^2$. Hieraus ergibt sich für das Bohlenstück FH bei F ein Auflagerdruck $1/2 \gamma z a_2 + 1/6 \gamma a_2^2$.

Fig. 192.



Daher kommt auf die Längeneinheit des Riegels die Druckkraft

$$q = 1/2 \gamma z a_1 - 1/6 \gamma a_1^2 + 1/2 \gamma z a_2 + 1/6 \gamma a_2^2,$$

$$1) \quad q = 1/2 \gamma (a_1 + a_2) \left\{ z - 1/3 (a_1 - a_2) \right\}.$$

Sind die Riegel in gleichen Abständen $a_2 = a_1 = a$, so wird

$$2) \quad q = \gamma a z.$$

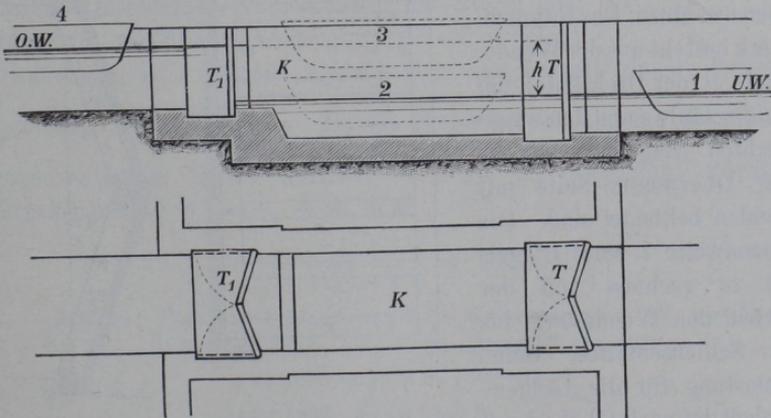
Ist der untere Theil der Wand, von L beginnend, auch auf der linken Seite der Figur 192 mit Wasser in Berührung, so übt dieses einen Druck aus, dessen Vertheilung durch das Dreieck LMN dargestellt wird. Dieser Gegendruck des Unterwassers lässt sich von dem Drucke des Oberwassers leicht abziehen, da $LMN = JPQ$ ist. Unterhalb des Unterwasser-Spiegels (UW) ist also der Überdruck $p = \gamma h$, wenn h der Höhenunterschied der beiden Wasserpiegel, und es wird für einen unter UW liegenden Riegel

$$3) \quad q = \gamma a h.$$

e) Berechnung der Riegel des Stemmthores einer Schleuse.

Eine Schiffschleuse dient zum Hinüberführen eines Schiffes aus einer Kanalstrecke in eine solche mit höherem Wasserstande, oder umgekehrt. Zwischen beide Strecken mit dem Unterwasser UW und dem Oberwasser OW ist die Schleusenammer K (Fig. 193) eingebaut, mit UW und OW durch Thore

Fig. 193.



verbunden, die geöffnet und geschlossen werden können. Die Schleusenammer steht auch noch durch Schützenöffnungen oder dgl. mit UW und OW in Ver-

bindung, so dass man ihren Wasserstand nach Bedürfnis auf die Höhe von UW oder OW bringen kann. Soll nun ein Schiff (Lage 1) aus UW nach OW befördert werden, so bringt man den Wasserstand der Kammer K auf die Höhe von UW , kann nun das Unterthor T leicht öffnen, da es von beiden Seiten gleichen Wasserdruck bekommt, und führt das Schiff in die Kammer (punktirte Lage 2). Dann schliesst man das Unterthor und jede Verbindung der Kammer mit dem UW , öffnet aber die Schützen der Verbindung mit dem OW , in Folge dessen Wasser in die Kammer einströmt, bis der Wasserstand der Kammer in gleicher Höhe mit OW steht. Hierbei wird das schwimmende Schiff mit dem Wasserspiegel um h gehoben (punktirte Lage 3). Jetzt kann das Oberthor T_1 leicht geöffnet und das Schiff in der Lage 4 (OW) übergeführt werden. Die Thore sind zweiflügelig; jeder Flügel dreht sich um eine lothrechte, an einer Seitenwand der Kammer liegende Achse; seine Länge ist etwas grösser als die halbe Weite der Kammer. Beide Flügel fallen daher, wenn sie sich in der Mitte der Schleuse berühren, nicht in dieselbe Ebene, sondern bilden mit einander einen stumpfen, nach dem Oberwasser gekehrten Winkel. Ein höherer Wasserstand auf der OW -Seite presst daher die Flügel selbstthätig zusammen; die Flügel stemmen sich gegen einander und heissen deshalb *Stemmthore*. Im Grundrisse der Fig. 193 sind die Thore in geschlossenem Zustande ausgezogen, im offenen punktirt; die Kreisbogen bezeichnen die Drehungswege der Flügelenden.

Der Flügel eines hölzernen Stemmthores (Fig. 194 Ansicht, Fig. 195 Grundriss) hat nun hinsichtlich der Kraftleistung einige Verwandtschaft mit einem

Fach einer Bohlwand; nur tritt das Aneinanderstemmen neu hinzu. Das Rahmenwerk besteht aus der Wendesäule w (der Drehsäule), der Schlagsäule s und den wagerechten Riegeln r , die an der Oberwasser-Seite mit Bohlen bekleidet sind. Die Spannweite l eines Riegels ist zu rechnen von der Achse der Wendesäule bis zur Schleusenmitte. Seine Belastung für die Längeneinheit ist nach Gl. 2 oder 3

(S. 175) zu bemessen. Die gegenseitige Druckkraft K , die die Riegel durch Vermittelung der Schlagsäule auf einander ausüben,

Fig. 194.

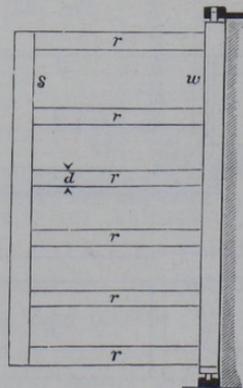
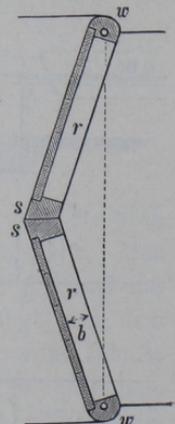


Fig. 195.



muss rechtwinklig zur lothrechten Mittelebene der Schleuse sein (Fig. 196). Ausserdem wirkt an dem Riegel die Last ql und der Widerstand W der Wendesäule. Diese drei Kräfte müssen sich im Gleichgewichte halten, also durch einen Punkt gehen.

In Bezug auf die Wendesäule wird $Kl \sin \alpha = \frac{1}{2}ql^2$,

mithin $K = \frac{ql}{2 \sin \alpha}$, und ebenso gross ist auch W , weil K und W symmetrisch zur Mitte des Riegels sind.

Man kann nun (Fig. 197) K zerlegen in $K \cos \alpha$ und $K \sin \alpha$. Letztere Seitenkraft, gleich $\frac{1}{2}ql$, entspricht dem Auflagerdruck eines einfachen Balkens mit der Belastung q , erzeugt mit ihr ein grösstes Biegemoment in der Mitte $= \frac{1}{8}ql^2$, und eine Biegungsspannung

$$\sigma_1 = \frac{\frac{1}{8}ql^2}{\frac{1}{6}db^2} = \frac{3}{4} \frac{ql^2}{db^2},$$

wenn d die lothrechte, b die wagerechte Abmessung des rechtwinkligen Riegelquerschnitts ist. Die Kraft $K \cos \alpha = \frac{1}{2}ql \cot \alpha$ kann für den Riegel als einfache Druckkraft längs seiner Mittellinie angesehen werden, da wegen der ziemlich starken Querschnitts-Abmessungen der Riegel eine irgendwie erhebliche Ausbiegung derselben nicht anzunehmen ist. Hieraus ergibt sich eine überall gleiche Druckspannung

$\sigma_2 = \frac{ql \cot \alpha}{2db}$. Da die Biegungsspannung auf der Oberwasserseite als Druck auftritt, so wird die überhaupt stärkste Druckspannung $\sigma'' = \sigma_1 + \sigma_2$ oder

$$\sigma'' = \frac{ql}{2db} \left(\frac{3}{2} \frac{l}{b} + \cot \alpha \right).$$

Beispiel: Für eine Schleuse von 6,3 m Weite sei $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{6}$, $l = 3,2$ m, $h = 2$ m, $a = 0,9$ m, $d = 20$ cm, $b = 40$ cm. Dann ist zunächst

$$q = 1000 \cdot 0,9 \cdot 2 = 1800 \text{ kg/m},$$

$$ql = 1800 \cdot 3,2 = 5760 \text{ kg}.$$

Um σ in at zu erhalten, führen wir d , b und l in cm ein:

$$\sigma = \frac{5760}{2 \cdot 20 \cdot 40} \left(\frac{3}{2} \frac{320}{40} + 6 \right) = 3,6 (12 + 6) = 64,8 \text{ at}.$$

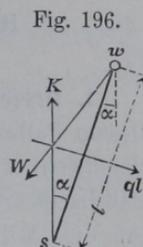
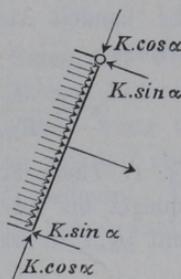


Fig. 197.



Die Spannungsvertheilung ist freilich eine sehr ungleichmässige. In demselben Querschnitte beträgt die stärkste Zugspannung (an der Unterwasser-Seite) nur

$$\sigma' = 3,6(12 - 6) = 21,6 \text{ at.}$$

f) Druckmittelpunkt eines Dreiecks, eines Kreises, eines Viertelkreises.

1. **Dreieck.** α) Grundlinie oben und \parallel dem Wasserspiegel. In diesem Falle giebt es im Allgemeinen keine Symmetrie-Achse, aber gleichwohl ist Gl. 4 (S. 170) entbehrlich, weil man leicht erkennt, dass der Druckmittelpunkt auf der Mittellinie DE (Fig. 198) liegen muss, da über jeden wagerechten Streifen des Dreiecks eine gleichmässige Kraftvertheilung stattfindet, so dass der Druckmittelpunkt jedes Streifens in seiner Mitte liegt. Es handelt sich also nur noch um die Grösse

$$v = \frac{J_S}{F y_0} = \frac{F h^2}{18 F y_0} = \frac{h^2}{18 y_0}$$

(s. 1. Theil, S. 274). Sinkt der Wasserspiegel bis an die Oberkante des Dreiecks mit $y_{0 \min} = 1/3 h$, so wird

$$v_{\max} = 1/6 h,$$

d. h. es liegt der Druckmittelpunkt dann in der Mitte der Mittellinie DE .

β) Liegt die Spitze des Dreiecks oben (Fig. 199), so wird in gleicher Weise $v = \frac{h^2}{18 y_0}$. Rückt aber der Wasserspiegel bis zur Spitze herab, so ist $y_{0 \min} = 2/3 h$, daher $v_{\max} = 1/12 h$ mit C im unteren Viertelpunkte von ED .

2. **Kreis.** Es ist (Fig. 200)

$$v = \frac{J_S}{F y_0} = \frac{r^2}{4 y_0}.$$

Für $y_{0 \min} = r$ wird $v_{\max} = 1/4 r$ (Punkt C_1).

Figi 198.

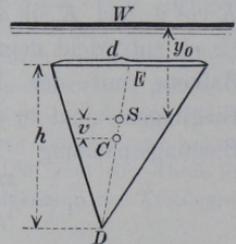


Fig. 199.

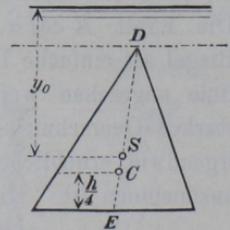
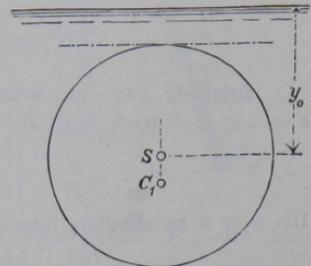


Fig. 200.



3. **Viertelkreis.** Um auch die Anwendung der Gl. 4 (S. 170) zu zeigen, wählen wir nun den Viertelkreis, (Fig. 201), dessen Druckmittelpunkt etwas mehr Rechnung erfordert als die obigen einfachen Beispiele.

Der Wasserspiegel liege parallel mit dem oberen begrenzenden Halbmesser BC in einer Höhe nr darüber. Der Schwerpunkt der Halbkreisfläche liegt (nach 1. Theil, S. 132) um

$$\frac{4}{3\pi}r = a = 0,424r$$

vom Mittelpunkte entfernt. In dem gleichen Abstände von BC und BD

muss auch der Schwerpunkt der Viertelkreisfläche liegen. Mithin ist

$$y_0 = a + nr = r \left(\frac{4}{3\pi} + n \right).$$

Das Trägheitsmoment einer Kreisfläche in Bezug auf einen Durchmesser ist $\frac{1}{4}F_1r^2$, wenn F_1 die Fläche des Kreises bedeutet. Dazu liefern die 4 Viertelkreise je ein Viertel; sonach muss das Trägheitsmoment des Viertelkreises BCD in Bezug auf BC ebenfalls $\frac{1}{4}Fr^2$ sein, wenn F nun die Fläche BCD bedeutet. Das Trägheitsmoment J_S in Bezug auf die wagerechte Schwerpunktsachse ist sonach

$$J_S = F \left(\frac{r^2}{4} - a^2 \right) = Fr^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2} \right).$$

Daher wird

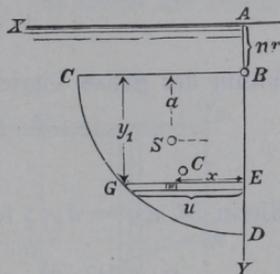
$$1) \quad v = r \frac{\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}}{\frac{4}{3\pi} + n}.$$

Zur Ermittlung von x_m nach Gl. 4 (S. 170) wollen wir vorerst das Centrifugalmoment C berechnen. Es empfiehlt sich, dasselbe auszudrücken durch das etwas bequemere Centrifugalmoment C_B in Bezug auf BC und BD . Mit $y = y_1 + nr$ wird

$$\begin{aligned} C &= \int dFxy = \int dFx(y_1 + nr) \\ &= \int dFxy_1 + nr \int dFx, \text{ somit} \end{aligned}$$

$$2) \quad C = C_B + nrFx_0 = C_B + Fn \frac{4}{3\pi}r^2.$$

Fig. 201.



Ein Flächentheilchen $dF = dx dy$ liefert zu C_B den Beitrag $dx dy x y_1$. Sämmtliche Flächentheilchen des Streifens EG von der Breite u haben übereinstimmende y_1 und dy , liefern also zusammen den Beitrag

$$y_1 dy \int_0^u x dx = 1/2 y_1 dy u^2,$$

mithin der ganze Viertelkreis

$$C_B = 1/2 \int_0^r y_1 dy u^2.$$

Hierin ist $dy = dy_1$; ferner $u^2 = r^2 - y_1^2$, wodurch

$$C_B = 1/2 r^2 \int_0^r y_1 dy_1 - 1/2 \int_0^r y_1^3 dy_1 = 1/8 r^4, \text{ oder}$$

$$3) \quad C_B = \frac{F \cdot r^2}{2\pi}. \text{ Also}$$

$$C = Fr^2 \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{4}{3} \frac{n}{\pi} \right). \text{ Hiermit wird}$$

$$4) \quad x_m = \frac{C}{Fy_0} = r \frac{\frac{1}{2\pi} + \frac{4}{3} \frac{n}{\pi}}{\frac{4}{3\pi} + n} = r \frac{3 + 8n}{8 + 6n\pi}$$

oder, wenn in Zähler und Nenner durch n getheilt wird:

$$5) \quad x_m = r \frac{\frac{3}{n} + 8}{\frac{8}{n} + 6\pi}.$$

Für $n = \infty$ wird $v = 0$ (Gl. 1)

$$x_m = \frac{4}{3\pi} r = 0,424 r$$

(Gl. 5), d. h. Punkt C fällt mit S zusammen, wie es sein musste.

Für $n = 0$ wird

$$v = \left(\frac{3}{16} \pi - \frac{4}{3\pi} \right) r = 0,165 r;$$

$$x_m = \frac{3}{8} r = 0,375 r$$

(Gl. 4); (Punkt C in Fig. 201.)

g) Druckkräfte gegen krumme Flächen.

Durch den freien Wasserspiegel sei die Ebene AXY gelegt (Fig. 202), die AZ gehe lothrecht abwärts. Es sollen die Druckkräfte des Wassers gegen die gekrümmte Fläche BEC (etwa Kugeloktant mit dem Mittelpunkt C) bestimmt werden. Ein Flächentheilchen dF bei P in der Tiefe z unter dem Wasserspiegel erfährt eine Druckkraft $\gamma \cdot dF \cdot z$, welche mit den Achsen die Winkel α , β und δ bilden möge. Durch rechtwinklige Zerlegung erhält man

$$dD_x = \gamma dF \cos \alpha \cdot z = \gamma dF_x z,$$

$$dD_y = \gamma dF \cos \beta \cdot z = \gamma dF_y z,$$

$$dD_z = \gamma dF \cos \delta \cdot z = \gamma dF_z z,$$

worin dF_x , dF_y , dF_z die rechtwinkligen Projektionen von dF in der Richtung der x , der y bzw. z bedeuten. Da die Projektion dF_x in derselben Tiefe z unter Wasser liegt wie dF , so bedeutet dD_x auch die Druckkraft gegen die Projektionsfläche, demnach ist die ganze Kraft in der x -Richtung

$$D_x = \gamma \int dF_x z$$

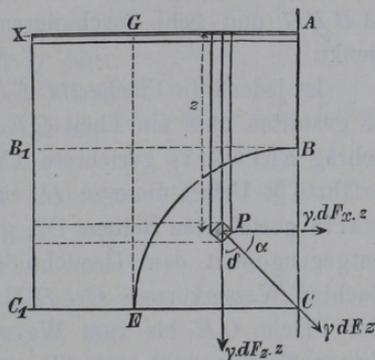
die gesammte Druckkraft, die auf die ebene Projektion $F_x = B_1 C_1$ der gekrümmten Fläche kommen würde und deren nähere Bestimmung nach Grösse und Lage nach S. 169—180 zu geschehen hat. Gleiches gilt bezüglich der Seitenkraft

$$D_y = \gamma \int dF_y z.$$

Dabei ist noch zu bemerken, dass diejenigen Flächen, welche beim Projiciren in einer der beiden wagerechten Richtungen paarweise auf einander fallen, nicht mit in Betracht kommen.

Anders verhält es sich mit der Seitenkraft dD_z , weil beim Projiciren von dF auf eine beliebige wagerechte Ebene die Höhenlage des Flächentheilchens dF nicht mit der seiner Projektion dF_z

Fig. 202.



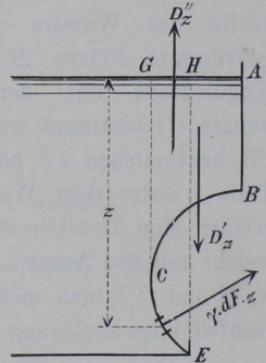
übereinstimmt. Wohl aber bedeutet $\gamma \cdot dF_z \cdot z$ das Gewicht derjenigen Flüssigkeitssäule, die vom Flächentheilchen dF bis zum Wasserspiegel reicht. Daher ist auch

$$D_z = \gamma \int dF_z \cdot z$$

das Gewicht der lothrecht über der gedrückten Fläche stehenden Wassermasse $ABEG$ und geht durch deren Schwerpunkt.

Ist jedoch die Fläche BCE (Fig. 203) so gestaltet, dass ein Theil CE derselben schräg aufwärts gerichtete Theildrücke erfährt, so liefert diese zu D_z einen aufwärts gerichteten Beitrag D'_z , gleich und entgegengesetzt dem Gewichte eines gedachten Wasserkörpers $CGHE$, der von der Fläche CE bis zum Wasserspiegel reichen würde, und durch dessen Schwerpunkt gehend, während der Beitrag D'_z der Fläche BC wie vorher bestimmt wird.

Fig. 203.

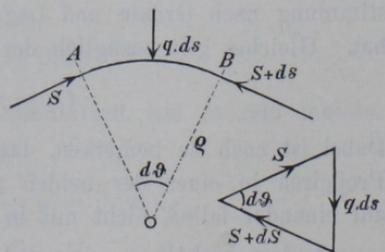


h) Riegel eines gekrümmten Schleusenthores.

Die Riegel eines ebenen Schleusenthores (S. 176) wurden sehr ungleichmässig gespannt. Geht man für grössere Schleusenbreiten zu eisernen Thoren über, so kann man durch die Wahl gekrümmter Riegel und Thore eine bessere Ausnutzung der Festigkeit, d. h. eine gleichmässiger Spannung, erreichen. Es soll die Bedingung gesucht werden, unter welcher ein Riegel in wagerechter Ebene überall eine gleichmässig über den Querschnitt vertheilte Druckkraft erfährt.

Ist (Fig. 204) $AB = ds$ ein Theilchen des Riegels mit dem Krümmungshalbmesser q und dem Mittelpunktswinkel $d\vartheta$ und q die auf die Längeneinheit kommende, nach S. 175 zu bemessende Belastung, so müssen nach obiger Bedingung an den Schnittstellen die centrischen Druck-Spannkkräfte S und $S + ds$ auftreten. Das

Fig. 204.



Gleichgewicht erfordert dann $S = S + dS$, d. h. $dS = 0$, S überall gleich. Ferner gemäss dem Kräfteck in Fig. 204:

$$S \sin \frac{1}{2} d\vartheta = \frac{1}{2} q ds \quad \text{oder,}$$

$$\text{wegen } \sin d\vartheta = d\vartheta,$$

$$S d\vartheta = q ds = q \rho d\vartheta, \quad \text{daher}$$

$$1) \quad S = q \rho.$$

Da nun S überall gleich war, so muss wegen der Unveränderlichkeit von q auch ρ über die ganze Länge des Riegels denselben Werth haben, d. h. der Riegel muss kreisförmig sein.

Zwischen den Wendesäulen A und B (Fig. 205) im Abstände $2a$ sind nun verschiedene Kreisbögen möglich. Für einen Halbmesser ρ und einen halben Mittelpunktswinkel α ist die Bogenlänge $AC = \rho \alpha$, die halbe Weite $a = \rho \sin \alpha$. Einer Spannkraft $S = q \rho$ entspricht ein Querschnitt $F = q \rho : \sigma$, wenn δ die Spannung, daher ein Rauminhalt des Riegels eines Flügels

$$V = F \rho \alpha = \frac{q}{\sigma} \rho^2 \alpha = \frac{q}{\sigma} a^2 \frac{\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Soll V möglichst klein werden, so muss nach der Regel vom Minimum

$$0 = \sin^2 \alpha - \alpha \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \text{oder}$$

$$2) \quad \text{tg } \alpha = 2 \alpha \quad \text{sein.}$$

Dieser Bedingung genügt ein Winkel $\alpha = 66^\circ 47'$ mit $\sin \alpha = 0,919$; dafür wird $\rho = a : 0,919 = 1,088 a$,

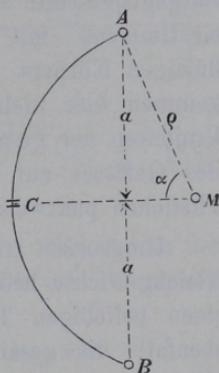
$$F = \frac{q}{\sigma} \rho = 1,088 a \frac{q}{\sigma}.$$

Praktischen Gebrauch macht man von dieser Untersuchung nicht; sie ist nur eine Übungsaufgabe der angewandten Mathematik.

i) Gesamtdruck auf die Gefässwände. Auftrieb einer Flüssigkeit.

Befindet sich in einem Gefässe (Fig. 206) ein flüssiger Körper mit freiem Wasserspiegel im Gleichgewichte, so wirkt an der Flüssigkeit als Massenkraft das Gewicht $Q = \gamma V$, lothrecht abwärts durch den Schwerpunkt S der Flüssigkeit gehend. Ist D der Gesamtdruck der Gefässwände gegen die Flüssigkeit, d. h. die gesamte Oberflächenkraft, so muss D mit Q im Gleichgewichte

Fig. 205.



sein, d. h. es ist $D = Q = \gamma V$, lothrecht aufwärts durch den Schwerpunkt der Flüssigkeit gehend. Der Gesamtdruck des flüssigen Körpers auf die Gefässwände ist nach dem Gesetze der Wechselwirkung das Entgegengesetzte von D , d. h. völlig übereinstimmend mit dem Gewichte Q des flüssigen Körpers. Seitendrücke D_x und D_y kommen hier nicht in Betracht, weil beim Projiciren der gesammten inneren Oberfläche des Gefässes auf eine lothrechte Ebene die Theilchen paarweise auf einander fallen.

Umgrenzen wir in einem grösseren, im Gleichgewichte befindlichen flüssigen Körper einen beliebigen Theil BCE (Fig. 207), so müssen an diesem ebenfalls die gesammte Massenkraft Q und der Gesamtdruck A aller umgebenden Flüssigkeitstheilchen sich aufheben. D. h. es muss $A = Q = \gamma V$, aufwärts gerichtet sein und durch den Schwerpunkt des Körpers V gehen. Vertauscht man nun den Flüssigkeitstheil BCE mit einem anderen Körper, dessen Oberfläche genau mit der Umgrenzung BCE übereinstimmt, so übt die umgebende Flüssigkeit auf den fremden Körper ganz dieselben Kräfte aus, wie auf den etwa erstarrt gedachten Theil BCE des flüssigen Körpers, mithin ist der Gesamtdruck der Flüssigkeit gegen einen in sie eingetauchten Körper

$$1) \quad A = \gamma V.$$

Diese Kraft heisst der **Auftrieb**. Sie ist ganz unabhängig von der Massenvertheilung des eingetauchten Körpers, lediglich bedingt durch den Flüssigkeitskörper, dessen Stelle der feste Körper einnimmt, also durch die von dem festen Körper verdrängte Flüssigkeit.

Der Auftrieb einer Flüssigkeit gegen einen in dieselbe eingetauchten Körper ist lothrecht aufwärts gerichtet, gleich dem Gewichte der verdrängten Flüssigkeit und geht durch deren Schwerpunkt.

Diese Regel gilt sowohl für einen völlig, als auch für einen nur theilweise eingetauchten Körper. In letzterem Falle bedeutet V

Fig. 206.

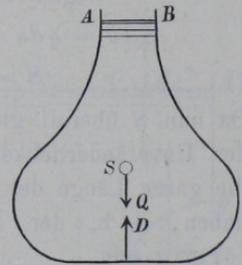
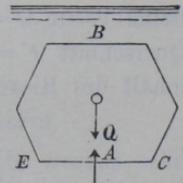


Fig. 207.



den Rauminhalt des unter Wasser befindlichen Theiles des eingetauchten Körpers. Befindet sich der eingetauchte Körper ganz unter Wasser und ist er nicht zusammendrückbar, so ist der Auftrieb unabhängig von der Tiefe des Körpers unter Wasser, weil nach S. 157 die Dichte γ unveränderlich ist.

Hängt man einen Körper vom Gewichte G an eine gleicharmige Waage (Fig. 208), so muss an der anderen Seite derselben ein Gewichtstück G angebracht werden, um den Körper im Gleichgewichte zu halten. Ist aber (Fig. 209) der an der Waage hängende Körper vom Rauminhalte V ganz in eine Flüssigkeit von der Dichte γ eingetaucht und ist sein Gewicht G grösser als der Auftrieb γV , so ist nur eine aufwärts gerichtete Kraft

$$2) \quad Q = G - A$$

nöthig, um den Körper im Gleichgewichte zu halten. Diese Kraft Q heisst das scheinbare oder relative Gewicht des Körpers in Bezug auf die

Flüssigkeit. Die Wägung eines Körpers im eingetauchten Zustande ersetzt in manchen Fällen eine Bestimmung des Rauminhaltes. Kennt man nämlich V , so ist damit auch der Auftrieb $A = \gamma V$ gegeben, d. h. der Unterschied von G und Q . Ist es aber nicht thunlich, V durch Messung zu bestimmen, so führt die Ermittlung des wahren und des scheinbaren Gewichtes (G und Q) zum Ziele, denn es ist nun

$$3) \quad V = (G - Q) : \gamma.$$

Damit hat man denn auch die mittlere Dichte γ_1 des eingetauchten Körpers, nämlich

$$4) \quad \gamma_1 = \frac{G}{V} = \gamma \frac{G}{G - Q},$$

oder, wenn er homogen ist, seine wahre Dichte.

Bekanntlich verwandte schon Archimedes (281—212 vor Chr.), der das Wesen des Auftriebes beim Baden erkannte, die doppelte Wägung, um fest-

Fig. 208.

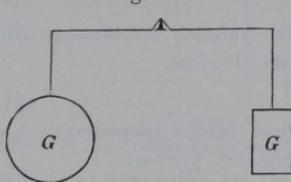
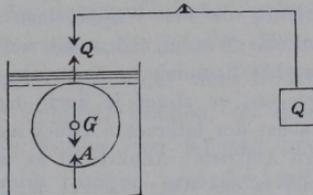


Fig. 209.



zustellen, wie viel Gold und wie viel Silber in der Krone des Hiero von Syrakus enthalten sei. Ist V_1 die Raummenge Goldes von der Dichte γ_1 , V_2 die Raummenge Silbers von der Dichte γ_2 in der Krone, so ist deren wahres Gewicht

$$5) \quad G = \gamma_1 V_1 + \gamma_2 V_2.$$

Der Auftrieb des Wassers (Dichte γ) ist $A = \gamma (V_1 + V_2)$, mithin das scheinbare Gewicht.

$$6) \quad G - Q = \gamma (V_1 + V_2).$$

Diese beiden Gleichungen 5 und 6 können nach den Unbekannten V_1 und V_2 aufgelöst werden:

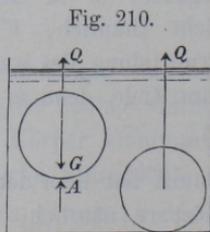
$$7) \quad V_1 = \frac{G \left(1 - \frac{\gamma_2}{\gamma}\right) + \frac{\gamma_2}{\gamma} Q}{\gamma_1 - \gamma_2}.$$

Um V_2 zu erhalten, braucht man in Gl. 7 nur die Indices 1 und 2 mit einander zu vertauschen.

Steht ein Gefäss mit Wasser auf einer Waagschale und taucht man mit dem Finger in das Wasser, so muss die Waagschale sich senken. Der Finger erfährt von dem Wasser einen Auftrieb A , und dieselbe Kraft übt der Finger auf das Wasser und somit auf das Gefäss nach unten aus. Ist V der eingetauchte Rauminhalt, F der Querschnitt des Gefässes in der Höhe des Wasserspiegels, so steigt ja auch das Wasser im Gefässe um $\Delta h = V : F$, dadurch wächst der lothrechte Druck auf das Gefäss um $\gamma F \Delta h = \gamma V$, d. h. genau um den Auftrieb. Ähnlich ist es, wenn man ein Stück Holz oder einen Fisch auf oder in das Wasser setzt; der lothrechte Druck auf das Gefäss ist dann, wenn wieder Gleichgewicht herrscht, genau um das Gewicht des Holzes oder Fisches gewachsen.

Die Kraft $Q = G - A = G - \gamma V$, die einen unter Wasser befindlichen Körper in der Schwebelage hält (Fig. 210), genügt auch, denselben langsam und gleichmässig im Wasser aufwärts zu bewegen (bei schneller Bewegung entstehen Bewegungswiderstände, die von der Geschwindigkeit abhängig sind). Auch wenn der Körper auf dem Boden des Gefässes liegt, ihn aber nur in einzelnen Punkten oder Linien, nicht in Flächen, berührt, wird eine aufwärts gerichtete, die Grösse $Q = G - \gamma V$ nicht wesentlich überschreitende Kraft hinreichen, den Körper vom Boden empor zu heben.

Zweifelhaft kann man über die Grösse der zum Emporheben vom Boden erforderlichen Kraft K sein, wenn der Körper den Boden des Gefässes mittels einer grösseren Fläche berührt. In dem



Falle der Fig. 211 lastet auf der oberen Fläche des Körpers eine Druckkraft γFh , und es muss

$$8) \quad K \geq G + \gamma \cdot F \cdot h$$

sein, um den Körper vom Boden abzuheben, wenn an der unteren Fläche des Körpers kein Wasserdruck wirkt.

Letztere Annahme wird aber in den meisten Fällen nicht zutreffen. Befand sich in dem Gefässe schon Wasser, bevor der Körper auf den Boden gesenkt wurde, so wird unter ihm eine dünne Wasserschicht verbleiben, die den Wasserdruck auf die untere Fläche überträgt, so dass nur

$$9) \quad K \geq G - \gamma V$$

zum Heben erforderlich sein wird.

Wird der Körper auf den Boden des leeren Gefässes gelegt und dann erst mit Wasser übergossen, so wird auch dann in Folge kleiner Unebenheiten, Poren u. dgl. an dem Körper oder dem Boden in der Regel Wasser unter den Körper dringen können, so dass Formel 9 gültig bleibt. Nur in solchen Fällen, wo Körper und Boden ohne Poren, sauber bearbeitet und trocken einander aufgeschliffen sind, wird das nachträglich eingeführte Wasser vielleicht nicht unter den Körper dringen können, so dass Formel 8 anzuwenden wäre.

Derartige Erwägungen sind erforderlich, wenn es sich um die Standsicherheit des Widerlagers einer gewölbten Brücke handelt. Steht das Widerlager im Trocknen, so hat man das wahre Gewicht G desselben mit dem Kämpferdrucke W des Gewölbes und dem etwaigen Enddrucke zusammenzusetzen, um daraus die für die Sicherheit des Widerlagers massgebende Mittelkraft R zu erhalten. Ist das Bauwerk aber einem Hochwasser $H \cdot W$ ausgesetzt, so hat man zu erwägen, ob es wahrscheinlich ist, dass das Wasser in die Fugen oder unter die Grundfläche des Mauerwerks dringen kann. In diesem Falle würde, wenn auch die Hinterfüllungserde

Fig. 211.

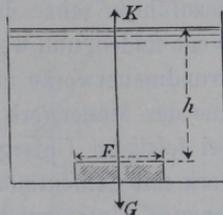
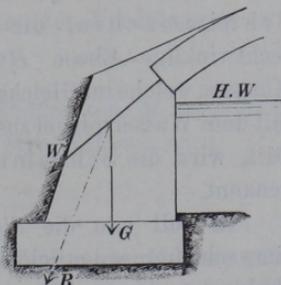


Fig. 212.



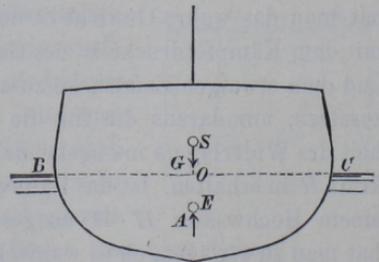
vom Wasser durchzogen ist, der unter Wasser befindliche Theil des Mauerwerks nur mit seinem scheinbaren Gewichte $Q = G - \gamma V = (\gamma_1 - \gamma) V$, d. h. bei $\gamma_1 = 2\gamma$ nur mit der Hälfte seines Gewichtes einzuführen sein. Ist der Boden kiesig, so dürfte das Wasser wohl Wege finden, um, wenn auch nicht sofort, doch mit der Zeit, unter dem Grundmauerwerke mit seinem vollen Drucke zu wirken, wogegen auch eine das Mauerwerk umschliessende Spundwand nicht schützen würde. Bei felsigem Untergrunde könnte es vielleicht gelingen, das Mauerwerk mit Cementmörtel dem Felsen wasserdicht anzuschliessen. Von genauer Untersuchung des Grundes und sorgfältiger Ausführung ist es abhängig, ob man in solchem Falle den Wasserdruck ausser Acht lassen darf.

k) Gleichgewicht schwimmender Körper.

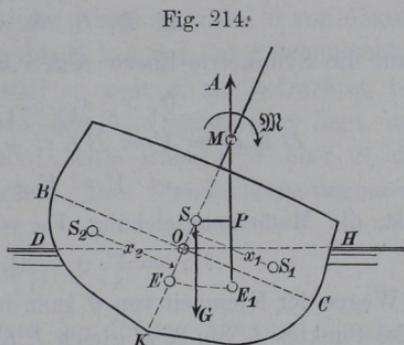
Ist die mittlere Dichte γ_1 eines Körpers kleiner als diejenige des Wassers, so fällt sein scheinbares Gewicht Q für Wasser $= G - \gamma V = (\gamma_1 - \gamma) V$ negativ aus. Der Körper wird daher, wenn er nicht durch eine besondere abwärts gerichtete Kraft Q niedergehalten wird, sich aus dem Wasser erheben, auf dem Wasser schwimmen und wird im Gleichgewichte sein, wenn der Auftrieb γV des eingetauchten Theiles V , der Verdrängung (des Displacement), sich mit dem wahren Gewichte G des Körpers im Gleichgewichte hält. Dazu ist erforderlich, dass $\gamma V = G$ sei und dass der Schwerpunkt S des Körpers mit dem Schwerpunkt E der verdrängten Wassermasse V in derselben Lothrechte liege. Die Gerade SE im Körper heisst die Schwimmachse, die zu ihr rechtwinklige Ebene BOC des Körpers, welche im Gleichgewichte mit dem Wasserspiegel zusammenfällt, wird die Schwimmebene genannt.

Es soll nun die Sicherheit eines schwimmenden Schiffes gegen Umkippen untersucht werden. Das Schiff habe eine Symmetrieebene, die durch die Schwimmachse SE geht.

Fig. 213.



Es werde in irgend einer Weise, etwa mittels zweier waagrechten Taue ein Kräftepaar \mathfrak{M} auf den Körper ausgeübt, dessen Achse rechtwinklig zur Querschnitts-Ebene steht, und dadurch eine Schiefstellung um den kleinen Winkel ϑ bewirkt. Hierdurch ändert sich die Form der Verdrängung und damit die Lage des Auftriebes A . Ist nun auch in dieser schrägen Lage (Fig. 214) Gleichgewicht, bilden G und A ein Kräftepaar, welches das Umsturzmoment \mathfrak{M} aufhebt, so befand



sich das Schiff in der aufrechten Lage (vor Einwirkung des Momentes \mathfrak{M}) im sicheren Gleichgewichte; nach einer Störung desselben kehrt es unter Einwirkung von G und A selbstthätig in die aufrechte Lage zurück. Nach Fig. 214 ist dazu erforderlich, dass die neue Lage von A (durch den Schwerpunkt E_1 der jetzigen Verdrängung DKH) rechts von G , d. h. rechts von S liege, dass A die Schwimmachse in einem Punkte M schneide, der oberhalb des Schwerpunktes S liegt. Das Standsicherheits-Moment ist dann

$$\mathfrak{M} = G \cdot SP = \gamma V \cdot \overline{SM} \sin \vartheta,$$

oder bei kleinem Winkel ϑ

$$1) \quad \mathfrak{M} = G \cdot \overline{SM} \cdot \vartheta = \gamma V \cdot \overline{SM} \cdot \vartheta.$$

Die Länge SM ist für die Standsicherheit massgebend. Nennt man die seitliche Verschiebung des Schwerpunktes der Verdrängung

$$EE_1 = x,$$

so kann EE_1 bei kleinem ϑ auch als Kreisbogen um M aufgefasst und $EE_1 = x = EM \cdot \vartheta$ gesetzt werden. Mit $ES = e$ wird

$$2) \quad SM = ME - e = \frac{x}{\vartheta} - e.$$

Da die Störung der aufrechten Lage durch ein Kräftepaar hervorgerufen wurde, so bleibt stets $A = G$, d. h. die Verdrängung V der Grösse nach unverändert; mithin muss das eintauchende

Keilstück $V_1 = COH$ mit dem Schwerpunkte S_1 gleich dem austauschenden Keilstücke $V_2 = BOD$ mit dem Schwerpunkte S_2 sein. Bezieht man nun die Schwerpunkte

$$E \quad E_1 \quad S_1 \quad S_2$$

auf die Symmetrie-Ebene $KESM$ mit den Abständen

$$0, \quad x, \quad x_1, \quad x_2, \quad \text{so gilt, weil}$$

$$DKH = V = BKC + OCH - OBD, \quad \text{d. h.}$$

$$V = V + V_1 - V_2$$

ist, die Momentengleichung $Vx = \Sigma(Vx)$ (Theil 1, S. 126):

$$Vx = V \cdot 0 + V_1 x_1 - V_2 (-x_2).$$

(Wegen der Kleinheit von ϑ kann nämlich der rechtwinklige Abstand des Punktes E von KM gleich $EE_1 = x$ gesetzt werden; auch wollen wir voraussetzen, dass BC und DH sich auf der Schwimmaxe in O schneiden und dass $x_1 = x_2$ gesetzt werden darf. Der Abstand des Punktes S_2 ist als $-x_2$ eingeführt, da S_2 links von KM liegt.) Hiernach wird

$$3) \quad x = \frac{2V_1 x_1}{V} \quad \text{und} \quad SM = \frac{2V_1 x_1}{V\vartheta} - e.$$

Die Grösse $V_1 x_1$ ist von der Gestalt der Wasserlinie (Fig. 215) abhängig. Ist in einem Abstände z von der Vorderkante die halbe Breite in der Schwimmebene y , so liefert ein Längentheilchen dz zu V_1 einen Beitrag $\frac{1}{2}y^2 \cdot \vartheta \cdot dz$ und zu $V_1 x_1$ annähernd einen Beitrag $\frac{1}{2}y^2 \cdot \vartheta \cdot \frac{2}{3}y \cdot dz = \frac{1}{3}y^3 \cdot \vartheta \cdot dz$, so dass

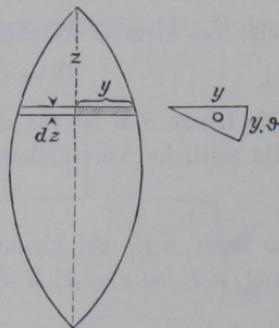
$$V_1 x_1 = \frac{1}{3} \vartheta \int y^3 \cdot dz$$

wird. Nun ist aber $\frac{1}{3}y dz \cdot y^2$ das Trägheitsmoment des in Fig. 215 schraffirten Theilchens der Schwimmfläche in Bezug auf ihre Längsachse (Theil 1, S. 271). Also ist das Trägheitsmoment der ganzen Schwimmfläche in Bezug auf ihre Längsachse

$$4) \quad \mathfrak{I} = \frac{2}{3} \int y^3 \cdot dz, \quad \text{so dass}$$

$$2V_1 \cdot x_1 = \mathfrak{I} \cdot \vartheta \quad \text{wird.}$$

Fig. 215.



Führt man dies in Gl. 3 ein, so ergibt sich

$$5) \quad SM = \frac{\mathfrak{S}}{V} - e.$$

Diese Länge ist hiernach bei kleinem Neigungswinkel ϑ von diesem Winkel unabhängig, oder der Punkt M hat auf der Schwimmaxe eine bestimmte Lage und wird, weil er, vom E aus betrachtet, bei sicherem Gleichgewichte jenseits des Schwerpunktes S liegt, das Metacentrum ($\mu\epsilon\tau\alpha =$ jenseits), seine Höhe SM über S die metacentrische Höhe genannt. Das Standsicherheitsmoment ist sonach

$$6) \quad \mathfrak{M} = \gamma V \left(\frac{\mathfrak{S}}{V} - e \right) \vartheta.$$

Ist der schwimmende Körper ein Prisma von der Länge l , ist F der Querschnitt der Verdrängung $V = Fl$ und b die Breite in der Schwimmebene, so wird $\mathfrak{S} = 1/12 lb^3$, daher

$$7) \quad SM = \frac{b^3}{12F} - e.$$

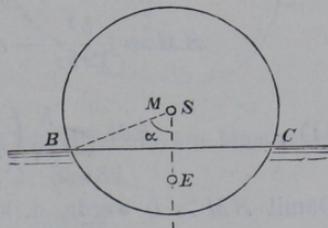
Die Länge SM ist jedoch nur für geringe Neigungswinkel von deren Grösse unabhängig. Für die stärkeren Bewegungen der Seeschiffe darf ein festes Metacentrum nicht angenommen werden.

Hat der eingetauchte Raum, die Verdrängung V , die Gestalt eines Cylinder- oder Kugelabschnittes, so ändert eine Drehung die Form von V gar nicht; es geht der Auftrieb stets durch die Achse des Cylinders bzw. den Mittelpunkt der Kugel. Ist der Körper ein Cylinder oder eine Kugel überall gleicher Dichte γ_1 , so fallen Schwerpunkt S und Metacentrum M zusammen; ein derartiger Körper schwimmt also in unentschiedenem Gleichgewichte; er setzt einer Drehung keinen Widerstand entgegen und kehrt auch nicht in die ursprüngliche Lage zurück.

Für die Eintauchung eines Cylinders (Fig. 216) gilt die Gleichung $r^2 \pi \gamma_1 = r^2 (\alpha - 1/2 \sin 2\alpha) \gamma$. Diese Gleichung lässt sich nach α nur durch Probieren auflösen, nach $\gamma_1 : \gamma$ aber mit:

$$8) \quad \frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{2\pi}.$$

Fig. 216.



Soll $\alpha = 60^\circ = \frac{1}{3}\pi$ werden, so muss

$$\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{\frac{2}{3}\pi - 0,866}{2\pi} = 0,195 \text{ sein.}$$

Für einen homogenen Halbcylinder (Fig. 217) ist die metacentrische Höhe $SM = \frac{4}{3} \frac{r}{\pi}$ (Theil 1, S. 132.) Die Eintauchtiefe ist bedingt durch

$$\frac{1}{2} r^2 \pi \gamma_1 = r^2 (\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha) \gamma \quad \text{oder}$$

$$9) \quad \frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{\pi}.$$

Soll jetzt $\alpha = 60^\circ$ werden, so muss $\gamma_1 : \gamma = 2 \cdot 0,195 = 0,39$ sein.

Für ein homogenes rechtwinkliges Parallelepipid von der Höhe h , der Breite b , der Dichte γ_1 (Fig. 218) gilt für die Eintauchtiefe z die Gleichung

$$\gamma z b = \gamma_1 h b, \quad \text{d. h.}$$

$$10) \quad z = h \frac{\gamma_1}{\gamma}.$$

Der Schwerpunkt S des Körpers liegt um $\frac{1}{2}h$, der Schwerpunkt E der Verdrängung um $\frac{1}{2}z$ vom Boden entfernt, mithin ist

$$e = ES = \frac{1}{2} (h - z) = \frac{h}{2} \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma} \right).$$

Dann wird nach Gl. 7 (S. 191), weil $F = bz$,

$$SM = \frac{b^3}{12bz} - e = \frac{b^2}{12h} \frac{\gamma}{\gamma_1} - \frac{h}{2} \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma} \right),$$

$$11) \quad SM = \frac{h}{12} \left(\frac{b^2}{h^2} \frac{\gamma}{\gamma_1} - 6 \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma} \right) \right).$$

Damit $SM > 0$ werde, d. h. Standsicherheit vorhanden sei, muss etwa für Holz mit $\gamma_1 = 0,6 \gamma$

$$\frac{b}{h} > \sqrt{6 \cdot 0,6 \cdot 0,4} = 1,2 \quad \text{sein.}$$

Fig. 217.

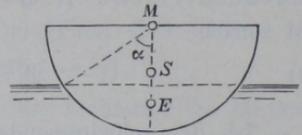
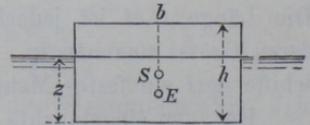


Fig. 218.



Ist aber (Fig. 219) $b = 8h$ und wiederum $\gamma_1 = 0,6 \gamma$, so wird

$$SM = \frac{h}{12} \left(\frac{64}{0,6} - 6 \cdot 0,4 \right) = 8,7 h.$$

Ein solcher flossartiger Körper hat also eine grosse metacentrische Höhe und bedeutende Standsicherheit. Jedoch gilt dies nur, so lange von den Oberkanten J und K keine unter Wasser, von den Unterkanten N und L keine über Wasser liegt. Bei stärkeren Neigungen, wie sie in unruhigem Wasser leicht vorkommen, ist die Standsicherheit geringer.

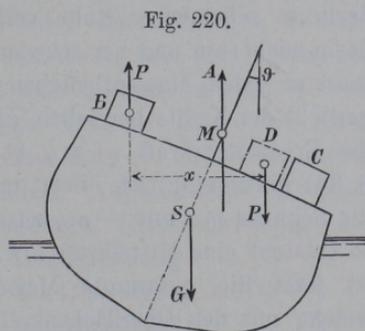
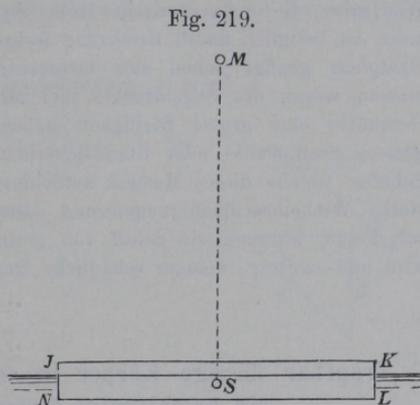
Bei neu gebauten Schiffen wird die metacentrische Höhe SM zuweilen durch einen Krängungs-(Neigungs-)Versuch ermittelt. Das Schiff möge anfänglich gerade geschwommen haben.

Wird nun eine schwere Last P von B etwa nach D verschoben um die Entfernung x , so ist die Fortnahme von B gleichbedeutend mit der Anbringung einer dort aufwärts gerichteten Kraft P , während bei D eine gleiche abwärts gerichtete Kraft auftritt. Die Verschiebung bewirkt demnach ein Kräftepaar Px . Entsteht dabei eine Schräg-

stellung um den Winkel ϑ , der mittels eines Lothes am Mastbaum abgelesen werden kann, so ist nach Gl. 1, S. 189

$$G \cdot \overline{SM} \cdot \vartheta = P \cdot x, \quad \text{mithin}$$

$$SM = \frac{P}{G} \frac{x}{\vartheta}.$$



Beispiel: Für ein Seeschiff betrage die Verdrängung $V = 10\,000 \text{ cbm}$, dann ist, weil für Seewasser $\gamma = 1025 \text{ kg/cbm}$, $G = 10\,250 \text{ t}$. Wird eine schwere Last (etwa ein Geschütz) von $P = 20 \text{ t}$ um 5 m seitwärts verschoben und entsteht dadurch eine Neigung $\vartheta = 1/2^\circ = 0,0087$, so folgt

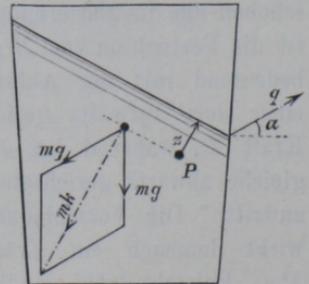
$$SM = \frac{20}{10\,250} \frac{5}{0,0087} = 1,11 \text{ m}.$$

Wie gross die metacentrische Höhe für Schiffe verschiedenen Zweckes sein muss, ist lediglich durch Erfahrung festgestellt worden. Bei transatlantischen Dampfern genügt schon eine metacentrische Höhe von $0,3 \text{ m}$; Segelschiffe müssen wegen des Segeldruckes und Kriegsschiffe wegen des Abfeuerns der Geschütze eine grosse Steifigkeit haben, daher etwa $SM = 1 \text{ m}$. Ein zu grosses Steifigkeits- oder Standsicherheits-Moment ist für die Festigkeit des Schiffes, welche dieses Moment aufnehmen muss, nicht vortheilhaft, hat auch starke Winkelbeschleunigungen und daher heftige, unangenehme Bewegungen zur Folge, während ein Schiff von geringerer Steifigkeit weniger angegriffen wird und sanftere, weniger schädliche Bewegungen ausführt.

1) Tropfbar flüssige Körper in scheinbarer Ruhe in Bezug auf ein beschleunigt fortschreitendes Gefäss.

Das Gefäss (Fig. 221) möge eine gleichbleibende Beschleunigung q mit der Neigung α aufwärts haben, Soll nun eine Flüssigkeit darin in scheinbarer Ruhe verbleiben, darin nicht hin und her schwanken, so muss an jedem Massentheilchen Gleichgewicht der Kräfte herrschen, nachdem die Ergänzungskraft $-mq$ (1. Theil, S. 84) hinzugefügt ist. Setzt man nun die Schwere mg mit $-mq$ zusammen, so entsteht eine Mittelkraft mk . Dies ist jetzt die gesammte Massenkraft, welche mit den Oberflächenkräften im Gleichgewichte sein muss. An die Stelle der einzigen Massenkraft mg im wirklichen Ruhezustande tritt nun in jeder Beziehung mk . Der Wasserspiegel muss daher jetzt rechtwinklig zur Richtung von k stehen. Für den Druck p in einem rechtwinkligen Abstände z

Fig. 221.



vom Wasserspiegel gilt $p \cdot dF = \frac{\gamma}{g} dF \cdot zk$, weil ein Prisma von

der Höhe z und der Grundfläche dF die Masse $\frac{\gamma}{g} dF \cdot z$ hat; also

$$1) \quad p = \frac{\gamma}{g} k z.$$

Ist q schräg nach unten gerichtet (Fig. 222), so kann k auch wagerecht, der Wasserspiegel also lothrecht werden. Dazu ist erforderlich, dass $q \sin \alpha = g$.

Bei lothrecht aufwärts gerichtetem q wird

$$k = g + q; \quad p = \gamma \left(1 + \frac{q}{g}\right) z.$$

Bei lothrecht abwärts gerichtetem q wird

$$k = g - q; \quad p = \gamma \left(1 - \frac{q}{g}\right) z.$$

Für $q = g$ wird in diesem Falle

$$k = 0 \quad \text{und} \quad p = 0.$$

Wenn also ein Gefäß mit Wasser im luftleeren Raume frei fällt, so übt das Wasser keinen Druck auf die Gefäßwände aus. Lassen wir deshalb das Gefäß ganz fort, so dass das Wasser im luftleeren Raume frei fällt, so ist auch jetzt unter den bisherigen Voraussetzungen das Wasser drucklos und ohne Bestreben, eine bestimmte Form anzunehmen. In Wirklichkeit aber herrscht in dem Wasser eine sog. Oberflächen-Spannung; diese hat das Bestreben, einen Körper kleinster Oberfläche, d. h. eine Kugel, zu bilden; unter ihrer Einwirkung entsteht die Bildung kugelförmiger Tropfen. Allerdings würde auch die gegenseitige Massenanziehung der Theilchen eines flüssigen Körpers eine Tropfenbildung herbeiführen, doch ist diese (1. Theil, S. 54) so klein, dass sie bei Körpern geringer Grösse gegenüber der Oberflächenspannung verschwindet.

Ist die Beschleunigung $q > g$ und lothrecht abwärts gerichtet, so hat jedes Theilchen das Bestreben, mit der Beschleunigung $k = q - g$ gegen die obere Fläche des Gefäßes zu fallen (1. Theil, S. 86). Scheinbare Ruhe ist dann nur möglich bei oben befindlichem Boden und unten befindlichem wagerechten Wasserspiegel (Fig. 223).

Fig. 222.

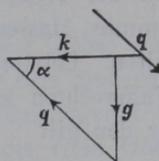
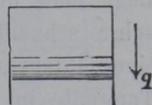


Fig. 223.



m) Tropfbar flüssige Körper in gleichmässiger Drehung um eine Achse.

Die in einem cylindrischen Gefässe befindliche Flüssigkeit werde durch eine mit Flügeln versehene Welle mittels einer oben angebrachten Riemenscheibe in gleichmässiger Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit ω erhalten (Fig. 224). Dann hat man an jedem Massentheilchen m zu der wirklichen Massenkraft mg nach Theil 1, S. 88 noch die Centrifugalkraft $m x \omega^2$ hinzuzufügen, (wenn x der Abstand des Massentheilchens von der Achse ist), um die gesammte Massenkraft mk zu erhalten. Letztere schliesst mit der Wagerechten einen Winkel α ein, für den gilt

$$1) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{g}{x \omega^2}.$$

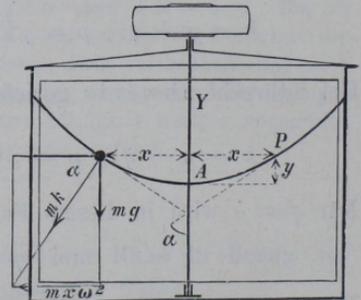
Liegt das Massentheilchen an der Oberfläche und denkt man sich die übrige Masse ausser jenem Theilchen zu einem festen, völlig glatten Körper erstarrt, so muss die Fläche, damit das Theilchen auf ihr in scheinbarer Ruhe verbleibe, rechtwinklig zu der Massenkraft mk stehen, d. h. jenen Winkel α mit der Lothrechten einschliessen. Da die Verhältnisse für alle Punkte einer wagerechten Ebene, die in dem gleichen Abstände x von der Achse sich befinden, dieselben sind, so muss die Oberfläche eine Umdrehungsfläche sein, deren Meridianlinie im Abstände x von der Achse eine Neigung α gegen die Drehachse hat. Für $x = 0$ ist (nach Gl. 1) $\alpha = 90^\circ$; mit wachsendem x verkleinert sich α , wird die Kurve steiler. Legt man durch den Punkt A , in welchem die Kurve die Drehachse schneidet, ein Achsenkreuz, sind x und y die Koordinaten eines Punktes P der Kurve, so ist das Neigungsverhältnis der Tangente im Punkte P gegen die Lothrechte $A Y$

$$\operatorname{tg} \alpha = dx : dy.$$

Verbindet man hiermit Gl. 1, so wird

$$\begin{aligned} \omega^2 x dx &= g dy \quad \text{oder} \\ d(1/2 \omega^2 \cdot x^2) &= d(g \cdot y). \end{aligned}$$

Fig. 224.



Sind nun die Differentiale zweier Grössen einander gleich, so unterscheiden sich die Grössen selbst um eine von den Veränderlichen unabhängige Grösse C ; mithin wird

$$2) \quad \frac{1}{2} \omega^2 \cdot x^2 = g \cdot y + C.$$

Die Grösse C ist abhängig von der willkürlichen Lage des Anfangspunktes A . Hier ist A so gelegt, dass er mit $x = 0$ und $y = 0$ der gesuchten Kurve angehört. Die allgemeine Gleichung 2 muss also für $x = 0$ und $y = 0$ gültig bleiben. Daraus entsteht die Bedingung $0 = 0 + C$, d. h. $C = 0$ und

$$3) \quad x^2 = \frac{2g}{\omega^2} y \quad \text{oder} \quad y = \frac{\omega^2 x^2}{2g}.$$

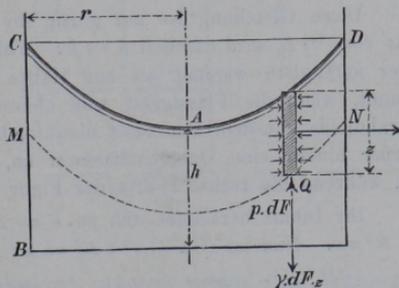
Dies ist die Gleichung einer Parabel mit lothrechter Achse vom Parameter $a: \omega^2$, übereinstimmend mit der Form des sich drehenden Armes (1. Theil, S. 91, Fig. 90), auf dem ein Massenpunkt an jeder Stelle in scheinbarer Ruhe verbleiben soll; die freie Oberfläche ist sonach ein Umdrehungs-Paraboloid. Je grösser ω ist, desto kleiner wird der Parameter, desto steiler stellt sich die Parabel in einem gewissen Abstände von der Achse. Da $\omega x = v$ die Umfangsgeschwindigkeit der Drehung an der Stelle P , so ist die Höhe y dieses Punktes über dem tiefsten Punkt A nach der zweiten Fassung der Gl. 3 gleich der Geschwindigkeitshöhe der Drehgeschwindigkeit des Punktes.

Um den Druck p an irgend einem Punkte Q der sich drehenden Flüssigkeit zu ermitteln, trennen wir (Fig. 225) ein lothrechtcs, von

Q bis zur Oberfläche reichendes Prisma heraus. An dessen Grundfläche dF wirkt die Druckkraft $p \cdot dF$ aufwärts; diese muss gleich dem Gewichte $\gamma \cdot dF \cdot z$ des Prismas sein, wenn Q in der lothrechten Tiefe z unter der Oberfläche liegt. Die Centrifugalkraft des Prismas kommt in der Gleichung der lothrechten Kräfte nicht vor. Also

$$4) \quad p = \gamma z.$$

Fig. 225.



Für überall gleiche z bekommt auch p überall denselben Werth. Flächen gleichen Druckes haben also in allen Punkten gleiche lothrechte Tiefe unter der Oberfläche, d. h. dieselbe Form MN wie die Oberfläche CD , sind nur in lothrechtem Sinne dagegen verschoben.

Liegt der tiefste Punkt A der Oberfläche um h über dem Boden, so ist der stärkste Druck im Gefässe, nämlich bei B , von der Grösse

$$5) \quad p_1 = \gamma \cdot \overline{BC} = \gamma \left(h + \frac{\omega^2 r^2}{2g} \right),$$

wenn r der Drehungshalbmesser von B oder C .

Beispiel: Ein cylindrisches Gefäss (Fig. 226) von der Weite $2R$ und der Tiefe H sei ursprünglich auf eine Höhe c mit ruhender Flüssigkeit gefüllt. Wie gross muss die Drehungsgeschwindigkeit $v = \omega R$ am Umfange werden, damit die Flüssigkeit bis zum Rande steige? Bildet sich bei der Drehung im Gefäss ein vollständiges Paraboloid als Oberfläche, liegt also der tiefste Punkt A des Paraboloides noch um h über dem Boden, so ist, weil der Inhalt eines Paraboloides nach Theil 1, S. 138 halb so gross wie der des umschriebenen Cylinders, die Flüssigkeitsmenge im Gefässe

$$R^2 \pi (H - \frac{1}{2}(H - h)) = \frac{1}{2} R^2 \pi (H + h).$$

Dies muss $= R^2 \pi c$ sein, d. h. $H + h = 2c$. Nach Gl. 3 (S. 197) ist aber

$$H - h = \frac{v^2}{2g}; \text{ mithin}$$

$$2H = 2c + \frac{v^2}{2g} \text{ oder}$$

$$6) \quad \frac{v^2}{2g} = 2(H - c).$$

Diese Gleichung ist nur gültig für $c \geq \frac{1}{2}H$. Für $c = \frac{1}{2}H$ wird nämlich $h = 0$. War das Gefäss aber anfänglich weniger als zur Hälfte gefüllt, so kommt, wenn die Flüssigkeit zum oberen Rande steigt, der untere Theil des Paraboloides mit dem Punkte A nicht mehr zur Ausbildung. Der Flüssigkeitskörper nimmt eine Querschnittsform an, wie sie in Fig. 227 links gezeichnet ist, während die rechte Hälfte der Figur den Ruhezustand darstellt.

Ihr Inhalt berechnet sich zu $V = R^2 \pi H - \frac{1}{2} R^2 \pi (H + h) + \frac{1}{2} r^2 \pi h = R^2 \pi c$. Nun ist (Gl. 3) $r^2 : R^2 = h : (H + h)$, also

$$\frac{R^2 H}{2} - \frac{R^2 h}{2} + \frac{R^2 h^2}{2(H + h)} = R^2 c \text{ oder}$$

$$H^2 = 2c(H + h), \text{ mithin,}$$

Fig. 226.

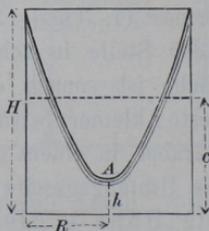
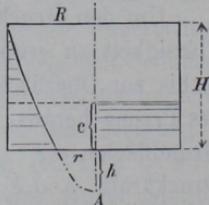


Fig. 227.



$$\text{weil } \frac{v^2}{2g} = H + h \text{ ist,}$$

$$7) \quad \frac{v^2}{2g} = \frac{H^2}{2c}; \quad h = \frac{v^2}{2g} - H.$$

Für $c > 1/2 H$ gilt Gl. 6, für $c < 1/2 H$ Gl. 7, für $c = 1/2 H$ geben beide übereinstimmend $\frac{v^2}{2g} = H$.

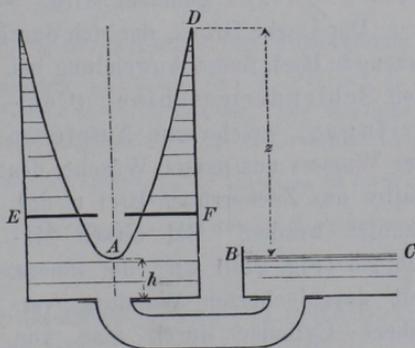
Für $c = 2/3 H$ giebt Gl. 6: $\frac{v^2}{2g} = \frac{2}{3} H$; der Punkt A (Fig. 226) bleibt um $h = 1/3 H$ über dem Boden.

Für $c = 1/3 H$ giebt Gl. 7: $\frac{v^2}{2g} = \frac{3}{2} H$; der tiefste Punkt A des nach unten fortgesetzten Paraboloides liegt (Fig. 227) um $1/2 H$ unter dem Boden. ferner wird $r^2 : R^2 = 1/3$, oder $r = 0,577 R$.

Befinden sich im Gefässe keine Flügel, setzt man aber das Gefäss selbst in Drehung um seine lothrechte Achse, so nimmt der flüssige Körper nicht sofort an der Drehung Theil. Bei dem Fehlen jedes Reibungswiderstandes zwischen Gefäss und Flüssigkeit würde letztere durch Drehung des Gefässes überhaupt nicht mitgenommen werden, würde vielmehr in Ruhe verbleiben. Da aber in Wirklichkeit Reibung stattfindet, so wird durch schnelle Drehung des Gefässes auch die Flüssigkeit bald in nahezu die gleiche Drehgeschwindigkeit versetzt.

In den vorstehenden Beispielen wurde eine bestimmte Flüssigkeitsmenge in dem Gefässe angenommen, so dass das Steigen am Umfange eine Senkung in der Mitte zur Folge haben musste. Steht aber (Fig. 228) die Mitte des Bodens des cylindrischen Gefässes, in welchem das Wasser durch Flügel in Drehung um die lothrechte Achse des Gefässes versetzt wird (die Flügel sind in der Figur fortgelassen), durch eine Röhre mit einem grösseren Gefässe in Verbindung, so wird der Punkt A mit dem Wasserspiegel BC in gleicher Höhe liegen müssen, wenn das Wasser im Verbindungsrohr in Ruhe bleiben soll. Bei einer Umfangsgeschwindigkeit v des Wassers am Rande wird dann dessen höchster Punkt D

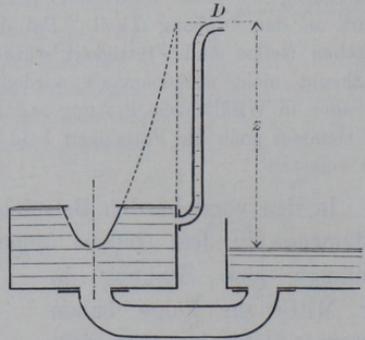
Fig. 228.



um $z = \frac{v^2}{2g}$ über BC liegen, so dass die Vorrichtung ein Mittel darstellt, Wasser zu heben. Bringt man etwas unterhalb D einen Überlauf an, so hat man eine Art von Kreiselpumpe. Doch genügt die Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gz}$ noch nicht zu deren Betriebe, d. h. zur Bewegung des Wassers durch die Pumpe hindurch, sondern nur zum Halten des Wassers im gehobenen Zustande. Für den Betrieb, für wirkliche Wasserförderung würde eine grössere Geschwindigkeit v erforderlich sein, deren Entwicklung aber über den Rahmen dieses Buches hinausgeht.

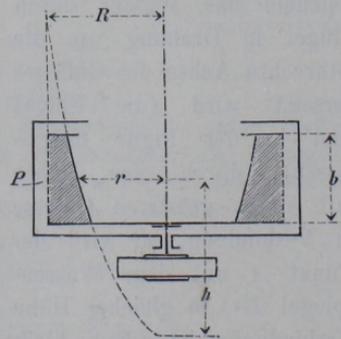
In den Druckverhältnissen des flüssigen Körpers wird dadurch nichts geändert, dass man in Fig. 228 bei EF eine Platte einschleibt, sie mit dem Gefässmantel fest verbindet und den darüber befindlichen Theil des Gefässes und der Flüssigkeit fortnimmt. Es entsteht dann eine Vorrichtung (Fig. 229), bei welcher der am Umfange herrschende Druck sich dadurch bemerkbar machen wird, dass das Wasser in einem seitlichen Rohre sich bis D über das Unterwasser erheben wird, wenn $v = \sqrt{2gz}$ gemacht wird.

Fig. 229.



Der starke Druck, der sich durch grosse Umfangsgeschwindigkeit erzeugen lässt, findet Anwendung bei den Schleudermaschinen (Centrifugen), welche zum Auspressen des Wassers aus nasser Wäsche, des Saftes aus Zuckerrüben-Brei u. dgl. benutzt werden. Bei diesen Maschinen (Fig. 230) wird der innere, mit durchlöcherter Wandung versehene Cylinder durch eine von unten mit ihm verbundene Welle in so schnelle Drehung gesetzt, dass von der paraboloidischen Oberfläche nur ein kleines, sehr steil ansteigendes Stück zur Ausbildung

Fig. 230.



gelangt. Als flüssigen Körper wollen wir uns Rübenmasse denken, welche den schraffirten ringförmigen Körper bildet, der annäherungsweise als ein Ring von der Wandstärke $R - r$ angesehen werden kann. Der drehbare Cylinder ist von einem festen Gehäuse umgeben, in welches der Saft durch die Öffnungen des Mantels eintritt. Der Druck an dem Punkte P beträgt

$$p = \gamma \left(\frac{v^2}{2g} - h \right) \quad \text{oder}$$

$$\text{weil (nach Gl. 3, S. 197) } h = \frac{\omega^2 r^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} \frac{r^2}{R^2},$$

$$p = \gamma \frac{v^2}{2g} \frac{R^2 - r^2}{R^2}.$$

Der stärkste Druck am unteren Rande ist noch um $1/2 \gamma b$ grösser. Doch ist dieser Unterschied unbedeutend.

Ist b die Höhe der Trommel, so beträgt das Gewicht der eingefüllten Rübenmasse $Q = \gamma (R^2 - r^2) \pi b$, so dass

$$p = \frac{Q}{R^2 \pi b} \frac{v^2}{2g}$$

geschrieben werden kann, oder, wenn man den Inhalt der ganzen Trommel $R^2 \pi b = V$ setzt,

$$8) \quad p = \frac{Q}{V} \frac{v^2}{2g}.$$

Der Druck ist also mit der Ladung Q der Trommel verhältnissgleich.

Beispiel: Für eine Schleudermaschine sei $R = 0,5 \text{ m}$, $b = 0,5 \text{ m}$, die Ladung $Q = 160 \text{ kg}$, der Rauminhalt $V = 0,5^2 \pi \cdot 0,5 = 0,393 \text{ cbm}$. Die Maschine mache 1000 Umdrehungen in der Minute, dann ist $v = 1/6 \cdot 314 = 52,3 \text{ m/sek}$.

mit $\frac{v^2}{2g} = 140 \text{ m}$ und $p = \frac{160}{0,393} \cdot 140 = 57000 \text{ kg/qm} = 5,7 \text{ kg/qcm} = 5,7 \text{ at}$.

Die Wandung der Trommel muss also einen inneren Druck von $5,7 \text{ at}$ aushalten.

Das Mantelblech erfährt eine Spannung $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, worin $\sigma_1 = 2 \gamma_1 \frac{v^2}{2g}$

(s. S. 95, Gl. 4) durch die eigene Masse des Bleches, $\sigma_2 = p \frac{R}{\delta}$ (s. S. 166, Gl. 2)

durch den innern Druck p entsteht. Ist $\gamma_1 = 7800 \text{ kg/cbm}$, $\delta = 5 \text{ mm} = 0,005 \text{ m}$, so wird

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 2 \cdot 7800 \cdot 140 = 2184000 \\ \sigma_2 &= 57000 \cdot 100 = 5700000 \\ \sigma &= \frac{\quad}{7884000 \text{ kg/qm}} \end{aligned}$$

oder $\sigma = 788 \text{ at}$. Diese erhebliche Anspannung macht es erklärlich, dass derartige Schleudermaschinen in ähnlicher Weise wie Dampfkessel einer sorgfältigen Überwachung unterliegen; besonders muss mit Rücksicht auf Gl. 8 eine Überladung (zu grosses Q) vermieden werden.

3. Gleichgewicht gasförmiger Flüssigkeiten.

Während tropfbar flüssige Körper nahezu unveränderlichen Rauminhalt zeigen, ist der Rauminhalt der Gase in hohem Masse veränderlich. Wie man das Verhalten elastisch-fester Körper mit Hilfe von Elasticitätsgesetzen beurtheilen konnte, so giebt es für Gase einfache Gesetze, denen ihr äusseres Verhalten unterworfen ist. Eine Änderung des Rauminhaltes einer Gasmenge kann erfolgen durch eine Änderung seiner Temperatur oder seines Druckes (oder beider); die Beziehung zwischen diesen Grössen heisst die Zustandsgleichung.

Es empfiehlt sich, die allgemeinen Gesetze über die Raumänderung auf eine bestimmte Menge eines Gases, nämlich auf 1 kg zu beziehen. Der Rauminhalt, den 1 kg eines Gases in irgend einem Zustande einnimmt, heisst der Einheitsraum oder das spezifische Volumen und wird mit v bezeichnet. Die Dichte, d. h. das Gewicht von 1 cbm wird auch hier mit γ bezeichnet. Da nun Dichte mal Rauminhalt gleich dem Gewichte ist, so wird das Gewicht des Einheitsraumes v sein γv , und dies muss $= 1 \text{ kg}$ sein, weil v ja die Raummenge von 1 kg war. Somit ist

$$1) \quad \gamma v = 1; \quad v = 1:\gamma.$$

a) Der Boyle-Mariotte'sche Satz.

Bei gleichbleibender Temperatur ändert sich die Dichte eines Gases verhältnissgleich mit dem Drucke, der Einheitsraum also umgekehrt verhältnissgleich mit dem Drucke.

Beziehen sich p_1, v_1, γ_1 auf einen Anfangszustand, p, v, γ auf einen anderen Zustand, so ist zufolge der Erfahrung

$$2) \quad \frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{p}{p_1} = \frac{v_1}{v},$$

oder es ist $p v = \frac{p}{\gamma}$ eine unveränderliche Grösse, solange die Temperatur unverändert erhalten wird.

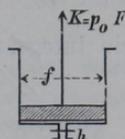
Dies Verhalten der Gase ist vom Engländer Boyle (geb. 1626 zu Lismore (Irland), gest. 1691 zu London) im Jahre 1662 entdeckt, 1679 von dem Franzosen Mariotte (geb. 1620 zu Bourgogne, gest. zu Paris 1684) durch viele Versuche bestätigt worden und wird meist nach Letzterem benannt.

Wird also ein Gas auf $\frac{1}{5}$ seines ursprünglichen Raumes zusammengedrückt, mithin seine Dichte um das Fünffache vergrößert, so erhöht sich sein Druck ebenfalls auf das Fünffache — jedoch nur unter der Voraussetzung, dass das Gas nachher dieselbe Temperatur zeigt wie vorher. In den meisten Fällen findet beim Zusammendrücken eine Temperatur-Erhöhung statt, in Folge dessen der Satz dann nicht gültig ist. Nur wenn man durch besondere Vorkehrungen die Temperatur-Änderung verhindert, darf der Satz zur Anwendung gebracht werden.

b) Druckverhältnisse der Atmosphäre bei überall gleicher Temperatur.

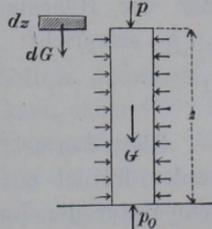
Die Atmosphäre übt auf alle mit ihr in Berührung befindlichen Körper einen Druck aus, der in der Höhe des Meeresspiegels im Mittel $p_0 = 10333 \text{ kg/qm}$ beträgt. Man kann sich hiervon überzeugen, wenn man (Fig. 231) einen Kolben in einem Cylinder vom Querschnitt F bei geöffnetem Hahne h abwärts schiebt, bis sämtliche Luft unter dem Kolben entfernt ist und dann nach Schliessung des Hahnes den Kolben in die Höhe zu ziehen versucht. Es setzt sich dem, abgesehen von Reibungswiderständen, ein Widerstand $K = p_0 F$ entgegen, der nur von der Wirkung der Luft auf die obere Kolbenfläche herrühren kann. 1 cbm Luft hat bei diesem Drucke p_0 und bei 0° C. ein Gewicht $\gamma_0 = 1,293 \text{ kg.}$

Fig. 231.



Ebenso wie im Wasser muss auch in der Luft der Druck nach oben hin abnehmen, allerdings nach einem anderen Verhältnisse, weil die Dichte der Luft veränderlich ist. Betrachten wir eine Luftsäule von 1 qm Querschnitt, die vom Meeresspiegel lothrecht in die Höhe sich erstreckt, so kann man nach S. 159 auch auf diese (Fig. 232) die Gleichgewichts-Bedingungen für starre Körper

Fig. 232.



für starre Körper

anwenden. Ist p der Luftdruck in einer Höhe z über dem Meeresspiegel, so wirken an der Luftsäule von der Höhe z die lothrechten Kräfte p_0 , p und das Gewicht G ; die Seitendrücke kommen nicht in Frage, wenn wir p berechnen wollen. Es ist demnach

$$1) \quad p = p_0 - G.$$

Wäre die Dichte überall γ_0 , so könnte man $G = \gamma_0 z$ setzen; dies ist aber hier nicht zulässig, weil mit p auch γ nach oben hin abnimmt. Die Differentiation der Gl. 1 nach z giebt

$$\frac{dp}{dz} = 0 - \frac{dG}{dz}.$$

Nennt man γ die Dichte der Luft in der Höhe z , so ist dG das Gewicht eines Höhentheilchens dz der Säule, daher $dG = \gamma dz$. Hiernach wird

$$2) \quad dp = -\gamma dz.$$

Weil nun nach dem Boyle'schen Satze $\gamma : \gamma_0 = p : p_0$, so folgt

$$dp = -\frac{\gamma_0}{p_0} p dz, \text{ oder}$$

wenn man behufs der Integration p mit dp auf dieselbe Seite der Gleichung bringt,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\gamma_0}{p_0} dz.$$

Die Integration dieser Gleichung ergiebt:

$$\ln(p) = -\frac{\gamma_0}{p_0} z + C.$$

Nennt man p_1 und p_2 die Atmosphärendrücke in den Höhen z_1 und z_2 über dem Meeresspiegel, so wird

$$\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = -\frac{\gamma_0}{p_0}(z_1 - z_2) = \frac{\gamma_0}{p_0}(z_2 - z_1),$$

oder der Höhenunterschied $h = z_2 - z_1$, der dem Verhältnisse $p_1 : p_2$ entspricht:

$$3) \quad h = \frac{p_0}{\gamma_0} \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right).$$

Diese Formel kann zum barometrischen Höhenmessen benutzt werden, freilich nur als erste Annäherung, weil darin überall gleiche Temperatur der Luftsäule angenommen ist. Für 0° C. ist

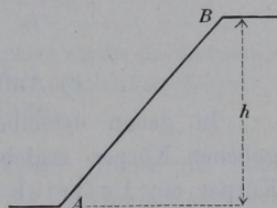
$$p_0 : \gamma_0 = 10\,333 : 1,293 = 7992^m,$$

wofür man mit genügender Annäherung 8000^m schreiben darf. Will man sich Briggische Logarithmen bedienen, so hat man, weil der natürliche Log. grösser ist als der Briggische, auf der rechten Seite noch den Faktor $2,30259 = \ln 10$ hinzuzufügen und erhält rund

$$4) \quad h = 18400 (\log p_1 - \log p_2).$$

Es ist für die Anwendung der Gleichung nicht erforderlich, dass die beiden Punkte, deren Höhenunterschied man ermitteln will, in einer Lothrechten liegen. Die Gleichung ist ebenso gut auf die Punkte A und B (Fig. 233) anwendbar, wenn nur zwischen beiden ein schräges Luftprisma gleicher Temperatur im Ruhezustande sich befindet. Der Luftdruck wird bekanntlich mittels Barometers durch eine Quecksilbersäule ausgedrückt. Da der Luftdruck mit jener Säule verhältnissgleich ist, so kann man in dem Verhältnisse $p_1 : p_2$ unmittelbar die Barometer-Ablesungen anstatt der Drücke benutzen.

Fig. 233.



Beispiel 1: Es sei $p_1 = 749,2$ mm, $p_2 = 692,7$ mm Quecksilbersäule, dann ist

$$h = 18400 (\log 749,2 - \log 692,7) = 628 \text{ m},$$

Später (S. 214) werden wir dasselbe Beispiel mit Rücksicht auf verschiedene Temperaturen in A und B behandeln.

Beispiel 2: Auf S. 8 wurde für die Atmosphäre der runde Werth $1 \text{ kg/qcm} = 10000 \text{ kg/qm}$ eingeführt. Es soll mittels der Gl. 4 berechnet werden, in welcher Höhe über dem Meere dieser Druck bei 0° C. etwa stattfindet.

$$h = 18400 (\log 10333 - \log 10000) = 264 \text{ m},$$

d. i. etwa die Höhe von Ilseburg am Fusse des Brockens (s. 1. Theil, S. 94).

Zu einem Höhenunterschiede $h = 100^m$ gehört nach Gl. 4 ein Werth

$$\log \left(\frac{p_1}{p_2} \right) = \frac{100}{18400} = 0,0054348.$$

oder $p_1 : p_2 = 1,01259$. In dem gleichen Verhältniss ändert sich auch die Dichte, d. h. etwa nur um $1/80$. Man kann daher für alle Fälle, bei denen es nicht auf grosse Genauigkeit ankommt, für Luftsäulen bis zu 100^m die Dichte als überall gleich betrachten.

Mit überall gleicher Dichte $\gamma = 1,293$ gerechnet, würde auf 100^m Höhe ein Unterschied des Luftdrucks von $129,3 \text{ kg/qm}$ sich ergeben, also, wenn

$p_1 = 10333$, würde $p_2 = 10204$, mit einem Verhältnisse $1,01264$, welches von dem obigen genaueren Werthe nur sehr wenig abweicht. Diese Übereinstimmung hängt auch damit zusammen, dass in der Reihe

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \dots$$

für kleine x einfach $\ln(1+x) = x$, also, wenn $p_1 : p_2$ nur wenig von 1 verschieden,

$$\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{p_1}{p_2} - 1 = \frac{p_1 - p_2}{p_2}$$

gesetzt werden kann, womit dann, wenn man $p_1 = p_0$ setzt, Gl. 3 wird

$$h = \frac{p_0}{\gamma_0} \frac{p_0 - p_2}{p_2} = \frac{p_0 - p_2}{\gamma_2} \quad (\text{annähernd}).$$

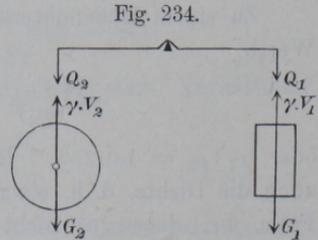
e) Auftrieb der Luft. Luftballon.

In genau derselben Weise wie bei einem von Wasser umgebenen Körper ergibt sich auch für die von der Luft umhüllten Körper ein Auftrieb der Luft, gleich und entgegengesetzt dem Gewichte der verdrängten Luftmasse. Genau genommen, muss bei der Ermittlung des Gewichtes und des Schwerpunktes der verdrängten Luftmasse auf die Veränderlichkeit der Dichte Rücksicht genommen werden. Hat aber der verdrängende Körper keine sehr grosse Höhengausdehnung, so kann man nach S. 205 für seinen Bereich die Dichte γ der Luft meist als überall gleich ansehen und den Auftrieb

$$1) \quad A = \gamma V$$

setzen, wenn V der Rauminhalt ist.

Wägt man also von Luft umgebene Körper (Fig. 234), so wird, wenn der Zeiger der Waage auf Null steht, dadurch nicht die Gleichheit der wahren Gewichtes und somit der Massen beider Körper, sondern die Gleichheit der scheinbaren Gewichtes (s. S. 185) bewiesen. Auf der rechten Seite wirkt auf die Waage $Q_1 = G_1 - \gamma V_1$, auf der linken Seite $Q_2 = G_2 - \gamma V_2$. Ist $V_2 > V_1$, so muss $G_2 > G_1$ sein, wenn $Q_1 = Q_2$ ist. Bringt man die Waage unter die Glocke einer Luftpumpe und vermindert durch allmähliches Auspumpen der Luft die Dichte γ , so wird Q_2 schneller zunehmen



als Q_1 , der Körper von grösserem Rauminhalt und geringerer Dichte also sinken.

Beispiel: Ein Körper von Holz ($\gamma_2 = 750 \text{ kg/cbm}$) werde in der Luft mit einem Gewichtstücke von Eisen ($\gamma_1 = 7500$) so abgewogen, dass der Zeiger der Waage auf Null zeigt. Welches ist das Verhältnis der beiden Massen? Die Waage beweist

$$V_1(7500 - 1,3) = V_2(750 - 1,3),$$

wenn man die Luftdichte $\gamma = 1,3$ setzt. Daher ist

$$\frac{V_2 750}{V_1 7500} = \frac{7500 - 1,3}{(750 - 1,3) 10} = 1,00136.$$

In diesem Verhältnis ist die Masse des Holzkörpers grösser als die des Gewichtstückes. Bei feinen Wägungen muss daher, besonders bei sehr leichten Körpern, die augenblickliche Dichte der Luft berücksichtigt werden.

Luftballon. Ist das Gewicht eines Körpers kleiner als der Auftrieb der umgebenden Luft, so tritt an die Stelle des scheinbaren Gewichtes eine Steigkraft $K = \gamma V - G$. Bedeutet V den Rauminhalt eines mit leichtem Gase von der Dichte γ' (bei 0° C . und mittlerem Atmosphärendrucke $p_0 = 10\,333 \text{ kg/qm}$) gefüllten Ballons, so wird, wenn das Gewicht der Gasfüllung $\gamma' V$ besonders eingeführt und Q das Gewicht aller übrigen Theile (Hülle, Tauwerk, Gondel, Ausrüstung, Besatzung, Ballast) ist, deren Rauminhalt gegenüber V vernachlässigt werden darf, die Steigkraft bei der Stellung dicht über dem Erdboden

$$K_0 = V(\gamma - \gamma') - Q.$$

Beim Steigen nimmt der Druck und die Dichte der Luft ab. Wäre der Ballon fest geschlossen und undehnbar, so würde die Dichte γ' des Gases unverändert erhalten. Es bliebe dann aber, wenn wir überall gleiche Temperatur in der Luft annehmen, der innere Druck so gross wie zu Anfang, d. h. grösser als der verminderte äussere Luftdruck. Einem solchen inneren Überdrucke darf man aber wegen der Gefahr des Zerreisens den Ballon nicht aussetzen. Deshalb wird an der Hülle des Ballons ein Sicherheits-Ventil angebracht, welches so eingerichtet ist, dass es den Druck im Inneren nicht erheblich über den Aussendruck steigen lässt. In Folge dessen wird dann auch die Dichte des Gases sich in gleichem Verhältnisse mit dem äusseren Druck ändern.

Beträgt der Luftdruck am Boden p_1 , in einer Höhe h aber p_2 , so wird in dieser Höhe die Steigkraft noch sein:

$$3) \quad K = V(\gamma - \gamma') \frac{p_2}{p_1} - Q.$$

Die Steigkraft hört auf, wenn

$$V(\gamma - \gamma') \frac{p_2}{p_1} = Q \quad \text{oder}$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V(\gamma - \gamma')}{Q}$$

geworden ist. Dem entspricht bei einer überall gleichen Temperatur von 0°C . eine Steighöhe (Gl. 4, S. 205)

$$h = 18400 \log \left(\frac{V(\gamma - \gamma')}{Q} \right).$$

Beispiel: Ein Ballon von 700 cbm Rauminhalt werde mit Leuchtgas von der Dichte $\gamma' = 0,45$ gefüllt. Das Gewicht der Hülle, des Tauwerks, der Gondel, der Ausrüstung, des Ballastes und der Besatzung betrage $Q = 500 \text{ kg}$, dann ergibt sich die Steigkraft über dem Erdboden zu

$$K_0 = 700(1,29 - 0,45) - 500 = 88 \text{ kg}.$$

Diese Grösse hat die Spannkraft des Haltetaues, welches den Ballon am Boden festhält. Die Steighöhe des Ballons wird

$$h = 18400 \log \frac{V(\gamma - \gamma')}{Q} \\ = 18400 \log 1,176 = 1295 \text{ m}.$$

Bei Füllung mit Wasserstoff ($\gamma' = 0,09$) wird $K_0 = 340 \text{ kg}$, $h = 4146 \text{ m}$. (Vgl. a. S. 215.)

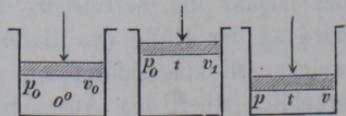
d) Satz von Gay-Lussac. Zustandsgleichung der vollkommenen Gase.

Der Satz des französischen Physikers Gay-Lussac (geb. 1778 zu Leonard, gest. 1850 zu Paris), aufgestellt im Jahre 1802, bezieht sich auf die Ausdehnung der Gase durch Temperatur-Erhöhung bei gleichbleibendem Drucke.

Wird 1 kg Gas von 0°C . Temperatur, vom Rauminhalte v_0 und dem Drucke p_0 (Fig. 235) auf $t^\circ \text{C}$. unter gleichbleibender Kolben-

belastung, d. h. gleichbleibendem Drucke p_0 erwärmt, so erfolgt eine

Fig. 235.



Ausdehnung auf den Einheitsraum v_1 , und es ist das Ausdehnungs-Verhältnis

$$1) \quad \frac{v_1 - v_0}{v_0} = \alpha t \quad \text{oder} \quad v_1 = v_0(1 + \alpha t),$$

worin α , die Ausdehnungsziffer, nicht allein für ein bestimmtes Gas unveränderlich ist, sondern sogar für alle Gase denselben Zahlenwerth

$$\alpha = 0,003665 = 1 : 273$$

hat. In der Gleichung 1 liegt der Satz von Gay-Lussac, dass die Ausdehnung eines Gases verhältnissgleich der Temperatur-Erhöhung ist. Verstärkt man nun den Druck des Gases durch Erhöhung der Kolbenbelastung auf p , so wird der Einheitsraum sich auf v vermindern, und wenn man diese Änderung künstlich so regelt, dass bei ihr keine Änderung der Temperatur des Gases erfolgt, so gilt für sie der Boyle'sche Satz

$$2) \quad v : v_1 = p_0 : p.$$

Verbindet man die Gl. 1 und 2, so entsteht

$$pv = p_0 v_0 (1 + \alpha t) = p_0 v_0 \alpha \left(\frac{1}{\alpha} + t \right),$$

oder mit Einführung des Zahlenwerthes für α

$$pv = \frac{p_0 v_0}{273} (273 + t).$$

Bei einem bestimmten Drucke p_0 und einer Temperatur von 0° C. hat nun 1^{kg} eines Gases einen bestimmten Raum v_0 , daher ist $p_0 v_0 : 273$ für ein bestimmtes Gas eine gegebene Grösse, die mit R bezeichnet wird, so dass

$$3) \quad pv = R (273 + t).$$

Für $t = -273$ wird die rechte Seite und somit $pv = 0$, also, da der Raum von 1^{kg} Gas nicht wohl Null werden kann, $p = 0$; d. h. bei einer Temperatur von -273° C. würde der Druck p und somit das Ausdehnungs-Bestreben des Gases aufhören, wenn die Erfahrungssätze von Boyle und Gay-Lussac noch für Wärmegrade, die von den Temperaturen der Versuche so weit entfernt liegen, gültig wären. Diese Temperatur -273° C. nennt man den absoluten

Nullpunkt und bezeichnet die nach Celsius-Graden von diesem Nullpunkt aus gezählte Temperatur

$$4) \quad 273 + t = T$$

als die absolute Temperatur. Man erhält die absolute Temperatur eines Körpers in Celsius-Graden, indem man zu seiner vom Gefrierpunkte des Wassers aus gezählten Temperatur t in Celsius-Graden 273 hinzuzählt. Dem Gefrierpunkte des Wassers $t = 0^0$ entspricht die absolute Temperatur $T = 273^0$.

Mit Gl. 4 erhält nun Gl. 3 die überraschend einfache Form

$$5) \quad p v = R T.$$

Diese Gleichung heisst die Zustandsgleichung der Gase. Sie gilt für die Gase ziemlich genau, so lange sich dieselben weit vom Verflüssigungspunkte befinden, während in der Nähe desselben sich erhebliche Abweichungen zeigen. In den folgenden Anwendungen auf Luft und andere Gase setzen wir eine vollkommene Gültigkeit der Gl. 5 voraus und nennen die Gase in diesem Sinne vollkommene Gase, indem wir uns vorstellen, das Gas sei unendlich weit von der Verflüssigung entfernt.

Den Festwerth R findet man, indem man Gl. 5 auf einen bestimmten Zustand p, v, T anwendet. Da nun trockene atmosphärische Luft bei $t = 0^0$ C. oder $T = 273^0$ und bei einem Drucke $p_0 = 10333 \text{ kg/qm}$ eine Dichte $\gamma_0 = 1,293$, daher einen Einheitsraum $v_0 = 1 : 1,293$ hat, so wird für trockene Luft

$$R = \frac{10333}{1,293 \cdot 273} = 29,27.$$

Wird eine Luftmenge fest eingeschlossen, so dass sie sich nicht ausdehnen kann, so muss v unverändert bleiben. Erhöht man nun die Temperatur, so muss nach Gl. 5 der Druck p verhältnissgleich der absoluten Temperatur sich ändern.

$$\frac{p}{p_1} = \frac{T}{T_1}.$$

War zu Anfang $T_1 = 0 + 273$, nachher $T = 100 + 273 = 373$, so wird

$$\frac{p}{p_1} = \frac{373}{273} = 1,366.$$

Hatte die Luft ursprünglich den Atmosphärendruck, so wird sie nach Erhöhung der Temperatur um 100^0 einen Druck von 1,366 Atmosphären ausüben. Hierauf beruht die Heissluftmaschine.

Bleibt die Luftmenge aber demselben Druck unterworfen, so wird sie bei einer Temperaturerhöhung sich ausdehnen, u. zw. wird nach Gl. 5 der Einheitsraum mit der absoluten Temperatur verhältnissgleich sich ändern.

$$\frac{v}{v_1} = \frac{T}{T_1}.$$

Bei einer Temperatur-Erhöhung von $0 + 273$ auf $100 + 273$ wird also v auf das 1,366fache wachsen. Betrug die Dichte ursprünglich $\gamma_1 = 1,293$, so wird sie abnehmen auf $\gamma = 1,293 : 1,366 = 0,9466$. Auf dieser Verdünnung der Luft durch Erwärmung beruht bekanntlich der Luftballon von Mongolfier (1783), sowie das Aufsteigen warmer Luft in kalter.

e) Barometrisches Höhenmessen.

Der Grundgedanke davon ist schon auf S. 205 behandelt worden. Die dort entwickelten Gleichungen setzen überall gleiche Temperatur von 0^0C voraus. Hier soll nun auch der Einfluss einer veränderlichen Temperatur berücksichtigt werden.

Für ein Lufttheilchen von der Höhe dz galt die Gleichgewichts-Bedingung (S. 204, Gl. 2, Fig. 232)

$$dp = -\gamma dz, \text{ oder, wegen}$$

$$\gamma = \frac{1}{v} = \frac{p}{RT}$$

(Gl. 1, S. 202 und Gl. 5, S. 210)

$$1) \quad dp = -\frac{p}{RT} dz.$$

Das Gesetz, nach welchem die Lufttemperatur T zwischen zwei Punkten A und B (Fig. 236) sich ändert, ist nicht genau bekannt; wir nehmen dafür als genügende Annäherung eine lineare Gleichung

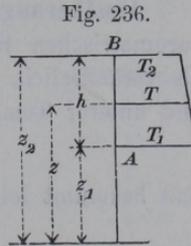
$$2) \quad T_1 - T = \tau(z - z_1)$$

an; darin bedeutet

$$3) \quad \tau = \frac{T_1 - T_2}{z_2 - z_1}$$

die Temperaturabnahme nach oben auf 1^m Höhe. Es wird nach Gl. 2

$$dT = -\tau dz, \quad dz = -\frac{dT}{\tau}.$$



Setzt man dies in Gl. 1 ein, so entsteht

$$\frac{dp}{p} = \frac{1}{R\tau} \frac{dT}{T};$$

mithin wenn man zwischen den Grenzen p_2 und p_1 bezw. T_2 und T_1 integrirt:

$$4) \quad \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{1}{R\tau} \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right),$$

oder nach Gl. 3 und 4:

$$h = z_2 - z_1 = \frac{T_1 - T_2}{\tau} = R(T_1 - T_2) \frac{\ln p_1 - \ln p_2}{\ln T_1 - \ln T_2}.$$

Für das Verhältniß der natürlichen Logarithmen kann man das der Briggsischen setzen, also

$$5) \quad h = R(T_1 - T_2) \frac{\log p_1 - \log p_2}{\log T_1 - \log T_2}.$$

Für trockene Luft wurde auf S. 210 der Festwerth $R = 29,27$ angegeben. Für feuchte Luft bleibt diese Zahl nicht mehr gültig. Für mittlere Verhältnisse Deutschlands kann man in obiger Formel $R = 29,37$ setzen.

Annäherungs-Rechnung: Gewöhnlich behandelt man behufs barometrischen Höhenmessens die Temperatur der Luftsäule nicht als veränderlich, sondern als überall gleich dem Mittel aus oberer und unterer Temperatur, setzt in Gl. 1 (S. 211)

$$T = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$$

und bekommt leicht

$$\frac{dp}{p} = -\frac{1}{RT} dz, \quad \text{mithin}$$

$$6) \quad h = RT \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = RT \cdot 2,302585 (\log p_1 - \log p_2)$$

und mit $R = 29,37$

$$7) \quad h = 67,63 T (\log p_1 - \log p_2).$$

Die Logarithmen kann man nach Babinet in folgender Weise aus der Formel entfernen: Man setzt

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{2p_1}{2p_2} = \frac{2p_1 + p_2 - p_2}{2p_2 + p_1 - p_1} = \frac{p_1 + p_2 + p_1 - p_2}{p_1 + p_2 - p_1 + p_2} = \frac{1 + \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}}{1 - \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}}.$$

Nun ist bekanntlich

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right)$$

oder, wenn man nur das erste Glied benutzt, $= 2x$. Sonach wird annähernd

$$\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = 2 \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}, \text{ oder}$$

$$h = 2RT \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} = 58,74 T \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}.$$

Führt man statt T die gewöhnliche Temperatur $273 + t$ ein, so ergibt sich auch

$$h = 58,74 (273 + t) \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}, \text{ oder}$$

$$h = 16036 (1 + 0,003665 t) \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}$$

und abgerundet, mit genügender Genauigkeit

$$8) \quad h = 16000 (1 + 0,004 t) \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}.$$

Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Schwere. Während in der Nähe der Erdoberfläche das Gewicht von

1 cbm Luft $\gamma = \frac{p}{RT}$ ist, beträgt es in grosser

Höhe, wenn man seine Entfernung vom Mittelpunkte der Erde z und den Erdhalbmesser r

nennt (Fig. 237), $\gamma = \frac{p}{RT} \frac{r^2}{z^2}$ (s. Theil 1, S. 57).

Daher wird aus Gl. 1, S. 211:

$$dp = -\frac{p}{RT} r^2 \frac{dz}{z^2}, \quad \frac{dp}{p} = -\frac{r^2}{RT} \frac{dz}{z^2}, \text{ also}$$

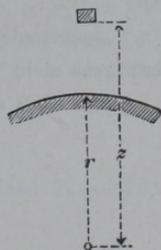
$$\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{r^2}{RT} \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}\right) = \frac{r^2}{RT} \frac{z_2 - z_1}{z_1 z_2}.$$

Ist nun $z_1 = r$, $z_2 - z_1 = h$, so folgt

$$\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{r^2}{RT} \frac{h}{r(r+h)} = \frac{h}{1 + \frac{h}{r}} \frac{1}{RT}, \text{ also}$$

$$9) \quad \frac{h}{1 + \frac{h}{r}} = RT \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right).$$

Fig. 237.



Der Vergleich mit Gl. 6 (S. 212) zeigt, dass die rechten Seiten übereinstimmen, dass nur links h durch $\frac{h}{1 + \frac{h}{r}}$ ersetzt ist, was aber

wegen $r = 6370000$ meist von h nicht wesentlich abweicht.

Beispiel 1: Es sei wie in dem Beispiel auf S. 205: am unteren Punkte $p_1 = 749,2$ mm, am oberen $p_2 = 692,7$ mm, ausserdem aber die Temperaturen

$$\text{unten } t_1 = 14,4, \quad T_1 = 287,4,$$

$$\text{oben } t_2 = 10,8, \quad T_2 = 283,6; \quad T_1 - T_2 = 3,8;$$

dann wird nach Gl. 5

$$h = 29,37 \cdot 3,8 \frac{\log 749,2 - \log 692,7}{\log 287,4 - \log 283,6} = 657,4 \text{ m}$$

(gegen 628 m für $t_1 = t_2 = 0$).

Gl. 7 (S. 212) liefert mit

$$T = \frac{1}{2} (287,4 + 283,6) = 285,5,$$

$$h = 67,63 \cdot 285,5 (\log 749,2 - \log 692,7) = 657,5 \text{ m},$$

mithin fast dasselbe wie vorstehend.

Gl. 8 liefert mit $t = 12,8^0$:

$$h = 16000 (1 + 0,06) \frac{749,2 - 692,7}{749,2 + 692,7} = 658,3 \text{ m},$$

d. h. etwa 1 m zu viel, was aber bei der sonstigen Unsicherheit dieses Messverfahrens nicht erheblich ist.

Aus Gl. 9 endlich wird in Verbindung mit dem Ergebnisse der Gl. 7:

$$\frac{h}{1 + \frac{h}{6370000}} = 657,5, \quad \text{oder}$$

$$h \left(1 - \frac{657,5}{6370000} \right) = 657,5, \quad \text{d. h.}$$

$$h = 657,6 \text{ m}.$$

Beispiel 2: Steighöhe eines Luftballons mit Rücksicht auf die Veränderlichkeit der Temperatur. Sind γ_1 und γ_1' die Dichten der Aussenluft und der Füllung am Erdboden, wo der Druck und die Temperatur p_1 und T_1 betragen und beziehen sich γ_2 , γ_2' , p_2 und T_2 auf die Grenze der Steighöhe h , so gilt für letztere die Bedingung

$$V(\gamma_2 - \gamma_2') = Q.$$

Wir nehmen an, dass im Ballon dieselbe Temperatur und derselbe Druck herrsche wie aussen. Dann ist nach der Zustandsgleichung (S. 210) wegen $\gamma = 1 : v$, wenn R' der Festwerth für die Gasfüllung,

$$\gamma_1 = \frac{p_1}{R' T_1}, \quad \gamma_1' = \frac{p_1}{R' T_1},$$

$$\gamma_2 = \frac{p_2}{R T_2}, \quad \gamma_2' = \frac{p_2}{R' T_2}, \quad \text{daher}$$

$$\gamma_2 - \gamma_2' = (\gamma_1 - \gamma_1') \frac{p_2}{p_1} \frac{T_1}{T_2}, \quad \text{und}$$

$$V(\gamma_2 - \gamma_2') = V(\gamma_1 - \gamma_1') \frac{p_2}{p_1} \frac{T_1}{T_2} = Q;$$

daraus

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V(\gamma_1 - \gamma_1')}{Q} \frac{T_1}{T_2}.$$

Setzt man diesen Werth in Gl. 4 (S. 212) ein, so entsteht

$$\ln \left(\frac{V(\gamma_1 - \gamma_1')}{Q} \frac{T_1}{T_2} \right) = \frac{1}{R\tau} \ln \left(\frac{T_1}{T_2} \right).$$

Daraus folgt $\log \frac{V(\gamma_1 - \gamma_1')}{Q} = \log \left(\frac{T_1}{T_2} \right) \left(\frac{1}{R\tau} - 1 \right)$ oder

$$10) \quad \log \left(\frac{T_1}{T_2} \right) = \frac{1}{\frac{1}{R\tau} - 1} \log \left(\frac{V(\gamma_1 - \gamma_1')}{Q} \right).$$

Hierdurch ist das Verhältniß der Temperaturen unten und an der Grenze der Steighöhe bestimmt. Kennt man nun die Temperaturabnahme τ auf 1 m Höhe, so ist

$$11) \quad h = \frac{T_1 - T_2}{\tau}$$

Ist nach S. 208 $V = 700$, $\gamma_1 = 1,29$, $\gamma_1' = 0,45$, $V(\gamma_1 - \gamma_1') = 588$, $Q = 500$ und nimmt man auf 100 m eine Abnahme der Temperatur um $0,5^{\circ}$, d. h. $\tau = 0,005$, $R = 29,37$ an, so wird

$$\log \left(\frac{T_1}{T_2} \right) = \frac{1}{\frac{1}{29,37} - 1} \log 1,176 \quad \text{und} \quad T_2 = 0,972 T_1.$$

Beträgt nun die Temperatur unten $T_1 = 283$, so wird hiernach $T_2 = 275,1$, $T_1 - T_2 = 7,9^{\circ}$, mithin

$$h = 7,9 \cdot 200 = 1580 \text{ m.}$$

Eine etwas unrichtige Schätzung von τ beeinflusst das Ergebnis nicht sehr, weil τ sowohl in Gl. 10, als auch in Gl. 11 vorkommt. Mit $\tau = 0,006$ wird z. B. $h = 1608$ m, also wenig verschieden. — Zur Erleichterung derartiger Rechnungen dienen Jordan's Barometrische Höhentafeln. (Hannover 1896. Helwing).

4. Gleichgewicht zwischen tropfbaren und gasförmigen Flüssigkeiten.

a) Barometer. Druckmesser.

Die Atmosphäre übt in der Höhe des Meeresspiegels einen Druck $p_0 = 10333 \text{ kg/qm}$ aus, also auch auf die Oberfläche einer ruhenden Flüssigkeit. Dieser Druck p_0 kann durch das Gewicht

einer Flüssigkeitssäule von der Höhe $h_0 = p_0 : \gamma$ ersetzt werden, worin γ die Dichte der Flüssigkeit ist. Für Wasser ist $\gamma = 1000$, daher

$$h_0 = 10,333 \text{ m};$$

d. h. eine Wassersäule von 10,333 m Höhe drückt durch ihr Gewicht ebenso stark wie die Atmosphäre.

Wird in dem rechtsseitigen, oben geschlossenen Rohre (Fig. 238) der Wasserspiegel um h_0 erhöht und die darüber befindliche Luft entfernt, so wird Gleichgewicht in der Flüssigkeit herrschen, dem Atmosphärendrucke p_0 links wird durch die Flüssigkeitssäule h_0 das Gleichgewicht gehalten.

Besteht die Flüssigkeit aus Quecksilber mit $\gamma = 13600$, so wird

$$h_0 = \frac{10333}{13600} = 0,76 \text{ m bei } 0^\circ \text{ C.}$$

Der mittlere Atmosphärendruck am Meeresspiegel entspricht also einer Quecksilbersäule von 760 mm. Jede Änderung des Luftdruckes giebt sich durch Änderung von h_0 zu erkennen. Darauf beruht das **Barometer** (von βαρῶς, schwer).

Die im Maschinenwesen eingeführte Atmosphäre von 10000 kg/qm entspricht $10000 : 13600 = 0,735 \text{ m} = 735 \text{ mm}$ Quecksilbersäule.

An der Wettersäule zu Hannover, welche 57 m über dem Meere liegt, ist bei überall gleicher Temperatur von 10° C. der Druck p_2 nach Gl. 7 (S. 212) zu berechnen. Setzt man darin $h = 57$, $T = 283$, $p_1 = 760$, so wird

$$\log p_2 = \log 760 - \frac{57}{67,63 \cdot 283}$$

und daraus $p_2 = 754,8 \text{ mm}$.

Druckmesser (Manometer, von μανός, dünn). Wie man den Atmosphärendruck durch eine Flüssigkeitssäule misst, so kann man auch die Pressungen anderer

(tropfbarer oder gasförmiger) Flüssigkeiten durch im Gleichgewichte befindliche Flüssigkeitssäulen messen oder mit dem Atmosphärendrucke vergleichen.

Fig. 238.

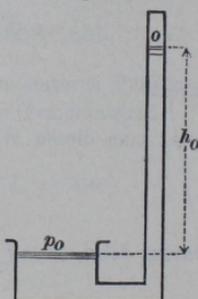
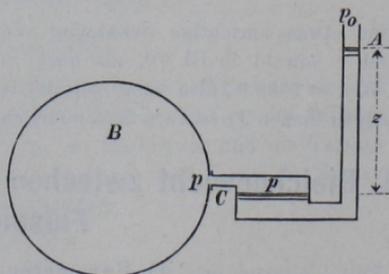


Fig. 239.



Soll der Druck p des in dem Behälter B (Fig. 239) befindlichen Dampfes oder Gases gemessen werden, so verbindet man mit dem Behälter einen oben bei A offenen Druckmesser. Dann wirkt bei A der Atmosphärendruck p_0 , und bei C , in einer Tiefe z unter dem Flüssigkeitsspiegel bei A , ist der Druck

$$p = p_0 + \gamma z,$$

wenn γ die Dichte der Messflüssigkeit ist. Setzt man noch $p_0 = \gamma h_0$, so kommt

$$1) \quad p - p_0 = \gamma z \quad \text{oder} \quad \frac{p - p_0}{p_0} = \frac{z}{h_0}.$$

Nun ist $p - p_0$ der Überdruck im Behälter B gegen die Atmosphäre und $(p - p_0) : p_0$ der in Atmosphären ausgedrückte Überdruck. Jede Atmosphäre Überdruck ($10\,000 \text{ kg/qm}$) entspricht einer Quecksilbersäule von 735 mm ; zum Messen von 10 Atmosphären ist daher eine Säule von $7,35 \text{ m}$ erforderlich. Derartige Druckmesser eignen sich deshalb nicht für bewegliche, sondern nur für feststehende Dampfkessel. Bei ersteren benutzt man Federmanometer, die den Druck aus der elastischen Formänderung einer Gefäßwand erkennen lassen. Die Theilung solcher Federmanometer lässt sich aber nicht berechnen, sondern muss vielmehr durch Vergleichung mit einem offenen Quecksilber-Druckmesser gefunden werden. Das Quecksilber befindet sich in einer Eisenröhre; ein auf ihm schwimmendes Eisenstück ist durch eine über eine Rolle laufende Sehnur mit einem in bequemer Höhe befindlichen Zeiger verbunden, so dass man Hebung und Senkung des Quecksilberspiegels aus der Bewegung des Zeigers zu erkennen vermag.

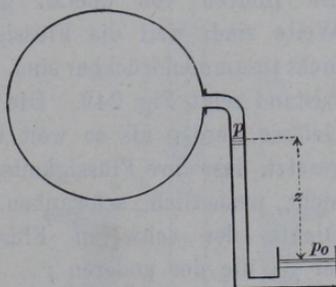
Für geringen Überdruck, wie er z. B. in den Röhren für Leuchtgas herrscht, benutzt man Wasser als Messflüssigkeit und drückt auch den Überdruck nicht in at , sondern in mm Wassersäule aus; 1 mm Wassersäule

ist gleichbedeutend mit $\frac{1}{10\,000}$ At-

mosphäre, da 1 at mit 10 m Wassersäule gleichbedeutend ist; 25 mm

Wassersäule bedeutet daher $\frac{1}{400} \text{ at}$.

Fig. 240.



Zum Messen von Drücken in Kondensatoren, Feuerzügen, Schornsteinen u. dgl., welche kleiner sind als der Atmosphärendruck, dienen **Minderdruck-Messer (Vakuummeter)** (Fig. 240). Es ist

$$p + \gamma z = p_0, \quad \text{oder}$$

$$p_0 - p = \gamma z \quad \text{und}$$

$$\frac{p_0 - p}{p_0} = \frac{z}{h_0};$$

letzteres ist der Minderdruck in Atmosphären.

Zusammengesetzter Druckmesser geringerer Höhe. Die mehrfach auf und nieder gebogenen Röhren (Fig. 241) sind im unteren

Theile (unter AB) mit Quecksilber, im oberen Theile mit einer leichteren Flüssigkeit, etwa Wasser oder Glycerin, gefüllt. Bei gleichen Drücken in beiden oberen Gefäßen steht das Quecksilber in allen Röhren bis zu der Wagerechten AB . Wächst der Druck auf der linken Seite von p_0 auf p , während rechts der Atmosphärendruck p_0 wirksam bleibt, so senkt sich bei B das Quecksilber um z , steigt bei C und bei A , sinkt bei D um das gleiche Maß z , wenn

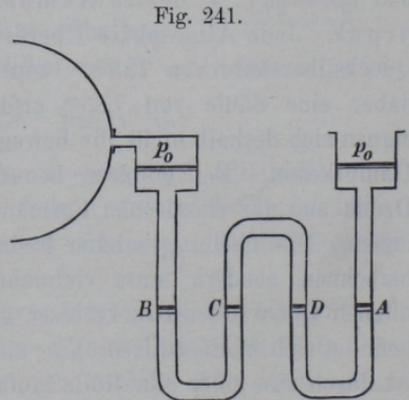
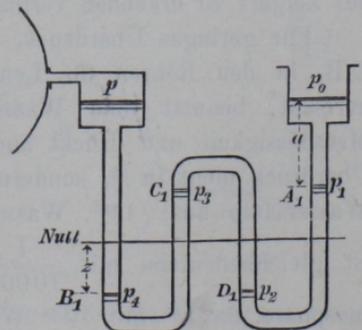


Fig. 241.

die Röhren von überall gleicher Weite sind, weil die Flüssigkeiten nicht zusammendrückbar sind. Diesen Zustand zeigt Fig. 242. Die oberen Gefäße werden als so weit vorausgesetzt, dass ihre Flüssigkeitsspiegel nicht wesentlich schwanken. Die Dichte der schweren Flüssigkeit sei γ_1 , die der anderen γ .

wenn die Röhren von überall gleicher Weite sind, weil die Flüssigkeiten nicht zusammendrückbar sind. Diesen Zustand zeigt Fig. 242.

Fig. 242.



Bei A_1 ist der Druck $p_1 = p_0 + \gamma a$, bei D_1 der Druck $p_2 = p_0 + \gamma a + 2\gamma_1 z$, bei C_1 der Druck $p_3 = p_2 - 2\gamma z = p_0 + \gamma a + 2(\gamma_1 - \gamma)z$, bei B_1 der Druck

$p_4 = p_3 + 2\gamma_1 z$, im oberen, linksseitigen Gefässe der Druck
 $p = p_4 - \gamma(a + 2z) = p_0 + 4(\gamma_1 - \gamma)z$; mithin ist der Über-
 druck in ^{at}:

$$\frac{p - p_0}{p_0} = \frac{4(\gamma_1 - \gamma)z}{\gamma_1 h_0} = 4 \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_1}\right) \frac{z}{h_0},$$

wenn h_0 die Atmosphärenhöhe für die Flüssigkeit der grösseren
 Dichte γ_1 ist. Man erkennt leicht, dass, wenn $2n$ Röhren statt 4
 in entsprechender Weise hinter einander geschaltet sind,

$$\frac{p - p_0}{p_0} = 2n \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_1}\right) \frac{z}{h_0} \text{ wird.}$$

Für $\gamma_1 = 13600$ (Quecksilber), $\gamma = 1000$ (Wasser), $h_0 = 735$ mm wird

$$\frac{p - p_0}{p_0} = 2n \left(1 - \frac{1}{13,6}\right) \frac{z}{735} = 2n \frac{z}{793}.$$

Mit $2n = 8$ wird dann

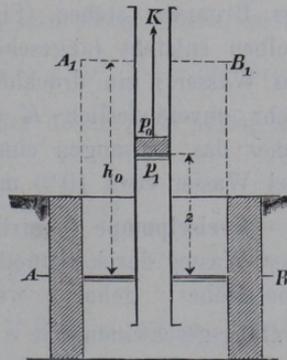
$$z = \frac{p - p_0}{p_0} \cdot 99 \text{ mm,}$$

hier erfordert also 1 ^{at} nur 99 mm Theilungshöhe gegen 735 mm
 beim einfachen Druckmesser.

b) Saugpumpe. Kreiselpumpe. Heber.

AB (Fig. 243) sei der Wasserspiegel eines Brunnens. In
 einem cylindrischen Rohre, dessen
 unteres Ende ins Wasser taucht, be-
 findet sich ein beweglicher dicht
 schliessender Kolben. Der Druck des
 Wassers im Brunnen und in dem unter-
 halb des Kolbens befindlichen Theile
 des Rohres ist am einfachsten zu berechnen,
 wenn man sich in der Höhe h_0 über dem
 wahren Wasserspiegel einen Wasser-
 spiegel $A_1 B_1$ denkt, auf den kein Atmo-
 sphärendruck wirkt. Ist durch das Spiel
 der in der Figur nicht gezeichneten
 Ventile nach einer gewissen Zahl von
 Kolbenhüben die Luft unter dem Kolben entfernt, so herrscht hier,

Fig. 243.



in der Höhe z über AB , in der Tiefe $h_0 - z$ unter $A_1 B_1$ ein Druck

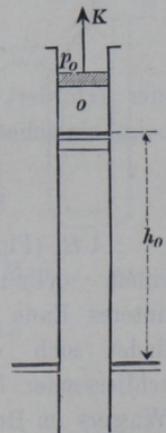
$$1) \quad p_1 = \gamma(h_0 - z).$$

Befindet sich oberhalb des Kolbens noch kein Wasser, so wirkt dort der Druck p_0 . Ist F der Querschnitt der Röhre, so ist an dem Kolben eine aufwärts gerichtete Kraft

$$2) \quad K = (p_0 - p_1) F = \gamma F z$$

für den Ruhezustand, sowie für langsame gleichmässige Aufwärts-Bewegung erforderlich, gerade so, als ob die Wassersäule von der Höhe z nicht unterhalb des Kolbens von dem Atmosphärendrucke in der Schwebe erhalten würde, sondern auf dem Kolben lastete. Die Gl. 2 für K gilt aber nur so lange, wie Gl. 1 für p_1 einen positiven Werth ergibt, d. h. für $z \leq h_0$, oder so lange sich die untere Kolbenfläche höchstens um h_0 über dem Wasserspiegel AB befindet. Für $z > h_0$ würde nach Gl. 1 der Druck p_1 negativ. Negative Flüssigkeitsdrücke giebt es aber nicht, da Flüssigkeiten keine nennenswerthe Zugfestigkeit haben. Mithin hört bei wachsendem z die Gültigkeit der Gl. 1 mit $z = h_0$ auf. Für $z > h_0$ bleibt der Druck unter dem Kolben Null, das Wasser drückt nicht mehr gegen den Kolben, folgt ihm nicht mehr bei seiner Aufwärts-Bewegung, sondern verbleibt in der Höhe h_0 über dem Wasserspiegel des Brunnens stehen (Fig. 244), und unter dem Kolben entsteht (abgesehen von der Verdampfung des Wassers) ein druckloser Raum, so dass nunmehr unveränderlich $K = \gamma F h_0$ bleibt. Es ist daher das Aufsaugen einer Flüssigkeit nur bis zu einer Höhe h_0 (bei Wasser etwa 10^m) möglich.

Fig. 244.



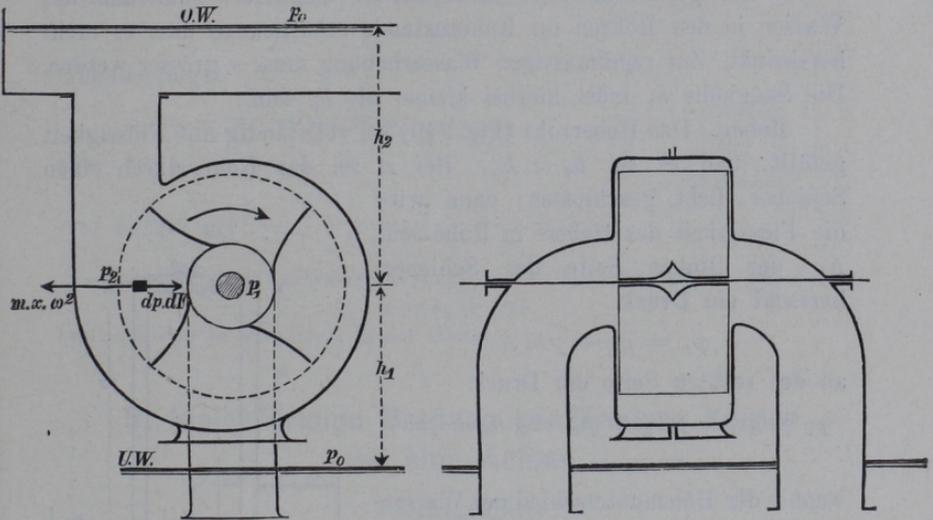
Kreiselpumpe (Centrifugalpumpe) Auf S. 200 wurde gezeigt, dass Wasser durch schnelle Drehung um eine lothrechte Achse auf eine Höhe z gehoben werden konnte und dass die erforderliche Umfangsgeschwindigkeit $v = \sqrt{2gz}$ sein müsse. Bei den zum Wasserfördern bestimmten Kreiselpumpen erfolgt die Drehung meist um eine wagerechte Achse, die oberhalb des Unterwassers liegt, so dass

das Wasser auf eine gewisse Höhe angesogen und dann weiter emporgedrückt wird. Es lässt sich zeigen, dass die Beziehung $v = \sqrt{2gz}$ auch bei dieser Anordnung (Fig. 245) gültig bleibt.

Die wagerechte Drehachse liege um h_1 über dem Unterwasser, um h_2 unter dem Oberwasser.

Betrachtet man ein Theilchen m der in gleichmässiger Drehung begriffenen Wassermasse, welches auf dem wagerechten Halbmesser

Fig. 245.



im Abstand x von der Drehachse liegt, nennt dx seine Länge in der Richtung x , dF den Querschnitt in lothrechter Ebene, so ist die Ergänzungsdruckkraft $m \cdot x \cdot \omega^2 = \frac{\gamma}{g} dF \cdot dx \cdot x \cdot \omega^2$. Ist p der Druck im Abstände x von der Achse, so wächst dieser nach aussen auf die Länge dx um dp . Daher muss

$$dp \cdot dF = \frac{\gamma}{g} \cdot dF \cdot dx \cdot x \cdot \omega^2 \quad \text{oder}$$

$$dp = \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot x \cdot dx$$

sein. Sind die Drücke für $x = r$ und $x = 0$ bzw. p_2 und p_1 , so wird

$$p_2 - p_1 = \frac{\gamma}{2g} r^2 \omega^2.$$

Nun ist

$$p_1 = p_0 - \gamma h_1, \quad p_2 = p_0 + \gamma h_2,$$

daher (mit $r\omega = v$)

$$h_1 + h_2 = \frac{v^2}{2g},$$

oder wenn man den Höhenunterschied zwischen Unter- und Oberwasser $h_1 + h_2 = h$ setzt,

$$v^2 = 2gh; \quad v = \sqrt{2gh},$$

wie S. 200 gefunden. Mit dieser Geschwindigkeit v kann man das Wasser in den Röhren im Ruhezustande erhalten, so dass es nicht herabsinkt. Zur regelmässigen Wasserhebung muss v grösser werden. Die Saughöhe h_1 muss hierbei kleiner als h_0 sein.

Heber. Das Heberrohr (Fig. 246) sei vollständig mit Flüssigkeit gefüllt, und es sei $h_2 < h_0$. Bei A sei das Rohr durch einen Schieber dicht geschlossen; dann wird die Flüssigkeit des Hebers in Ruhe sein. An der linken Seite des Schiebers herrscht ein Druck

$$p_1 = p_0 - \gamma h_1,$$

an der rechten Seite ein Druck

$$\begin{aligned} p_2 &= p_0 - \gamma h_2 = p_0 - \gamma h_1 - \gamma h, \\ &= p_1 - \gamma h, \end{aligned}$$

wenn h der Höhenunterschied der Wasserspiegel in den Gefässen ist. Der Schieber erfährt daher einen Überdruck $p_1 - p_2 = \gamma h$ von links nach rechts, gerade so, wie in dem punktirt angedeuteten,

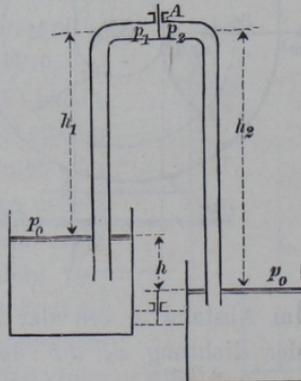


Fig. 246.

die Gefässe unmittelbar verbindenden Rohre der Fall sein würde. Wird der Schieber im Heber entfernt, so muss Wasser von links nach rechts hinüberfliessen. Ist $h_1 < h_0$, h_2 aber $> h_0$, so wird $p_2 = 0$, der Überdruck $p_1 - p_2 = p_0 - \gamma h_1 = \gamma(h_0 - h_1) < \gamma h$; auch in diesem Falle wird noch das Wasser hindurchfliessen; erst für $h_1 \geq h_0$ wird dies nicht mehr stattfinden.

c) Taucherglocke.

Ein oben geschlossenes, unten offenes Gefäss (Fig. 247), welches mit Luft gefüllt ist, werde um die Tiefe z im Wasser niedergesenkt;

dann wird Wasser von unten auf eine Höhe y in dem Gefässe, der Glocke, emporsteigen, und man wird aus der Höhe y auf die Tiefe z schliessen können. Die Luft wird durch das eintretende Wasser von dem Drucke p_0 auf p zusammengedrückt, und wenn man annimmt, dass die Temperatur der Luft sich nicht ändert, so gilt nach dem Boyle'schen Satze

$$p : p_0 = h : (h - y).$$

Ausserdem ist aber (wegen der Tiefe z unter Wasser)

$$p = p_0 + \gamma(z - y).$$

Hieraus folgt:

$$p_0 + \gamma z - \gamma y = p_0 \frac{h}{h - y},$$

oder, mit $p_0 = \gamma h_0$:

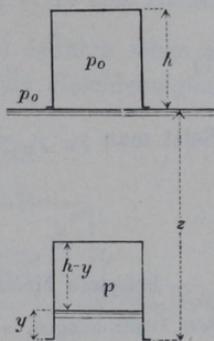
$$z = h_0 \left(\frac{h}{h - y} - 1 \right) + y = y \left(\frac{h_0}{h - y} + 1 \right).$$

Beispiel: Steigt das Wasser bis zur Mitte der Glocke, ist also $y = \frac{1}{2}h$, so muss

$$z = h_0 + \frac{1}{2}h$$

sein; zugleich ist der Druck in der Glocke $p = 2p_0$.

Fig. 247.



5. Gleichförmige Drehung gasförmiger Körper um eine Achse.

Flügelgebläse.

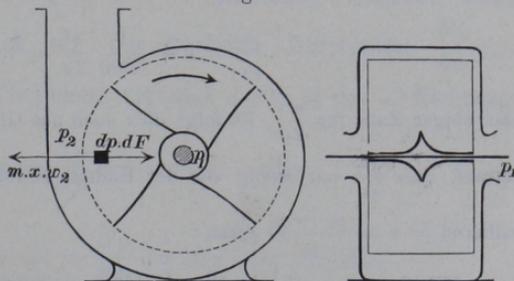
Ein Flügelgebläse (Fig. 248) hat in seinem Wesen grosse Ähnlichkeit mit der Kreiselpumpe (S. 220).

An der Drehachse herrsche durch freie Verbindung mit der Aussenluft der Druck p_1 , am äusseren Umfange betrage der Druck p_2 . Für ein Massentheilchen m

im Abstände x von der Achse gilt wieder wie auf S. 221

$$dp = \frac{\gamma}{g} \omega^2 x dx.$$

Fig. 348.



Für die weitere Behandlung ist jetzt nur die Veränderlichkeit von γ zu berücksichtigen. Auf Grund des Boyle'schen Satzes ist $\gamma:\gamma_0 = p:p_0$, daher

$$\frac{dp}{p} = \frac{\gamma_0}{p_0} \frac{\omega^2}{g} x dx, \quad \text{mithin}$$

$$1) \quad \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \frac{\gamma_0}{p_0} \frac{\omega^2 r^2}{2g} = \frac{\gamma_0}{p_0} \frac{v^2}{2g}.$$

Setzt man $p_0:\gamma_0 = 8000^m$ nach S. 204/5, so wird

$$\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \frac{1}{8000} \frac{v^2}{2g}.$$

Beispiel: Macht das Flügelrad von $r = 0,5^m$ Halbmesser in der Minute 800 Umdrehungen, so ist $v = \frac{800 \cdot 0,5 \cdot 2\pi}{60} = 41,89^m/s$; dem entspricht als Geschwindigkeitshöhe rund 90^m ; sonach wird

$$\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \frac{90}{8000} = 0,01125.$$

Hierzu gehört die Zahl $\frac{p_2}{p_1} = 1,0113$. Weil aber der Druck in dem Flügelrade sich nur um etwa $1/89$ ändert, so kann auch die Dichte annähernd als gleichbleibend betrachtet werden, so dass man für die meisten Fälle mit genügender Annäherung schreiben kann

$$p_2 - p_1 = \gamma_1 \frac{v^2}{2g} \quad \text{oder mit } \frac{p_1}{\gamma_1} = 8000$$

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{1}{8000} \frac{v^2}{2g}, \quad \text{also}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{1}{8000} \frac{v^2}{2g} = 1,01125$$

mit obiger Zahl für $\frac{v^2}{2g}$. Es folgt dies auch aus Gl. 1, wenn man mit Rücksicht darauf, dass $\frac{p_2}{p_1}$ nur wenig von der Einheit abweicht, $\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \ln(1+x)$ annähernd $= x = \frac{p_2 - p_1}{p_1}$ setzt.

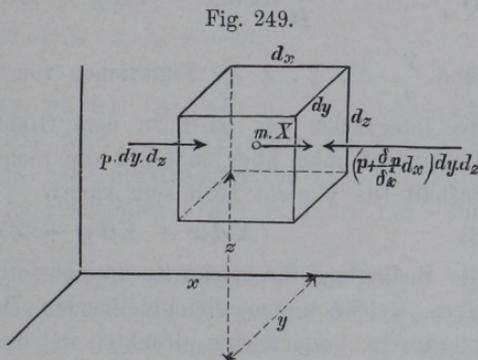
Mit dem angegebenen Flügelgebläse erreicht man also nur einen Überdruck von rund $1/89$ Atmosphäre, gemessen durch $\frac{10000}{89} = 113^m$ Wassersäule. Dieser Druck genügt für Schmiedefeuer.

6. Allgemeine Gleichgewichts-Bedingung für Flüssigkeiten, von L. Euler.

Auf ein Massentheilchen $m = \frac{\gamma}{g} dx \cdot dy \cdot dz$ wirke eine Massenkraft, welche in der Form $R \cdot m$ geschrieben und dadurch schon als eine Massenkraft gekennzeichnet wird; R ist die Beschleunigung, welche das Theilchen durch die Kraft erfahren würde. Der Druck betrage an der Stelle x, y, z , wo das Theilchen sich befindet, p ; dann ist

$$1) \quad p = f(x, y, z),$$

da der Druck in der Flüssigkeit im Allgemeinen von Punkt zu Punkt wechseln wird.



Die Beschleunigung

R der Massenkraft werde nach den Achsenrichtungen in X, Y, Z zerlegt; dann wirkt auf das Theilchen in der x -Richtung die Massenkraft $X \cdot m$. An der linken Seitenfläche von der Grösse $dy \cdot dz$ wirkt die Oberflächenkraft $p \cdot dy \cdot dz$ (Fig. 249). Beim Übergange von der linken nach der rechten Seitenfläche ändert sich x um dx , während y und z dieselben bleiben; somit wächst auch der Druck um das partielle Differential $\frac{\delta p}{\delta x} dx$.

Das Gleichgewicht des Theilchens verlangt daher in der x -Richtung:

$$X \cdot m = \frac{\delta p}{\delta x} dx \cdot dy \cdot dz \quad \text{oder}$$

$$X \frac{\gamma}{g} dx \cdot dy \cdot dz = \frac{\delta p}{\delta x} dx \cdot dy \cdot dz, \quad \text{mithin}$$

$$\frac{\gamma}{g} X dx = \frac{\delta p}{\delta x} dx.$$

In gleicher Weise gilt für die anderen Achsenrichtungen

$$\frac{\gamma}{g} Y dy = \frac{\delta p}{\delta y} dy,$$

$$\frac{\gamma}{g} Z dz = \frac{\delta p}{\delta z} dz.$$

Durch Zusammenzählen der 3 Gleichungen entsteht auf der rechten Seite das vollständige Differential dp des Druckes, nämlich

$$2) \quad \frac{\gamma}{g} (X dx + Y dy + Z dz) = dp.$$

Sind $\frac{\gamma}{g}$, X , Y , Z als Funktionen von x , y , z gegeben, so führt die Integration der Gl. 2 zu dem Gleichgewichtsdrucke p (Gl. 1). Vertauscht man aber in Gl. 2 die rechte Seite dp mit Null, so enthält (da γ nicht Null sein kann)

$$3) \quad (X dx + Y dy + Z dz) = 0$$

die Bedingung für solche Zusammenstellungen der Koordinaten x , y , z , welche einem gleichbleibenden Drucke p entsprechen. Die hierdurch bezeichneten Punkte in der Flüssigkeit bilden eine Fläche überall gleichen Druckes, oder eine **Niveaufläche**, deren Gleichung durch Integration von Gl. 3 erhalten und

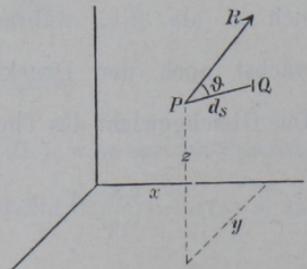
$$4) \quad f(x, y, z) = \text{Const.}$$

geschrieben werden kann. Die Funktion hat dieselbe Form wie in Gl. 1. Jedem anderen Werthe der Const. entspricht eine andere Niveaufläche mit einem anderen Drucke.

Die Niveauflächen stehen in einer einfachen Beziehung zur Richtung der Massenkraft $R \cdot m$. An einem Punkte P innerhalb einer im Gleichgewichte befindlichen Flüssigkeit (Fig. 250) bilde R mit den Achsen die Richtungswinkel α , β , δ . PQ sei ein beliebiges Kurventheilchen ds , welches in einer durch P gelegten Niveaufläche liegen soll; ds habe die Richtungswinkel α_1 , β_1 , δ_1 . Dann gilt für den Winkel ϑ zwischen R und ds die Gleichung

$$\cos \vartheta = \cos \alpha \cdot \cos \alpha_1 + \cos \beta \cdot \cos \beta_1 + \cos \delta \cdot \cos \delta_1.$$

Fig. 250.



Nun sind X , Y , Z die Projektionen von R ; dx , dy , dz diejenigen von ds auf die 3 Achsen, mithin ist

$$R \cos \alpha = X; \quad R \cos \beta = Y; \quad R \cos \delta = Z;$$

$$ds \cos \alpha_1 = dx; \quad ds \cos \beta_1 = dy; \quad ds \cos \delta_1 = dz.$$

Daher wird

$$R ds \cos \vartheta = X dx + Y dy + Z dz.$$

Weil nun für Kurventheilchen innerhalb einer Niveaufläche die Gl. 3 gilt, so muss

$$5) \quad R ds \cos \vartheta = 0, \quad \text{d. h. } \vartheta = 90^\circ$$

sein. Oder:

Eine Niveaufläche steht in jedem ihrer Punkte rechtwinklig zu der für den betreffenden Punkt gültigen Massenkraft $R \cdot m$. Diese Sätze sind von Leonhard Euler (geb. zu Basel 1707, gest. zu Petersburg 1783) im Jahre 1755 entwickelt worden.

Aus vorstehendem Satze folgt unmittelbar, dass, wenn die Schwere die einzige Massenkraft ist, die Niveauflächen wagerechte Ebenen sind (S. 168). Da die freie Oberfläche einer Flüssigkeit ebenfalls eine Niveaufläche sein muss, so finden auch die Entwicklungen über die Gestalt der freien Oberfläche (S. 194 und 196) hier noch eine festere Begründung.

B. Bewegung flüssiger Körper.

I. Ausfluss des Wassers aus Gefässen.

Wird in der Seitenwand eines mit Wasser gefüllten Gefässes (Fig. 251) bei A eine kleine Öffnung frei gemacht, so entsteht ein ausfliessender Wasserstrahl. Die einzelnen Wassertheilchen führen eine parabolische Wurfbewegung aus (Theil 1, S. 49). Ist w die wagerechte Geschwindigkeit, mit der ein Wassertheilchen bei A