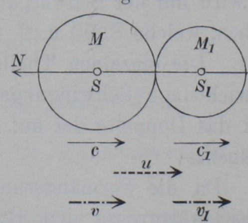
D. Stoss elastisch-fester Körper.

Treten zwei Körper während der Bewegung mit einander in Berührung und haben sie an der Berührungsstelle verschiedene Geschwindigkeit, so werden sie im Allgemeinen gegenseitig auf ihre Bewegung einwirken, d. h. gegenseitige Kräfte auf einander ausüben. Die hiermit zusammenhängenden Bewegungs-Erscheinungen nennt man Stoss. Die Richtungslinie des gegenseitigen Normaldrucks zwischen den Körpern heisst die Stosslinie. Geht die Stosslinie durch die Schwerpunkte beider Körper, so heisst der Stoss central, sonst excentrisch. Bewegen sich beide Körper rein fortschreitend, u. zw. in der Richtung der Stosslinie, so heisst der Stoss ein gerader.

I. Gerader centraler Stoss.

Der stossende Köper habe die Masse M und im Augenblicke des Zusammentreffens die Geschwindigkeit c, der getroffene Körper von der Masse M_1 die kleinere Geschwindigkeit c_1. Die Körper üben nun an der Berührungsstelle gegenseitige gleiche Normalkräfte N auf einander aus und drücken sich gegenseitig zusammen, bis der Abstand der Schwerpunkte S und S_1 beider Körper den kleinsten Werth erreicht hat. Bis zu diesem Augenblicke hat sich die Kraft N, von Null beginnend, stetig vergrössert. Diese Erscheinungen bilden den ersten Abschnitt der Stossdauer. Darnach erfolgt dann im zweiten Abschnitte des Stosses eine Wiederausdehnung der Körper, wobei die Schwerpunkte sich wieder von einander entfernen. In dem Augenblicke der stärksten Formänderung, welcher zwischen beiden Abschnitten des Stosses liegt, haben die Schwerpunkte aufgehört, sich zu nähern und beginnen, sich von einander zu entfernen. In diesem Zeitpunkte ist also die scheinbare (relative) Geschwindigkeit der beiden Schwerpunkte gegen

Fig. 142.



einander Null, d. h. beide haben eine gemeinsame Geschwindigkeit u. Im zweiten Abschnitte wirkt die Kraft im Allgemeinen noch fort, verzögert M noch weiter bis auf die Geschwindigkeit v und beschleunigt gleichzeitig M_1 bis zur Geschwindigkeit v_1. Mit dem Eintritte dieser Geschwindigkeiten mag die gegenseitige Einwirkung (N) aufhören und damit auch der Stoss beendet sein.

Es kommt darauf an, aus den Geschwindigkeiten c und c_1 vor dem Stosse die Geschwindigkeiten v und v_1 nach dem Stosse zu ermitteln.

In den Figuren sind die Geschwindigkeiten vor dem Stosse mit vollen Linien, die Geschwiedigkeiten im Augenblicke der stärksten Formänderung gestrichelt, die Geschwindigkeiten nach dem Stosse strichpunktirt.

Sehr einfach ist die Bestimmung der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit u im Augenblicke der stärksten Formänderung. Die Verzögerung p des Schwerpunktes der stossenden Masse M und die Beschleunigung p_1 des Schwerpunktes der gestossenen Masse M_1 sind $p = \frac{N}{M}$; $p_1 = \frac{N}{M_1}$, ihr Verhältnis

1) $$p : p_1 = M_1 : M,$$

d. h. umgekehrt wie die Massen. Die Geschwindigkeits-Änderungen von S bezw. S_1 während eines Zeittheilchens sind $p\,dt$ und $p_1\,dt$ und stehen in demselben Verhältnisse $M_1 : M$. Da dieses Verhältnis ganz unabhängig von der (sehr veränderlichen) Grösse der Kraft N ist, so müssen in demselben unveränderlichen Verhältnis auch die Geschwindigkeits-Änderungen der beiden Massen für jeden beliebigen Theil des Stosses, sowie auch für die ganze Stossdauer stehen. Daher für den ersten Abschnittt des Stosses:

2) $$\frac{c - u}{u - c_1} = \frac{M_1}{M};$$

für den zweiten Abschnitt:

3) $$\frac{u - v}{v_1 - u} = \frac{M_1}{M};$$

für den ganzen Stoss:

4) $$\frac{c - v}{v_1 - c_1} = \frac{M_1}{M}.$$

Aus Gl. 2 findet man leicht die Unbekannte

5) $$u = \frac{Mc + M_1 c_1}{M + M_1}.$$

Hieraus ergeben sich die Geschwindigkeits-Aenderungen der beiden Massen im ersten Abschnitte des Stosses, wenn man in $c - u$ und $u - c_1$ den Werth von u nach Gl. 5 einsetzt und möglichst zusammenzieht, zu

6) $$c - u = \frac{c - c_1}{1 + \frac{M}{M_1}} \text{ und}$$

7) $$u - c_1 = \frac{c - c_1}{1 + \frac{M_1}{M}}.$$

Diese Vorgänge im ersten Abschnitte des Stosses sind von der Beschaffenheit der Körper und von der Heftigkeit des Stosses ganz unabhängig. Anders ist es mit den Vorgängen im zweiten Abschnitte; diese lassen sich nicht mehr mit gleicher Schärfe bestimmen, da sie wesentlich von dem Grade des elastischen Verhaltens der Körper abhängig sind, zu dessen Kennzeichnung eine Erfahrungsgrösse eingeführt werden muss. Die Geschwindigkeits-Änderung $u - v$ der Masse M während des zweiten Abschnittes werde nämlich auf die Geschwindigkeits-Änderung $c - u$ derselben Masse im ersten Abschnitte bezogen durch die Festsetzung

$$u - v = k\,(c - u).$$

Dieses selbe Verhältnis gilt dann wegen Gl. 2 u. 3 auch für die Masse M_1, d. h.

$$v_1 - u = k\,(u - c_1).$$

Die Verhältniszahl k heisst der Koëfficient der Stoss-Elasticität, wofür wir kürzer Stossziffer sagen. Wenn die Geschwindigkeits-Abnahme der Masse M im zweiten Abschnitte k mal so gross ist wie im ersten, so muss sie während beider Abschnitte das $(1 + k)$ fache derjenigen des ersten Abschnittes betragen, daher

$$c - v = (c - u)\,(1 + k)$$

und ebenso die Geschwindigkeit-Zunahme vom M:

$$v_1 - c_1 = (u - c_1\,(1 + k),$$

oder mit Hülfe der Gl. 6 u. 7:

8) $$\boldsymbol{c - v = \frac{c - c_1}{1 + \frac{M}{M_1}} (1 + k)}.$$

9) $$\boldsymbol{v_1 - c_1 = \frac{c - c_1}{1 + \frac{M_1}{M}} (1 + k)}.$$

Der Zähler der rechten Seiten ist der Geschwindigkeits-Unterschied der beiden Massen beim Zusammentreffen, den wir kurz die Stossgeschwindigkeit nennen wollen. Von dieser ist die Heftigkeit des Stosses abhängig. Die Nenner in Gl. 8 u. 9 haben die Form 1 + Verhältnis der beiden Massen, wobei diejenige Masse zuerst geschrieben wird, um deren Geschwindigkeit es sich gerade handelt.

Für die Grösse k ergiebt sich noch eine andere Bedeutung, wenn man die Gl. 8 u. 9 zusammenzählt und bedenkt, dass

$$\frac{1}{1 + \frac{M}{M_1}} + \frac{1}{1 + \frac{M_1}{M}} = 1 \text{ wird},$$

$$c - v + v_1 - c_1 = (c - c_1)(1 + k) \text{ oder}$$

$$v_1 - v = (c - c_1) k, \text{ daher ist}$$

10) $$k = \frac{v_1 - v}{c - c_1} = \frac{\text{Geschwindigkeits-Unterschied nach dem Stosse}}{\text{Geschwindigkeits-Unterschied vor dem Stosse}}.$$

Vergleicht man das gesammte Arbeitsvermögen beider Massen vor dem Stosse mit demjenigen nach dem Stosse, so ergiebt sich in Allgemeinen ein Unterschied, u. zw. von der Grösse

$$\mathfrak{A} = {}^1\!/_2 \, (M c^2 + M_1 c_1^2 - M_1 v^2 - M_1 v_1^2)$$

oder anders geordnet

$$2\,\mathfrak{A} = M (c^2 - v^2) - M_1 (v_1^2 - c_1^2)$$
$$= M (c - v)(c + v) - M_1 (v_1 - c_1)(v_1 + c_1).$$

Weil nun nach Gl. 4: $M_1 (v_1 - c_1) = M (c - v)$ ist, so wird auch

$$2\,\mathfrak{A} = M(c - v)\{c + v - (v_1 + c_1)\} = M(c - v)\{c - c_1 - (v_1 - v)\}.$$

Setzt man hierin die Beziehung $v_1 - v = (c - c_1)\,k$ (Gl. 10) ein, so wird $2\,\mathfrak{A} = M(c - v)\,(c - c_1)\,(1 - k)$, und es entsteht schliesslich, wenn man noch nach Gl. 8 $c - v$ auf $c - c_1$ zurückführt:

$$\mathfrak{A} = \frac{M}{2}\,\frac{(c - c_1)^2}{1 + \dfrac{M}{M_1}}\,(1 - k^2) \text{ oder}$$

$$11) \qquad \mathfrak{A} = \frac{M M_1}{M + M_1}\,\frac{(c - c_1)^2}{2}\,(1 - k^2).$$

a) Festsetzung der Stossziffer k.

1) Verhalten sich die Körper beim Stosse vollkommen elastisch, so werden sie nach Beendigung des Stosses keine bleibende Formänderung zeigen. Die negative Arbeit der inneren Spannkräfte bei der Zusammendrückung wird dann durch die positive Arbeit bei der Rückkehr in den spannungslosen Zustand vollständig aufgehoben. Da nun, wenn man beide Massen als eine Gruppe auffasst, N eine innere Kraft ist und äussere Kräfte nicht vorhanden sind, so muss das Arbeitsvermögen nach dem Stosse dieselbe Grösse haben wie vor dem Stosse. Es bedingt dies, dass in Gl. 11) $1 - k^2 = 0$, mithin $k = 1$ werde. Beim vollkommen elastischen Stoss ist also die Stossziffer $k = 1$.

2) Der Gegensatz hierzu ist, dass die Körper beim Stosse sich gar nicht elastisch, sondern vielmehr vollkommen bildsam oder plastisch verhalten, dass sie nach dem Eintreten der stärksten Formänderung gar kein Bestreben haben, zur ursprünglichen Form zurückzukehren. In diesem Falle kommt der zweite Abschnitt des Stosses gar nicht zu Stande; es ist sonach $k = 0$; die Geschwindigkeiten v und v_1 werden beide $= u$, d. h. die beiden Körper gehen nach dem Stosse mit gleicher Geschwindigkeit u weiter. In diesem Falle besteht die Arbeitsverrichtung nur in der negativen Zusammendrückungs-Arbeit, die den Verlust an Arbeitsvermögen hervorruft

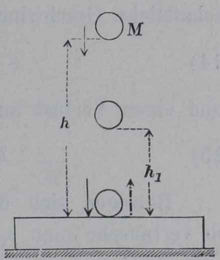
$$12) \qquad \mathfrak{A} = \frac{M M_1}{M + M_1}\,\frac{(c - c_1)^2}{2};$$

man erhält diesen Werth, indem man in Gl. 11 $k = 0$ setzt. Also: beim vollkommen unelastischen Stosse ist die Stossziffer $k = 0$.

3) Streng genommen giebt es weder einen vollkommen elastischen, noch vollkommen unelastischen Stoss; vielmehr sind die wirklichen Stösse unvollkommen elastisch, und es liegt k zwischen 0 und 1. Ob ein Stoss mehr oder weniger elastisch ausfällt, hängt nicht allein von der Beschaffenheit der Körper ab, sondern auch von der Heftigkeit des Stosses, von der Stossgeschwindigkeit $c - c_1$. Die Stossziffer nähert sich um so mehr der Einheit, je elastischer die Körper sind (Elfenbein, Glas, Kautschuk) und je geringer die Heftigkeit des Stosses ist; sie nähert sich um so mehr der Null, je bildsamer die Körper sind (Wachs, Blei, ungebrannter Thon) und je heftiger der Stoss erfolgt.

Für einen gegebenen Fall kann man die Stossziffer k durch Versuche ermitteln. Auf einen festen Boden (Fig. 143) legt man eine Platte aus bestimmtem Stoffe, lässt eine Kugel M von ebenfalls bestimmtem Stoffe aus einer Höhe h herabfallen und beobachtet, bis zu welcher Höhe h_1 sie wieder emporspringt. Um auf diesen Fall die Gl. 8 und 9 anwenden zu können, muss man zunächst beachten, dass die in diese Gleichungen einzuführende Masse M_1 nicht gleich der Masse der Platte ist, dass vielmehr die Platte, weil sie auf dem unnachgiebigen Erdboden gelagert ist, für den Stoss gewissermassen mit der ganzen Erde zusammen eine Masse M_1 bildet, so dass $M_1 : M = \infty$ oder $M : M_1 = 0$ zu setzen ist. In allen Fällen, wo ein durch einen Stoss getroffener Körper in irgend einer Weise unbeweglich gemacht ist, kommt dieser Umstand dadurch zum Ausdrucke, dass man $M : M_1 = 0$ setzt, weil nur hierdurch in Gl. 9 die Geschwindigkeits-Änderung $v_1 - c_1$ zu Null gemacht wird.

Fig. 143.



Da die Platte die Geschwindigkeit $c_1 = 0$ hatte, so wird (Gl. 8)

$$c - v = c(1 + k) = c + ck,$$

also $v = -ck$. Nun ist $c = \sqrt{2gh}$; das negative Zeichen von ck bedeutet, dass die Geschwindigkeit nach dem Stosse aufwärts gerichtet ist. Es wird v gemessen durch die Steighöhe

$$h_1 = \frac{v^2}{2g} = k^2 \frac{c^2}{2g} = k^2 h,$$

mithin ist

13) $$k = \sqrt{\frac{h_1}{h}}.$$

Für vollkommen elastischen Stoss müsste $h_1 = h$ werden; für $k = 0$ wird $h_1 = 0$. Die Ergebnisse eines solchen Versuches können natürlich nur auf solche Fälle angewandt werden, wo dieselben Stoffe vorliegen wie beim Versuch und auch die Stossgeschwindigkeit $c - c_1$ etwa $= \sqrt{2gh}$ ist. Der Luftwiderstand ist für kleine c zu vernachlässigen.

Für Geschwindigkeiten, wie sie auf dem Billard vorkommen, ist bei Elfenbein $k = {}^8/_9$. Für geringe Geschwindigkeiten ist bei Glas $k = {}^{15}/_{16}$, für Stahl und Kork ${}^5/_9$. Für Holz ist bei etwa $0{,}4$ m Fallhöhe $k = {}^1/_2$.

b) Unelastischer Stoss.

Für $k = 0$ haben beide Körper nach dem Stosse die gemeinschaftliche Geschwindigkeit

14) $$v = v_1 = u = \frac{Mc + M_1 c_1}{M + M_1}$$

und einen Verlust an Arbeitsvermögen (Gl. 11, S. 130)

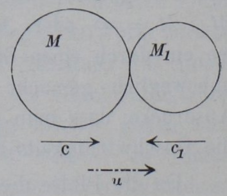
15) $$\mathfrak{A} = \frac{M M_1}{M + M_1} \frac{(c - c_1)^2}{2}.$$

Bewegen sich die beiden Körper gegen einander (Fig. 144), so vertausche man c_1 mit $-c_1$; dann wird

16) $$v = v_1 = u = \frac{Mc - M_1 c_1}{M + M_1} \text{ und}$$

17) $$\mathfrak{A} = \frac{M M_1}{M + M_1} \frac{(c + c_1)^2}{2}.$$

Fig. 144.



Sind noch beide Massen und deren Geschwindigkeiten einander gleich, so wird $v = v_1 = 0$ und

18) $$\mathfrak{A} = \frac{M}{2} \frac{4c^2}{2} = 2 \frac{Mc^2}{2},$$

d. h. in diesem Falle geht das gesammte durch die Geschwindigkeiten der Körper bedingte Arbeitsvermögen für die äussere Bewegung verloren. Freilich verschwindet das Arbeitsvermögen nicht spurlos, vielmehr wird es zum grössten Theile, wie die Arbeitsverluste durch Reibung (Theil 1, S. 265) in Wärme, zum kleineren Theil in Schallschwingungen umgewandelt.

c) Anwendung des Stosses; Einrammen von Pfählen.

Da die Geschwindigkeits-Aenderungen beim Stosse sehr schnell erfolgen, so wird die entsprechende Kraft N häufig sehr gross. Die technische Verwendung des Stosses hat meist den Zweck, mit vergleichsweise einfachen Mitteln grosse Kräfte auszuüben, z. B. beim Eintreiben von Nägeln und Pfählen, beim Schmieden u. dgl. Man könnte einen Nagel auch durch Belastung ins Holz eindrücken; jedoch ist dies zu umständlich; die zum Eindrücken erforderliche Kraft lässt sich mittels eines Hammerschlages in einfachster Weise hervorbringen.

Beim Eintreiben von Nägeln und dem Einrammen von Pfählen sind die Verhältnisse so beschaffen, dass man den Stoss als annähernd unelastisch ($k = 0$) annehmen kann. Auch hat der getroffene Körper M_1 vor dem Stosse die Geschwindigkeit $c_1 = 0$; daher wird

19) $$v = v_1 = u = \frac{Mc}{M + M_1},$$

der Verlust an (äusserem) Arbeitsvermögen

20) $$\mathfrak{A} = \frac{M M_1}{M + M_1} \frac{c^2}{2} = \frac{Mc^2}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{M}{M_1}}.$$

Bei letzterer Schreibweise von $\mathfrak{A}$ ist $\frac{1}{2} Mc^2$ das vor dem Stosse vorhandene Arbeitsvermögen; der zugehörige Faktor ist die Verhältniszahl, welche angiebt, der wievielte Theil des ursprünglichen Arbeitsvermögens verloren geht. Während der sehr kurzen Stossdauer erfolgt noch keine erhebliche Bewegung der Masse M_1; nach dem Stosse aber gehen die Massen M und M_1 mit der gemeinsamen Geschwindigkeit u weiter; der ihnen verbliebene Rest an äusserem Arbeitsvermögen

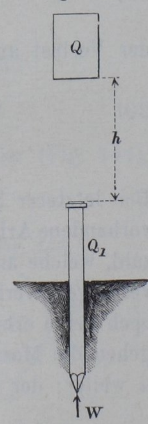
21) $$\mathfrak{A}_1 = \frac{Mc^2}{2} - \mathfrak{A} = \frac{Mc^2}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{M_1}{M}}$$

wird nun dazu verwandt, den Widerstand W, der sich dem Eindringen des Nagels oder Pfahles entgegensetzt, längs eines Weges s, der Eindringungstiefe, zu überwinden. Hiernach ist $\mathfrak{A}_1$ gewissermassen die Nutzarbeit des Stosses, während $\frac{1}{2} Mc^2$ durch Arbeitsaufwand erzeugt werden musste. Man kann daher bei Stössen, die das Eintreiben eines Nagels oder Pfahles zum Zwecke haben, $\mathfrak{A}_1 : (^1/_2\, M c^2)$ den Wirkungsgrad des Stosses

$$22)\qquad \eta_1 = \frac{1}{1 + \frac{M_1}{M}}$$

nennen. Dieser wird um so grösser, je kleiner $M_1 : M$, oder je grösser $M : M_1$ ist. Es muss daher der treibende Körper möglichst schwer im Verhältnisse zum getriebenen Körper sein. Würde der Hammer nur ebenso schwer sein wie der einzutreibende Nagel, so wäre η nur 0,5, d. h. von der zum Hammerschlag aufgewandten Muskelarbeit würde nur die Hälfte nutzbar, während die andere Hälfte in schädlicher Weise unter Erzeugung von Wärme und Schall dem Nagelkopfe bleibende Formänderungen ertheilte.

Fig. 145.



Beim Einrammen von Pfählen lässt man einen Rammklotz vom Gewicht $Q = Mg$ von einer Höhe h auf den Kopf des Pfahles vom Gewichte $Q_1 = M_1 g$ herabfallen (Fig. 145). Die für einen Schlag zum Heben des Rammklotzes aufgewandte Arbeit Qh setzt sich beim Fallen in äusseres Arbeitsvermögen $^1/_2\, M c^2$ um; davon geht der Theil $\mathfrak{A}$ für den Zweck verloren, während mit dem Reste (Gl. 21)

$$\mathfrak{A}_1 = Q h \cdot \frac{1}{1 + \frac{Q_1}{Q}}$$

beide Körper nach dem Stosse sich abwärts bewegen. Ist s die Wegeslänge dieser Weiterbewegung, so verrichtet die Schwere noch die Arbeit $(Q + Q_1)\, s$, während der Widerstand W des Erdreiches die Arbeit $-W s$ leistet. Sonach ist

$$23)\qquad W s = (Q + Q_1)\, s + Q h \frac{1}{1 + \frac{Q_1}{Q}}.$$

Hieraus kann man W berechnen, wenn s beobachtet wurde.

Beispiel: Ist $Q = 1200$ kg, $Q_1 = 600$ kg, $h = 80$ cm und $s = 0{,}5$ cm, so wird

$$W \cdot 0{,}5 = 1800 \cdot 0{,}5 + \frac{1200 \cdot 80}{1{,}5}$$

$$= 900 + 64000, \quad \text{daher}$$

$$W = 129800 \text{ kg}.$$

Das Glied $(Q + Q_1)s$ hat so unbedeutenden Einfluss, dass man genau genug

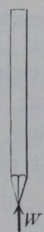
24) $$Ws = Qh \frac{1}{1 + \frac{Q_1}{Q}} \quad \text{setzt, mit}$$

$$W = 128000 \text{ kg}.$$

Bis zu diesem Werthe dürfte die Belastung des Pfahles steigen, ohne dass der Pfahl einsänke. Da aber diese Rechnung ziemlich roh ist, erfahrungsmässig auch der Widerstand des Erdreiches mit der Zeit abnimmt, so nimmt man von dem nach Gl. 24 berechneten Werthe von W nur etwa $^1/_{18}$ als mit Sicherheit zulässige Belastung, d. h. rund 7000 kg.

Berücksichtigung der Elasticität des Pfahles. Nach den Gleichungen 23 und 24 würde jeder Schlag von noch so geringer Fallhöhe h eine gewisse, wenn auch kleine Eindringungstiefe s des Pfahles zur Folge haben, da erst für $h = 0$ auch $s = 0$ wird. Dies trifft aber in Wirklichkeit nicht zu. Bis zu einem gewissen Grenzwerthe h_0 bringen Fallhöhen des Rammklotzes gar keine Eindringung des Pfahles hervor, sondern pressen nur den Pfahl elastisch zusammen, worauf er sich dann wieder ausdehnt. Soll sich nämlich der Pfahl vom Querschnitt F und der Länge l durch Einwirkung von oben unter Überwindung des Widerstandes W abwärts bewegen, so muss an dem unteren Ende des Pfahles eine Spannung $\sigma = W : F$ hervorgebracht sein, und man kann mit einiger Wahrscheinlichkeit annehmen, dass nahezu der ganze Pfahl auf diese Spannung gebracht werden muss, bevor er einsinken wird.

Fig. 146



Dazu ist aber nach S. 101 eine Arbeit $\frac{V}{2} \frac{\sigma^2}{E}$ erforderlich. Diese muss man von dem Arbeitsvermögen des Pfahles und des Rammklotzes abziehen, und erst der Rest ist $= Ws$ zu setzen. Mithin wird, weil $V = Fl$,

25) $$Ws = \frac{Qh}{1 + \frac{Q_1}{Q}} - \frac{W^2 l}{2EF}.$$

Die unwirksame Fallhöhe h_0 erhält man, wenn man $s = 0$ und $h = h_0$ setzt, d. h.

$$\frac{Q h_0}{1 + \frac{Q_1}{Q}} = \frac{W^2 l}{2 E F}. \tag{26}$$

Von der Höhe h wird also nur $h - h_0$ wirksam. Dieser Einfluss wird besonders bei langen Pfählen bedeutend.

Beispiel: Ist wiederum $Q = 1200^{\text{kg}}$, $Q_1 = 600^{\text{kg}}$, $h = 80^{\text{cm}}$, Pfahldicke $d = 30^{\text{cm}}$, $F = 700^{\text{qcm}}$, $l = 10^{\text{m}} = 1000^{\text{cm}}$, $E = 120000^{\text{at}}$, $s = 0{,}5^{\text{cm}}$, so wird

$$W \cdot 0{,}5 = \frac{1200 \cdot 80}{1{,}5} - \frac{W^2 1000}{2 \cdot 120000 \cdot 700}.$$

Dies giebt rund $W = 70000^{\text{kg}}$, wovon man etwa $^1/_{10}$, d. h. 7000^{kg}, als sicher zulässige Belastung des Pfahles nimmt. Für die unwirksame Fallhöhe wird $\frac{1200 \cdot h_0}{1{,}5} = \frac{70000^2 \cdot 1000}{2 \cdot 120000 \cdot 700}$ mit $h_0 =$ etwa 36^{cm}. Mit Berücksichtigung dieses Umstandes wird dann der Wirkungsgrad der Ramme (statt nach Gl. 22) nur sein:

$$\eta_1 = \frac{Q(h - h_0)}{Q h} \cdot \frac{1}{1 + \frac{Q_1}{Q}} = \frac{Q(h - h_0)}{(Q + Q_1) h} = \frac{80 - 36}{1{,}5 \cdot 80} = 0{,}37.$$

Durch Vergrösserung von h würde derselbe erhöht werden. — Grossen praktischen Werth haben vorstehende Formeln leider nicht.

d) Hämmer zum Schmieden oder Nieten.

Die für die äussere Bewegung verloren gehende Arbeit $\mathfrak{A}$, welche unter Erwärmung eine bleibende Formänderung erzeugt, war beim Eintreiben von Nägeln, Pfählen u. dgl. ein Verlust, ist aber beim Schmieden oder Nieten gerade das Nützliche. Hierfür ist nach Gl. 20 (S. 133) der Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{\mathfrak{A}}{^1/_2 M c^2} = \frac{1}{1 + \frac{M}{M_1}}. \tag{27}$$

Dieser wird gross, wenn $M_1 : M$ gross wird, d. h. wenn die getroffene Masse gross ist im Verhältnisse zur stossenden Masse. Zu diesem Zwecke legt man das Schmiedestück auf einen schweren Amboss und unterstützt diesen durch einen noch schwereren Körper, die Chabotte, welche bei Dampfhämmern tief in den Erdboden reicht. Amboss und Chabotte bilden dann in Bezug auf die Wirkung des Stosses mit dem Schmiedestück eine einzige Masse M_1. Ist z. B. $M_1 = 10 M$, so wird $\eta = 1 : 1{,}1 = 0{,}91$, d. h. es werden 91 %

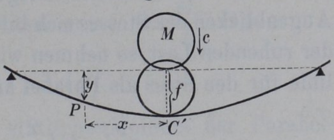
der aufgewandten Arbeit zur Formänderung verwandt, während 9 % der Arbeit die Chabotte allmählich tiefer in den Erdboden eintreiben.

Beim Nieten muss das Niet durch einen möglichst schweren Vorhalt-Hammer von der Masse M_1 gegen Fortbewegung durch den Schlag des Niethammers thunlichst geschützt werden.

e) Biegung durch den Stoss eines Körpers.

Dieser Fall wurde auf S. 114 unter der Voraussetzung behandelt, dass die Masse des getroffenen, auf Biegung beanspruchten Körpers vernachlässigt werden könne, Mit Rücksicht auf diese Masse kann man die Aufgabe in folgender Weise behandeln. Die bisherigen Gleichungen für den Stoss setzten voraus, dass sämmtliche Punkte des gestossenen Körpers sich im Augenblicke der stärksten Zusammenpressung mit übereinstimmender Geschwindigkeit u weiter bewegten. Wird aber ein an beiden Enden unterstützter Stab von der Masse M_1 in seiner Mitte durch eine mit der Geschwindigkeit c dagegen stossende Masse M getroffen (Fig. 147), so wird der Stab sich biegen, und die Geschwindigkeiten seiner einzelnen Punkte werden in jedem Augenblick unter einander verschieden sein; an den Auflagern bleiben die Geschwindigkeiten Null, während sie nach der Mitte hin zunehmen. Für das Verhältnis der Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte giebt das Verhältniss der Ordinaten der betreffenden Stellen einen Anhalt. Da die Wegeslängen y und f in gleichen Zeiten durchlaufen werden, so müssen die Geschwindigkeiten und ebenso auch die Beschleunigungen p_y und p_1 der Punkte P und C sich verhalten wie $y:f$, d. h. es ist

Fig. 147.



$$p_y = p_1 \frac{y}{f}.$$

Nach dem Satze von der Bewegung des Schwerpunktes (Theil I., S. 141) ist

$$\Sigma m p_y = \Sigma Y.$$

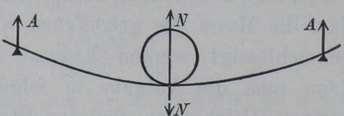
Darin bedeutet ΣY die Summe sämmtlicher äusseren Kräfte der Richtung der p_y. In irgend einem Augenblicke während des Stosses wirkt nun an dem getroffenen Stabe im Sinne der p_y die Kraft $N - 2A$ (Fig. 148), mithin wird

$$\Sigma m p_y = \frac{p_1}{f} \Sigma m y = N - 2A.$$

Darin ist m die Masse eines Längentheilchens, d. h. bei überall gleichem Querschnitte, den wir hier annehmen wollen,

$$m = \frac{\gamma}{g} F \cdot dx.$$

Fig. 148.



Daher entsteht

$$\frac{p_1}{f} \frac{\gamma}{g} F \int y\,dx = N - 2A.$$

Man könnte nun $y:f$ aus der Gleichung der Biegungslinie für den Fall einer ruhigen Belastung ableiten. Da es aber zweifelhaft ist, ob die verschiedenen Biegungslinien, die in den verschiedenen Augenblicken des Stosses sich bilden, dieselbe Form haben wie diejenige der ruhenden Last, so nehmen wir der Einfachheit wegen die Biegungslinie für den Stoss als Parabel an. Dann wird $\int y\,dx = {}^2\!/_3\, f\,l$, mithin

$$p_1 \frac{\gamma}{g} F l \frac{2}{3} = N - 2A, \text{ oder,}$$

weil $\gamma F l = M_1\, g$ ist,

$$p_1 \cdot \frac{2}{3} M_1 = N - 2A.$$

Für den stossenden Körper ist $Mp = N$, mithin

$$p_1 \frac{2}{3} M_1 = Mp - 2A.$$

Es ist nun nicht etwa, wie im Gleichgewichtszustande $2A = N$; vielmehr ist $2A$ erheblich kleiner als N. Ist der Stoss sehr heftig, so pflanzt sich seine Wirkung nicht einmal bis zu den Stützpunkten fort; es bleibt (unter Vernachlässigung der Schwere) $A = 0$; der Druck N wirkt nur ausserordentlich kurze Zeit, wächst dabei zu einem verhältnismässig grossen Werth und bringt an dem Stab eine nur örtliche zerstörende Wirkung hervor, wie man z. B. mit einer Gewehrkugel versuchen kann. In solchem Fall ist von der Ausbildung einer Biegungslinie keine Rede. Aber auch bei weniger heftigem Stosse kann doch meist $2A$ gegenüber N vernachlässigt werden, so dass

$$p : p_1 = {}^2\!/_3\, M_1 : M \text{ ist.}$$

Vergleicht man diese Formel mit Gl. 1, S. 127, so findet man, dass an Stelle von M_1 nunmehr $^2\!/_3\, M$ getreten ist. Es folgt dann in gleicher Weise wie dort (mit c_1 = Null)

$$1)\qquad u = \frac{M c}{M + {}^2\!/_3\, M_1}$$

für die Geschwindigkeit des Stosspunktes im Augenblicke der stärksten Formänderung, während der Punkt P eine Geschwindigkeit

$$u_y = u\,\frac{y}{f} \text{ hat.}$$

Nehmen wir den Stoss, wie es in solchen Fällen meistens geschieht, als unelastisch an, so ist das gesammte Arbeitsvermögen beider Körper nach dem Stosse

$$^1\!/_2\, M u^2 + {}^1\!/_2\, \Sigma m u_y{}^2,$$

wofür sich in ähnlicher Weise wie oben mit $m = \frac{M_1}{l} \cdot dx$

$$\frac{u^2}{2}\left(M + \frac{M_1}{f^2\, l} \int y^2\, dx\right)$$

ergiebt. Nun ist $^1\!/_2 \int y\, dx \cdot y$ das statische Moment der Parabelfläche in Bezug auf die Sehne, $= {}^2\!/_3\, f\, l \cdot {}^2\!/_5\, f$ (Theil 1, S. 133), mithin $\int y^2\, dx = {}^8\!/_{15}\, f^2\, l$; also wird das Arbeitsvermögen

$$2)\qquad \frac{u^2}{2}\left(M + {}^8\!/_{15}\, M_1\right)$$

oder, wenn man den obigen Werth für u (Gl. 1) einsetzt, und bedenkt, dass das Arbeitsvermögen in Biegungsarbeit (S. 111) umgewandelt wird,

$$3)\qquad \frac{M c^2}{2}\;\frac{1 + \frac{8}{15}\,\frac{M_1}{M}}{\left(1 + \frac{2}{3}\,\frac{M_1}{M}\right)^2} = \frac{V}{6}\,\frac{\sigma^2}{E}\,\frac{i^2}{e^2}.$$

Die Umständlichkeit dieser Formel steht nicht im Verhältnisse zur Sicherheit ihrer Grundlagen. Innerhalb ziemlich weiter Grenzen ($M_1 : M = {}^1\!/_{10}$ bis 10) kann man dafür annäherungsweise einfacher schreiben

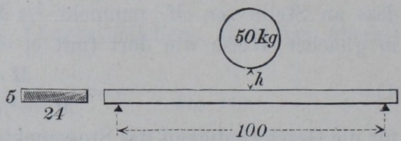
$$4)\qquad \frac{Mc^2}{2}\;\frac{1}{\left(1 + 0{,}8\,\frac{M_1}{M}\right)} = \frac{V}{6}\,\frac{\sigma^2}{E}\,\frac{i^2}{e^2}.$$

Beispiel: Auf die Mitte einer Bohle von 1 m Spannweite, 24 cm Breite, 5 cm Stärke (Fig. 149) falle ein Gewicht von 50 kg. Wie gross darf die Fallhöhe h sein, damit die Bohle nicht über 170 at gespannt werde? Wiegt ein 1 cbm Holz 600 kg, so wird das Gewicht der Bohle

$$Q_1 = 1 \cdot 0{,}24 \cdot 0{,}05 \cdot 600 = 7{,}2^{\text{kg}}.$$

Es wird $\frac{1}{2} M c^2 = Q h$.

Fig. 149.



Die obigen Gleichungen gelten für einen Stoss in wagerechter Richtung, bei dem die Schwere keine Arbeit verrichtet. Beim lothrecht abwärts erfolgenden Stoss aber verrichtet die Schwere eine Arbeit, während die Bohle sich um f durchbiegt. Das Gewicht Q leistet die Arbeit Qf, das Gewicht Q_1 der Bohle aber $\frac{2}{3} Qf$, weil ein beliebiges Theilchen der Bohle nur um y sinkt (vergl. S. 137, Fig. 147). Nun beträgt die Durchbiegung der Bohle bei $\sigma = 170^{\text{at}}$ nach S. 46, Gl. 14:

$$f = \frac{1}{12} \frac{170}{120\,000} \frac{100^2}{2{,}5} = 0{,}47^{\text{cm}},$$

daher wird nach Gl. 4 (mit $i^2 : e^2 = \frac{1}{3}$, vgl. S. 112)

$$\frac{50\,h}{1 + 0{,}8 \cdot \frac{7{,}2}{50}} + 0{,}47 \left(50 + \frac{2}{3} 7{,}2\right) = \frac{12\,000}{18} \frac{170^2}{120\,000}$$

oder $h = 3^{\text{cm}}$.

Im Ruhezustande entspricht der Belastung mit 50 kg nur eine Spannung

$$\sigma = \frac{50 \cdot 100 \cdot 6}{4 \cdot 24 \cdot 5^2} = 12{,}5^{\text{at}},$$

und schon durch einen Fall der Last von 3 cm Höhe steigt die Spannung auf das 13,6 fache. Hiernach ist es begreiflich, dass man die in Gleichgewichts-Berechnungen einzusetzenden Spannungen oft nur sehr gering annehmen darf, wenn Stösse der Last zu erwarten sind.

f) Vollkommen elastischer Stoss.

Je kleiner die Stossgeschwindigkeit $c - c_1$ und je elastischer die Körper sind, um so mehr wird sich k dem Werth 1 nähern. Für $k = 1$ wird nach Gl 8), S. 129

1) $$c - v = 2 \frac{c - c_1}{1 + \frac{M}{M_1}}; \quad v_1 - c_1 = 2 \frac{c - c_1}{1 + \frac{M_1}{M}}.$$

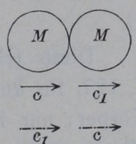
Sind die Massen einander gleich, wie es bei Billardkugeln annähernd zutrifft (Fig. 150), so wird

$$c - v = c - c_1, \quad \text{d. h. } v = c_1 .$$

$$v_1 - c_1 = c - c_1, \quad \text{d. h. } v_1 = c;$$

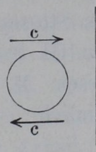
d. h. es vertauschen die Massen ihre Geschwindigkeiten. Sind die Kugeln im Aussehen nicht verschieden, so sieht man die Wirkung des Stosses kaum. Denn mit der Geschwindigkeit c, die vorher die eine Kugel hatte, bewegt sich auch nach dem Stoss eine Kugel weiter, ebenso mit der Geschwindigkeit c_1 die andere, gerade wie wenn sich die Kugeln durchdrungen hätten.

Fig. 150.



Dieser Fall findet auch Anwendung auf Eisenbahnwagen, wenn dieselben beim Verschieben mit geringer Stossgeschwindigkeit auf einander treffen; denn bei geringer Heftigkeit des Stosses verhalten sich die Bufferfedern ziemlich elastisch. Bei ungleichen Massen sind die Gl. 1) anzuwenden.

Fig 151.



Stösst ein Körper gegen eine ruhende und unbewegliche elastische Wand, so muss (wie S. 131) $M_1 : M = \infty$ gesetzt werden. Dann wird

$$c - v = \frac{2\,c}{1 + 0}, \quad \text{d. h. } v = -c .$$

Der Körper wird also mit der gleichen Geschwindigkeit von der Wand zurückgeworfen, mit der er dieselbe traf.

2. Stoss sich drehender Körper.

Zwei Körper drehen sich um feste Parallelachsen A u. A_1 und treffen derartig zusammen, dass zwischen ihnen ein gegenseitiger Druck N auftritt, der rechtwinklig zu der Ebene beider Drehachsen steht und diese Ebene in P schneidet. Dann ist P der Stosspunkt; er sei von A u. A_1 um a bezw. a_1 entfernt. Die Umfangsgeschwindigkeiten beider Körper am Stosspunkte mögen c bezw. c_1 betragen. Diese Geschwindigkeiten sind der Unterscheidung wegen auf dem Drehungskreise angedeutet, ebenso die Geschwindigkeiten v und v_1 nach dem Stoss (an der rechten Seite der Figur). Der Druck N