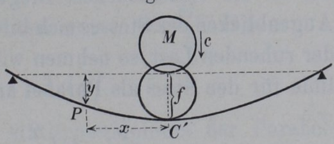
der aufgewandten Arbeit zur Formänderung verwandt, während 9 % der Arbeit die Chabotte allmählich tiefer in den Erdboden eintreiben.

Beim Nieten muss das Niet durch einen möglichst schweren Vorhalt-Hammer von der Masse M_1 gegen Fortbewegung durch den Schlag des Niethammers thunlichst geschützt werden.

e) Biegung durch den Stoss eines Körpers.

Dieser Fall wurde auf S. 114 unter der Voraussetzung behandelt, dass die Masse des getroffenen, auf Biegung beanspruchten Körpers vernachlässigt werden könne, Mit Rücksicht auf diese Masse kann man die Aufgabe in folgender Weise behandeln. Die bisherigen Gleichungen für den Stoss setzten voraus, dass sämmtliche Punkte des gestossenen Körpers sich im Augenblicke der stärksten Zusammenpressung mit übereinstimmender Geschwindigkeit u weiter bewegten. Wird aber ein an beiden Enden unterstützter Stab von der Masse M_1 in seiner Mitte durch eine mit der Geschwindigkeit c dagegen stossende Masse M getroffen (Fig. 147), so wird der Stab sich biegen, und die Geschwindigkeiten seiner einzelnen Punkte werden in jedem Augenblick unter einander verschieden sein; an den Auflagern bleiben die Geschwindigkeiten Null, während sie nach der Mitte hin zunehmen. Für das Verhältnis der Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte giebt das Verhältniss der Ordinaten der betreffenden Stellen einen Anhalt. Da die Wegeslängen y und f in gleichen Zeiten durchlaufen werden, so müssen die Geschwindigkeiten und ebenso auch die Beschleunigungen p_y und p_1 der Punkte P und C sich verhalten wie $y:f$, d. h. es ist

Fig. 147.



$$p_y = p_1 \frac{y}{f}.$$

Nach dem Satze von der Bewegung des Schwerpunktes (Theil I., S. 141) ist

$$\Sigma m p_y = \Sigma Y.$$

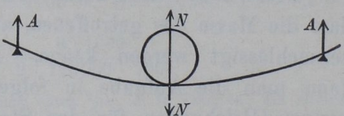
Darin bedeutet ΣY die Summe sämmtlicher äusseren Kräfte der Richtung der p_y. In irgend einem Augenblicke während des Stosses wirkt nun an dem getroffenen Stabe im Sinne der p_y die Kraft $N - 2A$ (Fig. 148), mithin wird

$$\Sigma m p_y = \frac{p_1}{f} \Sigma m y = N - 2A.$$

Darin ist m die Masse eines Längentheilchens, d. h. bei überall gleichem Querschnitte, den wir hier annehmen wollen,

$$m = \frac{\gamma}{g} F \cdot dx.$$

Fig. 148.



Daher entsteht

$$\frac{p_1}{f} \frac{\gamma}{g} F \int y\, dx = N - 2A.$$

Man könnte nun $y:f$ aus der Gleichung der Biegungslinie für den Fall einer ruhigen Belastung ableiten. Da es aber zweifelhaft ist, ob die verschiedenen Biegungslinien, die in den verschiedenen Augenblicken des Stosses sich bilden, dieselbe Form haben wie diejenige der ruhenden Last, so nehmen wir der Einfachheit wegen die Biegungslinie für den Stoss als Parabel an. Dann wird $\int y\,dx = {}^2/_3 f l$, mithin

$$p_1 \frac{\gamma}{g} F l \frac{2}{3} = N - 2A, \text{ oder,}$$

weil $\gamma F l = M_1 g$ ist,

$$p_1 \cdot \frac{2}{3} M_1 = N - 2A.$$

Für den stossenden Körper ist $Mp = N$, mithin

$$p_1 \frac{2}{3} M_1 = Mp - 2A.$$

Es ist nun nicht etwa, wie im Gleichgewichtszustande $2A = N$; vielmehr ist $2A$ erheblich kleiner als N. Ist der Stoss sehr heftig, so pflanzt sich seine Wirkung nicht einmal bis zu den Stützpunkten fort; es bleibt (unter Vernachlässigung der Schwere) $A = 0$; der Druck N wirkt nur ausserordentlich kurze Zeit, wächst dabei zu einem verhältnismässig grossen Werth und bringt an dem Stab eine nur örtliche zerstörende Wirkung hervor, wie man z. B. mit einer Gewehrkugel versuchen kann. In solchem Fall ist von der Ausbildung einer Biegungslinie keine Rede. Aber auch bei weniger heftigem Stosse kann doch meist $2A$ gegenüber N vernachlässigt werden, so dass

$$p : p_1 = {}^2/_3\, M_1 : M \text{ ist.}$$

Vergleicht man diese Formel mit Gl. 1, S. 127, so findet man, dass an Stelle von M_1 nunmehr $^2/_3\, M$ getreten ist. Es folgt dann in gleicher Weise wie dort (mit c_1 = Null)

$$1) \qquad u = \frac{M c}{M + {}^2/_3\, M_1}$$

für die Geschwindigkeit des Stosspunktes im Augenblicke der stärksten Formänderung, während der Punkt P eine Geschwindigkeit

$$u_y = u \frac{y}{f} \text{ hat.}$$

Nehmen wir den Stoss, wie es in solchen Fällen meistens geschieht, als unelastisch an, so ist das gesammte Arbeitsvermögen beider Körper nach dem Stosse

$$^1/_2\, M u^2 + {}^1/_2\, \Sigma m u_y{}^2,$$

wofür sich in ähnlicher Weise wie oben mit $m = \frac{M_1}{l} \cdot dx$

$$\frac{u^2}{2}\left(M + \frac{M_1}{f^2\, l} \int y^2\, dx\right)$$

ergiebt. Nun ist $^1/_2 \int y dx \cdot y$ das statische Moment der Parabelfläche in Bezug auf die Sehne, $= {}^2/_3\, f\, l \cdot {}^2/_5\, f$ (Theil 1, S. 133), mithin $\int y^2\, dx = {}^8/_{15}\, f^2\, l$; also wird das Arbeitsvermögen

$$2) \qquad \frac{u^2}{2}\left(M + {}^8/_{15}\, M_1\right)$$

oder, wenn man den obigen Werth für u (Gl. 1) einsetzt, und bedenkt, dass das Arbeitsvermögen in Biegungsarbeit (S. 111) umgewandelt wird,

$$3) \qquad \frac{M c^2}{2} \frac{1 + \frac{8}{15} \frac{M_1}{M}}{\left(1 + \frac{2}{3} \frac{M_1}{M}\right)^2} = \frac{V}{6} \frac{\sigma^2}{E} \frac{i^2}{e^2}.$$

Die Umständlichkeit dieser Formel steht nicht im Verhältnisse zur Sicherheit ihrer Grundlagen. Innerhalb ziemlich weiter Grenzen ($M_1 : M = {}^1/_{10}$ bis 10) kann man dafür annäherungsweise einfacher schreiben

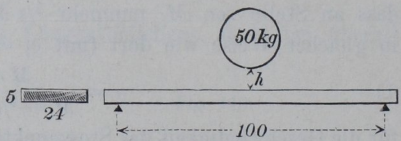
$$4) \qquad \frac{M c^2}{2} \frac{1}{\left(1 + 0{,}8 \frac{M_1}{M}\right)} = \frac{V}{6} \frac{\sigma^2}{E} \frac{i^2}{e^2}.$$

Beispiel: Auf die Mitte einer Bohle von 1 m Spannweite, 24 cm Breite, 5 cm Stärke (Fig. 149) falle ein Gewicht von 50 kg. Wie gross darf die Fallhöhe h sein, damit die Bohle nicht über 170 at gespannt werde? Wiegt ein 1 cbm Holz 600 kg, so wird das Gewicht der Bohle

$$Q_1 = 1 \cdot 0{,}24 \cdot 0{,}05 \cdot 600 = 7{,}2\,\mathrm{kg}.$$

Es wird $\frac{1}{2} M c^2 = Q h$.

Fig. 149.



Die obigen Gleichungen gelten für einen Stoss in wagerechter Richtung, bei dem die Schwere keine Arbeit verrichtet. Beim lothrecht abwärts erfolgenden Stoss aber verrichtet die Schwere eine Arbeit, während die Bohle sich um f durchbiegt. Das Gewicht Q leistet die Arbeit Qf, das Gewicht Q_1 der Bohle aber $\frac{2}{3} Q f$, weil ein beliebiges Theilchen der Bohle nur um y sinkt (vergl. S. 137, Fig. 147). Nun beträgt die Durchbiegung der Bohle bei $\sigma = 170$ at nach S. 46, Gl. 14:

$$f = \frac{1}{12}\,\frac{170}{120\,000}\,\frac{100^2}{2{,}5} = 0{,}47\,\mathrm{cm},$$

daher wird nach Gl. 4 (mit $i^2 : e^2 = \frac{1}{3}$, vgl. S. 112)

$$\frac{50\,h}{1 + 0{,}8 \cdot \frac{7{,}2}{50}} + 0{,}47\left(50 + \frac{2}{3}\,7{,}2\right) = \frac{12\,000}{18}\,\frac{170^2}{120\,000}$$

oder $h = 3$ cm.

Im Ruhezustande entspricht der Belastung mit 50 kg nur eine Spannung

$$\sigma = \frac{50 \cdot 100 \cdot 6}{4 \cdot 24 \cdot 5^2} = 12{,}5\,\mathrm{at},$$

und schon durch einen Fall der Last von 3 cm Höhe steigt die Spannung auf das 13,6 fache. Hiernach ist es begreiflich, dass man die in Gleichgewichts-Berechnungen einzusetzenden Spannungen oft nur sehr gering annehmen darf, wenn Stösse der Last zu erwarten sind.

f) Vollkommen elastischer Stoss.

Je kleiner die Stossgeschwindigkeit $c - c_1$ und je elastischer die Körper sind, um so mehr wird sich k dem Werth 1 nähern. Für $k = 1$ wird nach Gl 8), S. 129

1) $$c - v = 2\,\frac{c - c_1}{1 + \frac{M}{M_1}}; \quad v_1 - c_1 = 2\,\frac{c - c_1}{1 + \frac{M_1}{M}}.$$