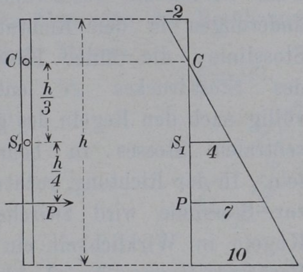
Hand bei C angreifen zu lassen, wenn bei P der Schlag erfolgt, damit die Hand keine Erschütterung (Prellung) empfinde.

Beispiel: Der Körper sei ein gerader Stab; zu dem im unteren Viertelpunkte gegebenen Stosspunkte P soll die unempfindliche Achse C gesucht werden. Es wird nach Gl. 13

$$l = \frac{J_P}{M_1 a_1} = \frac{M_1 \, {}^1\!/\!{}_{12} h^2 + M_1 \, {}^1\!/\!{}_{16} h^2}{M_1 \cdot {}^1\!/\!{}_4 h} = \frac{7}{12} h,$$

d. h. C liegt um $({}^7\!/\!{}_{12} - {}^1\!/\!{}_4)\, h = {}^1\!/\!{}_3 h$ über C. Fasst man die Stange bei C mit der Hand, so wird ein bei P geführter Stoss der Hand nicht fühlbar werden. Das Gleiche gilt, wenn man den Stab bei P erfasst und der Schlag bei C erfolgt.

Fig. 158.



Es sollen nun auch die Geschwindigkeits-Änderungen berechnet werden, welche entstehen, wenn gegen die ruhende Stange bei P eine kugelförmige Masse M mit der Geschwindigkeit c stösst. Der Stoss werde als unelastisch und die Masse M gleich der Masse M_1 vorausgesetzt. Dann ist

$$k = 0, \qquad \omega_1 = 0,$$
$$\mathfrak{c}_1 = 0, \qquad M_1 = M,$$
$$c_1 = 0, \qquad \mu_1 = {}^4\!/\!{}_3 M_1$$

und nach den Gl. 10—12 (S. 147)

$$c - v = \frac{c}{1 + 1 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{11} c; \quad v = \frac{7}{11} c.$$

$$\mathfrak{v}_1 = \frac{c}{1 + 1 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{11} c,$$

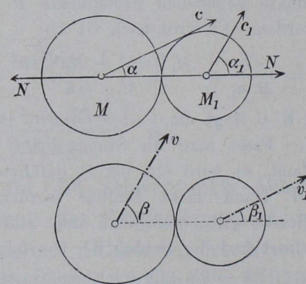
$$a_1 \psi_1 = \frac{c}{1 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3}} = \frac{3}{11} c.$$

Da die Umfangsgeschwindigkeiten der Drehung an den verschiedenen Stellen mit dem Abstande x vom Schwerpunkte verhältnisgleich, so ist die Darstellung der Gesammt-Geschwindigkeiten eine Gerade. Trägt man in P und S_1 die Geschwindigkeiten v und $\mathfrak{v}_1$ durch Ordinaten 7 und 4 auf (Fig. 158), so ergiebt sich eine Gerade, die die Stange in dem Unempfindlichkeitspunkte C schneidet.

4. Schiefer centraler Stoss.

Die Schwerpunkte der beiden Körper mögen im Augenblicke des Zusammentreffens Geschwindigkeiten c und c_1 haben, die mit der durch beide Schwerpunkte gehenden Stosslinie die Winkel α und α_1 bilden (Fig. 159). Man kann die Geschwindigkeiten zerlegen in $c \cos \alpha$ und $c_1 \cos \alpha_1$ nach der Richtung der Stosslinie und $c \sin \alpha$ bezw. $c_1 \sin \alpha_1$ rechtwinklig dazu. Dann werden die Geschwindigkeitsänderungen in der Richtung der Stosslinie, die unter Einwirkung des Stossdruckes N entstehen, völlig nach den Regeln des geraden centralen Stosses zu beurtheilen sein. In der Richtung, rechtwinklig zur Stosslinie wird zwischen den Kugeln in Wirklichkeit ein Reibungswiderstand auftreten, dessen Berücksichtigung die Aufgabe ziemlich verwickelt macht. Wir wollen auf diesen jedoch hier keine Rücksicht nehmen, die Körper als völlig glatt betrachten. Unter dieser Voraussetzung tritt dann rechtwinklig zur Stosslinie keine Kraft auf, so dass die Seitengeschwindigkeiten $c \sin \alpha$ und $c_1 \sin \alpha_1$ unverändert verbleiben. Nennt man v und v_1 die Geschwindigkeiten nach dem Stosse mit den Neigungswinkeln β und β_1 gegen die Stosslinie, so wird nunmehr nach Gl. 8 und 9, S. 129

Fig. 159.



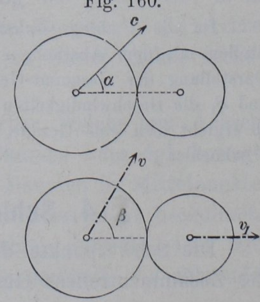
1) $$c \cos \alpha - v \cos \beta = \frac{c \cos \alpha - c_1 \cos \alpha_1}{1 + \frac{M}{M_1}} (1 + k),$$

2) $$v_1 \cos \beta_1 - c_1 \cos \alpha_1 = \frac{c \cos \alpha - c_1 \cos \alpha_1}{1 + \frac{M_1}{M}} (1 + k).$$

3) $$v \sin \beta = c \sin \alpha,$$

4) $$v_1 \sin \beta_1 = c_1 \sin \alpha_1.$$

Fig. 160.



Stoss gegen eine ruhende Kugel. War M_1 zu Anfang in Ruhe, d. h. $c_1 = 0$, so wird

$$c \cos \alpha - v \cos \beta = \frac{c \cos \alpha}{1 + \frac{M}{M_1}} (1 + k),$$

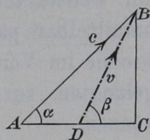
$$v_1 \cos \beta_1 = \frac{c \cos \alpha}{1 + \frac{M_1}{M}} (1 + k),$$

$$v \sin \beta = c \sin \alpha,$$

$$v_1 \sin \beta_1 = 0, \quad \beta_1 = 0,$$

$v_1 = v_1 \cos \beta_1$. Die getroffene Kugel bewegt sich nach dem Stoss in der Richtung der gemeinschaftlichen Normalen der Berührungsstelle. Sind die Kugeln von gleichen Massen, so wird

Fig. 161.



5) $\qquad v \cos \beta = {}^1\!/_2\, c \cos \alpha (1 - k),$

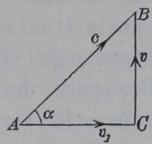
6) $\qquad v \sin \beta = c \sin \alpha$, daher

7) $\qquad \operatorname{tg} \beta = \dfrac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - k},$

8) $\qquad v_1 = {}^1\!/_2\, c \cos \alpha (1 + k).$

Bei unelastischem Stosse wird $k = 0$, daher $\operatorname{tg} \beta = 2 \operatorname{tg} \alpha$. Ist (Fig. 161) $AB = c$, $\measuredangle BAC = \alpha$, $AC = c \cos \alpha$, so wird, wenn man $AD = DC$ macht, $DB = v$, $DC = v_1$ nach Richtung und Grösse.

Fig. 162.



Bei elastischem Stosse aber wird $k = 1$, daher $v \cdot \cos \beta = 0$, $\beta = 90^0$, $v = c \sin \alpha$, $v_1 = c \cos \alpha$, $v = CB$, $v_1 = AC$ (Fig. 162) nach Grösse und Richtung. Beide Kugeln bewegen sich also nach dem Stosse unter rechtem Winkel aus einander.

Stoss einer Kugel gegen eine feste Wand ($c_1 = 0$, $M_1 = \infty$). Es wird

$$c \cos \alpha - v \cos \beta$$
$$= c \cos \alpha (1 + k),$$

d. h. $v \cos \beta = - c \cos \alpha \cdot k,$

$$v \sin \beta = c \sin \alpha,$$

mithin $\quad \operatorname{tg}(-\beta) = \dfrac{\operatorname{tg} \alpha}{k}.$

Fig. 163.

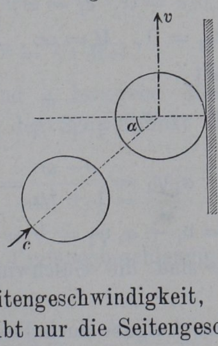
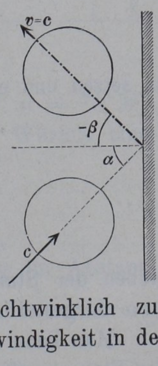


Fig. 164.



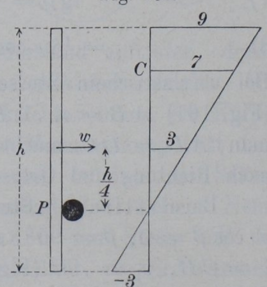
Für unelastischen Stoss ergiebt sich (mit $k = 0$) $v \cos \beta = 0$, $v = c \sin \alpha$, $-\beta = 90^0$, d. h. die Seitengeschwindigkeit, rechtwinklich zur Wand, geht verloren, es bleibt nur die Seitengeschwindigkeit in der Richtung der Wand erhalten (Fig. 163).

Für elastischen Stoss wird (mit $k = 1$): $v \cos \beta - c \cos \alpha$, $v = c$, $-\beta = \alpha$, d. h. die Kugel wird von der festen Wand ohne Verlust an Geschwindigkeit so zurückgeworfen wie ein Lichtstrahl von einem Spiegel (Fig. 164); Ausfall- und Einfallwinkel sind einander gleich.

5. Einige besondere Fälle des Stosses.

Es mögen hier noch einige Fälle des Stosses betrachtet werden, auf welche die entwickelten Formeln scheinbar nicht, oder nicht unmittelbar passen, die aber doch durch ähnliche Betrachtungen, wie sie im Vorstehenden zur Anwendung gelangten, zur Lösung geführt werden können.

Fig. 165.



1. Ein fortschreitender Stab stösst gegen ein festes Hindernis. Ein Stab von der Länge h bewege sich mit der überall gleichen Geschwindigkeit w und treffe im unteren Viertelpunkte P auf eine unwandelbar befestigte Querstange (Fig. 165). Es soll die Bewegung des Stabes nach dem Stoss untersucht werden.

Die Querstange ist wegen ihrer Unbeweglichkeit als eine unendlich grosse Masse aufzufassen. Die Gleichungen 11 und 12, S. 147, sind auf diesen Fall anwendbar; man hat darin

$$c = 0\,, \quad c_1 = w\,, \quad \mathfrak{c}_1 = w\,,$$

$$\omega_1 = 0\,, \quad M = \infty\,, \quad \mu_1 = {}^4\!/\!_3\, M_1$$

zu setzen und erhält

$$\mathfrak{v}_1 - w = \frac{-w}{1 + {}^3\!/\!_4}\,, \quad \mathfrak{v}_1 = {}^3\!/\!_7\, w\,;$$

$$a_1 \psi_1 = \frac{-w}{1 + {}^4\!/\!_3} = -\,{}^3\!/\!_7\, w\,;$$

$$v_1 = \mathfrak{v}_1 + a_1 \psi_1 = {}^3\!/\!_7\, w - {}^3\!/\!_7\, w = 0\,.$$

Neben der Stange sind die Geschwindigkeiten als Vielfache von ${}^1\!/\!_7\, w$ dargestellt.

Man kann diese Aufgabe auch lösen, indem man die Bewegung des Stabes auffasst als scheinbare Ruhe in Bezug auf einen mit