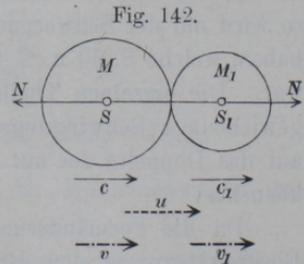


D. Stoss elastisch-fester Körper.

Treten zwei Körper während der Bewegung mit einander in Berührung und haben sie an der Berührungsstelle verschiedene Geschwindigkeit, so werden sie im Allgemeinen gegenseitig auf ihre Bewegung einwirken, d. h. gegenseitige Kräfte auf einander ausüben. Die hiermit zusammenhängenden Bewegungs-Erscheinungen nennt man Stoss. Die Richtungslinie des gegenseitigen Normaldrucks zwischen den Körpern heisst die Stosslinie. Geht die Stosslinie durch die Schwerpunkte beider Körper, so heisst der Stoss central, sonst excentrisch. Bewegen sich beide Körper rein fortschreitend, u. zw. in der Richtung der Stosslinie, so heisst der Stoss ein gerader.

I. Gerader centraler Stoss.

Der stossende Körper habe die Masse M und im Augenblicke des Zusammentreffens die Geschwindigkeit c , der getroffene Körper von der Masse M_1 die kleinere Geschwindigkeit c_1 . Die Körper üben nun an der Berührungsstelle gegenseitige gleiche Normalkräfte N auf einander aus und drücken sich gegenseitig zusammen, bis der Abstand der Schwerpunkte S und S_1 beider Körper den kleinsten Werth erreicht hat. Bis zu diesem Augenblicke hat sich die Kraft N , von Null beginnend, stetig vergrössert. Diese Erscheinungen bilden den ersten Abschnitt der Stossdauer. Darnach erfolgt dann im zweiten Abschnitte des Stosses eine Wiederausdehnung der Körper, wobei die Schwerpunkte sich wieder von einander entfernen. In dem Augenblicke der stärksten Formänderung, welcher zwischen beiden Abschnitten des Stosses liegt, haben die Schwerpunkte aufgehört, sich zu nähern und beginnen, sich von einander zu entfernen. In diesem Zeitpunkte ist also die scheinbare (relative) Geschwindigkeit der beiden Schwerpunkte gegen



einander Null, d. h. beide haben eine gemeinsame Geschwindigkeit u . Im zweiten Abschnitte wirkt die Kraft im Allgemeinen noch fort, verzögert M noch weiter bis auf die Geschwindigkeit v und beschleunigt gleichzeitig M_1 bis zur Geschwindigkeit v_1 . Mit dem Eintritte dieser Geschwindigkeiten mag die gegenseitige Einwirkung (N) aufhören und damit auch der Stoss beendet sein.

Es kommt darauf an, aus den Geschwindigkeiten c und c_1 vor dem Stosse die Geschwindigkeiten v und v_1 nach dem Stosse zu ermitteln.

In den Figuren sind die Geschwindigkeiten vor dem Stosse mit vollen Linien, die Geschwindigkeiten im Augenblicke der stärksten Formänderung gestrichelt, die Geschwindigkeiten nach dem Stosse strichpunktirt.

Sehr einfach ist die Bestimmung der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit u im Augenblicke der stärksten Formänderung. Die Verzögerung p des Schwerpunktes der stossenden Masse M und die Beschleunigung p_1 des Schwerpunktes der gestossenen Masse M_1 sind

$$p = \frac{N}{M}; \quad p_1 = \frac{N}{M_1}, \quad \text{ihr Verhältnis}$$

$$1) \quad p : p_1 = M_1 : M,$$

d. h. umgekehrt wie die Massen. Die Geschwindigkeits-Änderungen von S bezw. S_1 während eines Zeittheilchens sind $p dt$ und $p_1 dt$ und stehen in demselben Verhältnisse $M_1 : M$. Da dieses Verhältnis garz unabhängig von der (sehr veränderlichen) Grösse der Kraft N ist, so müssen in demselben unveränderlichen Verhältnis auch die Geschwindigkeits-Änderungen der beiden Massen für jeden beliebigen Theil des Stosses, sowie auch für die ganze Stossdauer stehen. Daher für den ersten Abschnitt des Stosses:

$$2) \quad \frac{c - u}{u - c_1} = \frac{M_1}{M};$$

für den zweiten Abschnitt:

$$3) \quad \frac{u - v}{v_1 - u} = \frac{M_1}{M};$$

für den ganzen Stoss:

$$4) \quad \frac{c - v}{v_1 - c_1} = \frac{M_1}{M}.$$

Aus Gl. 2 findet man leicht die Unbekannte

$$5) \quad u = \frac{Mc + M_1 c_1}{M + M_1}.$$

Hieraus ergeben sich die Geschwindigkeits-Änderungen der beiden Massen im ersten Abschnitte des Stosses, wenn man in $c - u$ und $u - c_1$ den Werth von u nach Gl. 5 einsetzt und möglichst zusammenzieht, zu

$$6) \quad c - u = \frac{c - c_1}{1 + \frac{M}{M_1}} \quad \text{und}$$

$$7) \quad u - c_1 = \frac{c - c_1}{1 + \frac{M_1}{M}}.$$

Diese Vorgänge im ersten Abschnitte des Stosses sind von der Beschaffenheit der Körper und von der Heftigkeit des Stosses ganz unabhängig. Anders ist es mit den Vorgängen im zweiten Abschnitte; diese lassen sich nicht mehr mit gleicher Schärfe bestimmen, da sie wesentlich von dem Grade des elastischen Verhaltens der Körper abhängig sind, zu dessen Kennzeichnung eine Erfahrungsgrösse eingeführt werden muss. Die Geschwindigkeits-Änderung $u - v$ der Masse M während des zweiten Abschnittes werde nämlich auf die Geschwindigkeits-Änderung $c - u$ derselben Masse im ersten Abschnitte bezogen durch die Festsetzung

$$u - v = k(c - u).$$

Dieses selbe Verhältnis gilt dann wegen Gl. 2 u. 3 auch für die Masse M_1 , d. h.

$$v_1 - u = k(u - c_1).$$

Die Verhältniszahl k heisst der Koeffizient der Stoss-Elasticität, wofür wir kürzer Stossziffer sagen. Wenn die Geschwindigkeits-Abnahme der Masse M im zweiten Abschnitte k mal so gross ist wie im ersten, so muss sie während beider Abschnitte das $(1 + k)$ fache derjenigen des ersten Abschnittes betragen, daher

$$c - v = (c - u)(1 + k)$$

und ebenso die Geschwindigkeit-Zunahme vom M :

$$v_1 - c_1 = (u - c_1)(1 + k),$$

oder mit Hilfe der Gl. 6 u. 7:

$$8) \quad c - v = \frac{c - c_1}{1 + \frac{M}{M_1}} (1 + k).$$

$$9) \quad v_1 - c_1 = \frac{c - c_1}{1 + \frac{M}{M_1}} (1 + k).$$

Der Zähler der rechten Seiten ist der Geschwindigkeits-Unterschied der beiden Massen beim Zusammentreffen, den wir kurz die Stossgeschwindigkeit nennen wollen. Von dieser ist die Heftigkeit des Stosses abhängig. Die Nenner in Gl. 8 u. 9 haben die Form $1 +$ Verhältnis der beiden Massen, wobei diejenige Masse zuerst geschrieben wird, um deren Geschwindigkeit es sich gerade handelt.

Für die Grösse k ergibt sich noch eine andere Bedeutung, wenn man die Gl. 8 u. 9 zusammenzählt und bedenkt, dass

$$\frac{1}{1 + \frac{M}{M_1}} + \frac{1}{1 + \frac{M_1}{M}} = 1 \text{ wird,}$$

$$c - v + v_1 - c_1 = (c - c_1) (1 + k) \text{ oder}$$

$$v_1 - v = (c - c_1) k, \text{ daher ist}$$

$$10) \quad k = \frac{v_1 - v}{c - c_1} = \frac{\text{Geschwindigkeits-Unterschied nach dem Stosse}}{\text{Geschwindigkeits-Unterschied vor dem Stosse}}.$$

Vergleicht man das gesammte Arbeitsvermögen beider Massen vor dem Stosse mit demjenigen nach dem Stosse, so ergibt sich in Allgemeinen ein Unterschied, u. zw. von der Grösse

$$\mathcal{A} = 1/2 (M c^2 + M_1 c_1^2 - M v^2 - M_1 v_1^2)$$

oder anders geordnet

$$\begin{aligned} 2 \mathcal{A} &= M (c^2 - v^2) - M_1 (v_1^2 - c_1^2) \\ &= M (c - v) (c + v) - M_1 (v_1 - c_1) (v_1 + c_1). \end{aligned}$$

Weil nun nach Gl. 4: $M_1 (v_1 - c_1) = M (c - v)$ ist, so wird auch

$$2 \mathcal{A} = M (c - v) \{c + v - (v_1 + c_1)\} = M (c - v) \{c - c_1 - (v_1 - v)\}.$$

Setzt man hierin die Beziehung $v_1 - v = (c - c_1)k$ (Gl. 10) ein, so wird $2\mathfrak{A} = M(c - v)(c - c_1)(1 - k)$, und es entsteht schliesslich, wenn man noch nach Gl. 8 $c - v$ auf $c - c_1$ zurückführt:

$$\mathfrak{A} = \frac{M}{2} \frac{(c - c_1)^2}{1 + \frac{M}{M_1}} (1 - k^2) \text{ oder}$$

$$11) \quad \mathfrak{A} = \frac{M M_1}{M + M_1} \frac{(c - c_1)^2}{2} (1 - k^2).$$

a) Festsetzung der Stossziffer k .

1) Verhalten sich die Körper beim Stosse vollkommen elastisch, so werden sie nach Beendigung des Stosses keine bleibende Formänderung zeigen. Die negative Arbeit der inneren Spannkkräfte bei der Zusammendrückung wird dann durch die positive Arbeit bei der Rückkehr in den spannungslosen Zustand vollständig aufgehoben. Da nun, wenn man beide Massen als eine Gruppe auffasst, N eine innere Kraft ist und äussere Kräfte nicht vorhanden sind, so muss das Arbeitsvermögen nach dem Stosse dieselbe Grösse haben wie vor dem Stosse. Es bedingt dies, dass in Gl. 11) $1 - k^2 = 0$, mithin $k = 1$ werde. Beim vollkommen elastischen Stoss ist also die Stossziffer $k = 1$.

2) Der Gegensatz hierzu ist, dass die Körper beim Stosse sich gar nicht elastisch, sondern vielmehr vollkommen bildsam oder plastisch verhalten, dass sie nach dem Eintreten der stärksten Formänderung gar kein Bestreben haben, zur ursprünglichen Form zurückzukehren. In diesem Falle kommt der zweite Abschnitt des Stosses gar nicht zu Stande; es ist sonach $k = 0$; die Geschwindigkeiten v und v_1 werden beide $= u$, d. h. die beiden Körper gehen nach dem Stosse mit gleicher Geschwindigkeit u weiter. In diesem Falle besteht die Arbeitsverrichtung nur in der negativen Zusammendrückungs-Arbeit, die den Verlust an Arbeitsvermögen hervorruft

$$12) \quad \mathfrak{A} = \frac{M M_1}{M + M_1} \frac{(c - c_1)^2}{2};$$

man erhält diesen Werth, indem man in Gl. 11 $k = 0$ setzt. Also: beim vollkommen unelastischen Stosse ist die Stossziffer $k = 0$.

3) Streng genommen giebt es weder einen vollkommen elastischen, noch vollkommen unelastischen Stoss; vielmehr sind die wirklichen Stösse unvollkommen elastisch, und es liegt k zwischen 0 und 1. Ob ein Stoss mehr oder weniger elastisch ausfällt, hängt nicht allein von der Beschaffenheit der Körper ab, sondern auch von der Heftigkeit des Stosses, von der Stosseschwindigkeit $c - c_1$. Die Stossziffer nähert sich um so mehr der Einheit, je elastischer die Körper sind (Elfenbein, Glas, Kautschuk) und je geringer die Heftigkeit des Stosses ist; sie nähert sich um so mehr der Null, je bildsamer die Körper sind (Wachs, Blei, ungebrannter Thon) und je heftiger der Stoss erfolgt.

Für einen gegebenen Fall kann man die Stossziffer k durch Versuche ermitteln. Auf einen festen Boden (Fig. 143) legt man eine Platte aus bestimmtem Stoffe, lässt eine Kugel M von ebenfalls bestimmtem Stoffe aus einer Höhe h herabfallen und beobachtet, bis zu welcher Höhe h_1 sie wieder emporspringt. Um auf diesen Fall die Gl. 8 und 9 anwenden zu können, muss man zunächst beachten, dass die in diese Gleichungen einzuführende Masse M_1 nicht gleich der Masse der Platte ist, dass vielmehr die Platte, weil sie auf dem unnachgiebigen Erdboden gelagert ist, für den Stoss gewissermassen mit der ganzen Erde zusammen eine Masse M_1 bildet, so dass $M_1 : M = \infty$ oder $M : M_1 = 0$ zu setzen ist. In allen Fällen, wo ein durch einen Stoss getroffener Körper in irgend einer Weise unbeweglich gemacht ist, kommt dieser Umstand dadurch zum Ausdrucke, dass man $M : M_1 = 0$ setzt, weil nur hierdurch in Gl. 9 die Geschwindigkeits-Änderung $v_1 - c_1$ zu Null gemacht wird.

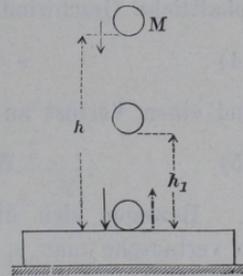
Da die Platte die Geschwindigkeit $c_1 = 0$ hatte, so wird (Gl. 8)

$$c - v = c(1 + k) = c + ck,$$

also $v = -ck$. Nun ist $c = \sqrt{2gh}$; das negative Zeichen von ck bedeutet, dass die Geschwindigkeit nach dem Stosse aufwärts gerichtet ist. Es wird v gemessen durch die Steighöhe

$$h_1 = \frac{v^2}{2g} = k^2 \frac{c^2}{2g} = k^2 h,$$

Fig. 143.



mithin ist

$$13) \quad k = \sqrt{\frac{h_1}{h}}.$$

Für vollkommen elastischen Stoss müsste $h_1 = h$ werden; für $k = 0$ wird $h_1 = 0$. Die Ergebnisse eines solchen Versuches können natürlich nur auf solche Fälle angewandt werden, wo dieselben Stoffe vorliegen wie beim Versuch und auch die Stossgeschwindigkeit $c - c_1$ etwa $= \sqrt{2gh}$ ist. Der Luftwiderstand ist für kleine c zu vernachlässigen.

Für Geschwindigkeiten, wie sie auf dem Billard vorkommen, ist bei Elfenbein $k = \frac{8}{9}$. Für geringe Geschwindigkeiten ist bei Glas $k = \frac{15}{16}$, für Stahl und Kork $\frac{5}{9}$. Für Holz ist bei etwa $0,4^m$ Fallhöhe $k = \frac{1}{2}$.

b) Unelastischer Stoss.

Für $k = 0$ haben beide Körper nach dem Stosse die gemeinschaftliche Geschwindigkeit

$$14) \quad v = v_1 = u = \frac{Mc + M_1 c_1}{M + M_1}$$

und einen Verlust an Arbeitsvermögen (Gl. 11, S. 130)

$$15) \quad \mathfrak{A} = \frac{MM_1}{M + M_1} \frac{(c - c_1)^2}{2}.$$

Bewegen sich die beiden Körper gegen einander (Fig. 144), so vertausche man c_1 mit $-c_1$; dann wird

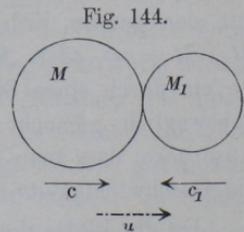
$$16) \quad v = v_1 = u = \frac{Mc - M_1 c_1}{M + M_1} \quad \text{und}$$

$$17) \quad \mathfrak{A} = \frac{MM_1}{M + M_1} \frac{(c + c_1)^2}{2}.$$

Sind noch beide Massen und deren Geschwindigkeiten einander gleich, so wird $v = v_1 = 0$ und

$$18) \quad \mathfrak{A} = \frac{M}{2} \frac{4c^2}{2} = 2 \frac{Mc^2}{2},$$

d. h. in diesem Falle geht das gesammte durch die Geschwindigkeiten der Körper bedingte Arbeitsvermögen für die äussere Bewegung verloren. Freilich verschwindet das Arbeitsvermögen nicht spurlos, vielmehr wird es zum grössten Theile, wie die Arbeitsverluste durch Reibung (Theil 1, S. 265) in Wärme, zum kleineren Theil in Schall-schwingungen umgewandelt.



c) Anwendung des Stosses; Einrammen von Pfählen.

Da die Geschwindigkeits-Änderungen beim Stosse sehr schnell erfolgen, so wird die entsprechende Kraft N häufig sehr gross. Die technische Verwendung des Stosses hat meist den Zweck, mit vergleichsweise einfachen Mitteln grosse Kräfte auszuüben, z. B. beim Eintreiben von Nägeln und Pfählen, beim Schmieden u. dgl. Man könnte einen Nagel auch durch Belastung ins Holz eindrücken; jedoch ist dies zu umständlich; die zum Eindrücken erforderliche Kraft lässt sich mittels eines Hammerschlages in einfachster Weise hervorbringen.

Beim Eintreiben von Nägeln und dem Einrammen von Pfählen sind die Verhältnisse so beschaffen, dass man den Stoss als annähernd unelastisch ($k = 0$) annehmen kann. Auch hat der getroffene Körper M_1 vor dem Stosse die Geschwindigkeit $c_1 = 0$; daher wird

$$19) \quad v = v_1 = u = \frac{Mc}{M + M_1},$$

der Verlust an (äusserem) Arbeitsvermögen

$$20) \quad \mathfrak{A} = \frac{MM_1}{M + M_1} \frac{c^2}{2} = \frac{Mc^2}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{M}{M_1}}.$$

Bei letzterer Schreibweise von \mathfrak{A} ist $\frac{1}{2}Mc^2$ das vor dem Stosse vorhandene Arbeitsvermögen; der zugehörige Faktor ist die Verhältniszahl, welche angiebt, der wievielte Theil des ursprünglichen Arbeitsvermögens verloren geht. Während der sehr kurzen Stossdauer erfolgt noch keine erhebliche Bewegung der Masse M_1 ; nach dem Stosse aber gehen die Massen M und M_1 mit der gemeinsamen Geschwindigkeit u weiter; der ihnen verbliebene Rest an äusserem Arbeitsvermögen

$$21) \quad \mathfrak{A}_1 = \frac{Mc^2}{2} - \mathfrak{A} = \frac{Mc^2}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{M_1}{M}}$$

wird nun dazu verwandt, den Widerstand W , der sich dem Eindringen des Nagels oder Pfahles entgensetzt, längs eines Weges s , der Eindringungstiefe, zu überwinden. Hiernach ist \mathfrak{A}_1 gewissermassen die Nutzarbeit des Stosses, während $\frac{1}{2}Mc^2$ durch Arbeitsaufwand erzeugt werden musste. Man kann daher bei Stössen, die

das Eintreiben eines Nagels oder Pfahles zum Zwecke haben, $\mathfrak{A}_1 : (1/2 M c^2)$ den Wirkungsgrad des Stosses

$$22) \quad \eta_1 = \frac{1}{1 + \frac{M_1}{M}}$$

nennen. Dieser wird um so grösser, je kleiner $M_1 : M$, oder je grösser $M : M_1$ ist. Es muss daher der treibende Körper möglichst schwer im Verhältnisse zum getriebenen Körper sein. Würde der Hammer nur ebenso schwer sein wie der einzutreibende Nagel, so wäre η nur 0,5, d. h. von der zum Hammerschlag aufgewandten Muskelarbeit würde nur die Hälfte nutzbar, während die andere Hälfte in schädlicher Weise unter Erzeugung von Wärme und Schall dem Nagelkopfe bleibende Formänderungen erteilte.

Beim Einrammen von Pfählen lässt man einen Rammklotz vom Gewichte $Q = Mg$ von einer Höhe h auf den Kopf des Pfahles vom Gewichte $Q_1 = M_1 g$ herabfallen (Fig. 145). Die für einen Schlag zum Heben des Rammklotzes aufgewandte Arbeit Qh setzt sich beim Fallen in äusseres Arbeitsvermögen $1/2 M c^2$ um; davon geht der Theil \mathfrak{A} für den Zweck verloren, während mit dem Reste (Gl. 21)

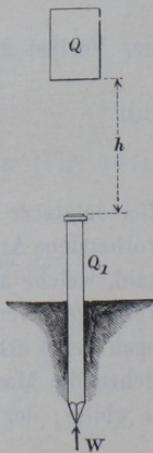
$$\mathfrak{A}_1 = Qh \cdot \frac{1}{1 + \frac{Q_1}{Q}}$$

beide Körper nach dem Stosse sich abwärts bewegen. Ist s die Wegeslänge dieser Weiterbewegung, so verrichtet die Schwere noch die Arbeit $(Q + Q_1)s$, während der Widerstand W des Erdreiches die Arbeit $-Ws$ leistet. Sonach ist

$$23) \quad Ws = (Q + Q_1)s + Qh \frac{1}{1 + \frac{Q_1}{Q}}$$

Hieraus kann man W berechnen, wenn s beobachtet wurde.

Fig. 145.



Beispiel: Ist $Q = 1200$ kg, $Q_1 = 600$ kg, $h = 80$ cm und $s = 0,5$ cm, so wird

$$\begin{aligned} W \cdot 0,5 &= 1800 \cdot 0,5 + \frac{1200 \cdot 80}{1,5} \\ &= 900 + 64000, \text{ daher} \\ W &= 129800 \text{ kg.} \end{aligned}$$

Das Glied $(Q + Q_1)s$ hat so unbedeutenden Einfluss, dass man genau genug

$$24) \quad Ws = Qh \frac{1}{1 + \frac{Q_1}{Q}} \text{ setzt, mit}$$

$$W = 128000 \text{ kg.}$$

Bis zu diesem Werthe dürfte die Belastung des Pfahles steigen, ohne dass der Pfahl einsänke. Da aber diese Rechnung ziemlich roh ist, erfahrungsmässig auch der Widerstand des Erdreiches mit der Zeit abnimmt, so nimmt man von dem nach Gl. 24 berechneten Werthe von W nur etwa $\frac{1}{13}$ als mit Sicherheit zulässige Belastung, d. h. rund 7000 kg.

Berücksichtigung der Elasticität des Pfahles. Nach den Gleichungen 23 und 24 würde jeder Schlag von noch so geringer Fallhöhe h eine gewisse, wenn auch kleine Eindringungstiefe s des Pfahles zur Folge haben, da erst für $h = 0$ auch $s = 0$ wird. Dies trifft aber in Wirklichkeit nicht zu. Bis zu einem gewissen Grenzwerte h_0 bringen Fallhöhen des Rammklotzes gar keine Eindringung des Pfahles hervor, sondern pressen nur den Pfahl elastisch zusammen, worauf er sich dann wieder ausdehnt. Soll sich nämlich der Pfahl vom Querschnitt F und der Länge l durch Einwirkung von oben unter Überwindung des Widerstandes W abwärts bewegen, so muss an dem unteren Ende des Pfahles eine Spannung $\sigma = W:F$ hervorgerufen sein, und man kann mit einiger Wahrscheinlichkeit annehmen, dass nahezu der ganze Pfahl auf diese Spannung gebracht werden muss, bevor er einsinken wird.

Fig. 146



Dazu ist aber nach S. 101 eine Arbeit $\frac{V}{2} \frac{\sigma^2}{E}$ erforderlich. Diese muss man von dem Arbeitsvermögen des Pfahles und des Rammklotzes abziehen, und erst der Rest ist $= Ws$ zu setzen. Mithin wird, weil $V = Fl$,

$$25) \quad Ws = \frac{Qh}{1 + \frac{Q_1}{Q}} - \frac{W^2 l}{2EF}.$$

Die unwirksame Fallhöhe h_0 erhält man, wenn man $s = 0$ und $h = h_0$ setzt, d. h.

$$26) \quad \frac{Q h_0}{1 + \frac{Q_1}{Q}} = \frac{W^2 l}{2 E F}.$$

Von der Höhe h wird also nur $h - h_0$ wirksam. Dieser Einfluss wird besonders bei langen Pfählen bedeutend.

Beispiel: Ist wiederum $Q = 1200$ kg, $Q_1 = 600$ kg, $h = 80$ cm, Pfahldicke $d = 30$ cm, $F = 700$ qcm, $l = 10$ m = 1000 cm, $E = 120000$ at, $s = 0,5$ cm, so wird

$$W \cdot 0,5 = \frac{1200 \cdot 80}{1,5} - \frac{W^2 1000}{2 \cdot 120000 \cdot 700}.$$

Dies giebt rund $W = 70000$ kg, wovon man etwa $\frac{1}{10}$, d. h. 7000 kg, als sicher zulässige Belastung des Pfahles nimmt. Für die unwirksame Fallhöhe wird $\frac{1200 \cdot h_0}{1,5} = \frac{70000^2 \cdot 1000}{2 \cdot 120000 \cdot 700}$ mit $h_0 =$ etwa 36 cm. Mit Berücksichtigung dieses Umstandes wird dann der Wirkungsgrad der Ramme (statt nach Gl. 22) nur sein:

$$\eta_1 = \frac{Q(h - h_0)}{Qh} \cdot \frac{1}{1 + \frac{Q_1}{Q}} = \frac{Q(h - h_0)}{(Q + Q_1)h} = \frac{80 - 36}{1,5 \cdot 80} = 0,37.$$

Durch Vergrößerung von h würde derselbe erhöht werden. — Grossen praktischen Werth haben vorstehende Formeln leider nicht.

d) Hämmer zum Schmieden oder Nieten.

Die für die äussere Bewegung verloren gehende Arbeit \mathfrak{A} , welche unter Erwärmung eine bleibende Formänderung erzeugt, war beim Eintreiben von Nägeln, Pfählen u. dgl. ein Verlust, ist aber beim Schmieden oder Nieten gerade das Nützliche. Hierfür ist nach Gl. 20 (S. 133) der Wirkungsgrad

$$27) \quad \eta = \frac{\mathfrak{A}}{\frac{1}{2} M c^2} = \frac{1}{1 + \frac{M}{M_1}}.$$

Dieser wird gross, wenn $M_1 : M$ gross wird, d. h. wenn die getroffene Masse gross ist im Verhältnisse zur stossenden Masse. Zu diesem Zwecke legt man das Schmiedestück auf einen schweren Amboss und unterstützt diesen durch einen noch schwereren Körper, die Chabotte, welche bei Dampfhammern tief in den Erdboden reicht. Amboss und Chabotte bilden dann in Bezug auf die Wirkung des Stosses mit dem Schmiedestück eine einzige Masse M_1 . Ist z. B. $M_1 = 10 M$, so wird $\eta = 1 : 1,1 = 0,91$, d. h. es werden 91 %

der aufgewandten Arbeit zur Formänderung verwandt, während 9% der Arbeit die Chabotte allmählich tiefer in den Erdboden eintreiben.

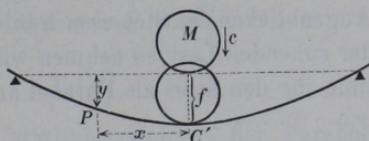
Beim Nieten muss das Niet durch einen möglichst schweren Vorhalt-Hammer von der Masse M_1 gegen Fortbewegung durch den Schlag des Niethammers thunlichst geschützt werden.

e) Biegung durch den Stoss eines Körpers.

Dieser Fall wurde auf S. 114 unter der Voraussetzung behandelt, dass die Masse des getroffenen, auf Biegung beanspruchten Körpers vernachlässigt werden könne. Mit Rücksicht auf diese Masse kann man die Aufgabe in folgender Weise behandeln. Die bisherigen Gleichungen für den Stoss setzten voraus, dass sämtliche Punkte des gestossenen Körpers sich im Augenblicke der stärksten Zusammenpressung mit übereinstimmender Geschwindigkeit u weiter bewegten. Wird aber ein an

beiden Enden unterstützter Stab von der Masse M_1 in seiner Mitte durch eine mit der Geschwindigkeit c dagegen stossende Masse M getroffen (Fig. 147), so wird der Stab sich biegen, und die

Fig. 147.



Geschwindigkeiten seiner einzelnen Punkte werden in jedem Augenblick unter einander verschieden sein; an den Auflagern bleiben die Geschwindigkeiten Null, während sie nach der Mitte hin zunehmen. Für das Verhältnis der Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte giebt das Verhältniss der Ordinaten der betreffenden Stellen einen Anhalt. Da die Wegeslängen y und f in gleichen Zeiten durchlaufen werden, so müssen die Geschwindigkeiten und ebenso auch die Beschleunigungen p_y und p_1 der Punkte P und C sich verhalten wie $y:f$, d. h. es ist

$$p_y = p_1 \frac{y}{f}.$$

Nach dem Satze von der Bewegung des Schwerpunktes (Theil I, S. 141) ist

$$\sum m p_y = \sum Y.$$

Darin bedeutet $\sum Y$ die Summe sämtlicher äusseren Kräfte der Richtung der p_y . In irgend einem Augenblicke während des Stosses

wirkt nun an dem getroffenen Stabe im Sinne der p_y die Kraft $N - 2A$ (Fig. 148), mithin wird

$$\sum m p_y = \frac{p_1}{f} \sum m y = N - 2A.$$

Darin ist m die Masse eines Längentheilchens, d. h. bei überall gleichem Querschnitte, den wir hier annehmen wollen,

$$m = \frac{\gamma}{g} F \cdot dx.$$

Daher entsteht

$$\frac{p_1}{f} \frac{\gamma}{g} F \int y dx = N - 2A.$$

Man könnte nun $y : f$ aus der Gleichung der Biegungslinie für den Fall einer ruhigen Belastung ableiten. Da es aber zweifelhaft ist, ob die verschiedenen Biegungslinien, die in den verschiedenen Augenblicken des Stosses sich bilden, dieselbe Form haben wie diejenige der ruhenden Last, so nehmen wir der Einfachheit wegen die Biegungslinie für den Stoss als Parabel an. Dann wird $\int y dx = \frac{2}{3} fl$, mithin

$$p_1 \frac{\gamma}{g} Fl \frac{2}{3} = N - 2A, \text{ oder,}$$

weil $\gamma Fl = M_1 g$ ist,

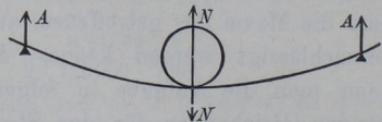
$$p_1 \cdot \frac{2}{3} M_1 = N - 2A.$$

Für den stossenden Körper ist $M_p = N$, mithin

$$p_1 \frac{2}{3} M_1 = M_p - 2A.$$

Es ist nun nicht etwa, wie im Gleichgewichtszustande $2A = N$; vielmehr ist $2A$ erheblich kleiner als N . Ist der Stoss sehr heftig, so pflanzt sich seine Wirkung nicht einmal bis zu den Stützpunkten fort; es bleibt (unter Vernachlässigung der Schwere) $A = 0$; der Druck N wirkt nur ausserordentlich kurze Zeit, wächst dabei zu einem verhältnismässig grossen Werth und bringt an dem Stab eine nur örtliche zerstörende Wirkung hervor, wie man z. B. mit einer Gewehrkuugel versuchen kann. In solchem Fall ist von der Ausbildung einer Biegungslinie keine Rede. Aber auch bei weniger

Fig. 148.



heftigem Stosse kann doch meist $2A$ gegenüber N vernachlässigt werden, so dass

$$p : p_1 = \frac{2}{3} M_1 : M \text{ ist.}$$

Vergleicht man diese Formel mit Gl. 1, S. 127, so findet man, dass an Stelle von M_1 nunmehr $\frac{2}{3} M$ getreten ist. Es folgt dann in gleicher Weise wie dort (mit $c_1 = \text{Null}$)

$$1) \quad u = \frac{M c}{M + \frac{2}{3} M_1}$$

für die Geschwindigkeit des Stosspunktes im Augenblicke der stärksten Formänderung, während der Punkt P eine Geschwindigkeit

$$u_y = u \frac{y}{f} \text{ hat.}$$

Nehmen wir den Stoss, wie es in solchen Fällen meistens geschieht, als unelastisch an, so ist das gesammte Arbeitsvermögen beider Körper nach dem Stosse

$$\frac{1}{2} M u^2 + \frac{1}{2} \sum m u_y^2,$$

wofür sich in ähnlicher Weise wie oben mit $m = \frac{M_1}{l} \cdot dx$

$$\frac{u^2}{2} \left(M + \frac{M_1}{f^2 l} \int y^2 dx \right)$$

ergiebt. Nun ist $\frac{1}{2} \int y dx \cdot y$ das statische Moment der Parabelfläche in Bezug auf die Sehne, $= \frac{2}{3} f l \cdot \frac{2}{5} f$ (Theil 1, S. 133), mithin $\int y^2 dx = \frac{8}{15} f^2 l$; also wird das Arbeitsvermögen

$$2) \quad \frac{u^2}{2} (M + \frac{8}{15} M_1)$$

oder, wenn man den obigen Werth für u (Gl. 1) einsetzt, und bedenkt, dass das Arbeitsvermögen in Biegungsarbeit (S. 111) umgewandelt wird,

$$3) \quad \frac{M c^2}{2} \frac{1 + \frac{8}{15} \frac{M_1}{M}}{\left(1 + \frac{2}{3} \frac{M_1}{M}\right)^2} = \frac{V \sigma^2 i^2}{6 E e^2}.$$

Die Umständlichkeit dieser Formel steht nicht im Verhältnisse zur Sicherheit ihrer Grundlagen. Innerhalb ziemlich weiter Grenzen ($M_1 : M = \frac{1}{10}$ bis 10) kann man dafür annäherungsweise einfacher schreiben

$$4) \quad \frac{M c^2}{2} \frac{1}{\left(1 + 0,8 \frac{M_1}{M}\right)} = \frac{V \sigma^2 i^2}{6 E e^2}.$$

Beispiel: Auf die Mitte einer Bohle von 1 m Spannweite, 24 cm Breite, 5 cm Stärke (Fig. 149) falle ein Gewicht von 50 kg. Wie gross darf die Fallhöhe h sein, damit die Bohle nicht über 170 at gespannt werde?

Wiegt ein 1 cbm Holz 600 kg, so wird das Gewicht der Bohle

$$Q_1 = 1 \cdot 0,24 \cdot 0,05 \cdot 600 = 7,2 \text{ kg.}$$

$$\text{Es wird } \frac{1}{2} M c^2 = Q h.$$

Die obigen Gleichungen gelten für einen Stoss in waagrechter Richtung, bei dem die Schwere keine Arbeit verrichtet. Beim lothrecht abwärts erfolgenden Stoss aber verrichtet die Schwere eine Arbeit, während die Bohle sich um f durchbiegt. Das Gewicht Q leistet die Arbeit Qf , das Gewicht Q_1 der Bohle aber $\frac{2}{3} Qf$, weil ein beliebiges Theilchen der Bohle nur um y sinkt (vergl. S. 137, Fig. 147). Nun beträgt die Durchbiegung der Bohle bei $\sigma = 170 \text{ at}$ nach S. 46, Gl. 14:

$$f = \frac{1}{12} \frac{170}{120000} \frac{100^2}{2,5} = 0,47 \text{ cm,}$$

daher wird nach Gl. 4 (mit $i^2 : e^2 = \frac{1}{3}$, vgl. S. 112)

$$\frac{50 h}{1 + 0,8 \cdot \frac{7,2}{50}} + 0,47 \left(50 + \frac{2}{3} 7,2 \right) = \frac{12000}{18} \frac{170^2}{120000}$$

oder $h = 3 \text{ cm.}$

Im Ruhezustande entspricht der Belastung mit 50 kg nur eine Spannung

$$\sigma = \frac{50 \cdot 100 \cdot 6}{4 \cdot 24 \cdot 5^2} = 12,5 \text{ at,}$$

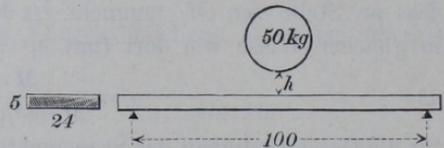
und schon durch einen Fall der Last von 3 cm Höhe steigt die Spannung auf das 13,6 fache. Hiernach ist es begreiflich, dass man die in Gleichgewichtsberechnungen einzusetzenden Spannungen oft nur sehr gering annehmen darf, wenn Stösse der Last zu erwarten sind.

f) Vollkommen elastischer Stoss.

Je kleiner die Stosseschwindigkeit $c - c_1$ und je elastischer die Körper sind, um so mehr wird sich k dem Werth 1 nähern. Für $k = 1$ wird nach Gl 8), S. 129

$$1) \quad c - v = 2 \frac{c - c_1}{1 + \frac{M}{M_1}}; \quad v_1 - c_1 = 2 \frac{c - c_1}{1 + \frac{M_1}{M}}.$$

Fig. 149.



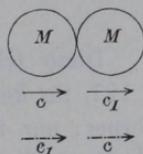
Sind die Massen einander gleich, wie es bei Billardkugeln annähernd zutrifft (Fig. 150), so wird

$$c - v = c - c_1, \quad \text{d. h. } v = c_1.$$

$$v_1 - c_1 = c - c_1, \quad \text{d. h. } v_1 = c;$$

d. h. es vertauschen die Massen ihre Geschwindigkeiten. Sind die Kugeln im Aussehen nicht verschieden, so sieht man die Wirkung des Stosses kaum. Denn mit der Geschwindigkeit c , die vorher die eine Kugel hatte, bewegt sich auch nach dem Stoss eine Kugel weiter, ebenso mit der Geschwindigkeit c_1 die andere, gerade wie wenn sich die Kugeln durchdrungen hätten.

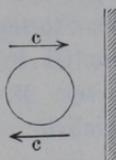
Fig. 150.



Dieser Fall findet auch Anwendung auf Eisenbahnwagen, wenn dieselben beim Verschieben mit geringer Stosseschwindigkeit auf einander treffen; denn bei geringer Heftigkeit des Stosses verhalten sich die Bufferfedern ziemlich elastisch. Bei ungleichen Massen sind die Gl. 1) anzuwenden.

Stösst ein Körper gegen eine ruhende und unbewegliche elastische Wand, so muss (wie S. 131) $M_1 : M = \infty$ gesetzt werden. Dann wird

Fig. 151.



$$c - v = \frac{2c}{1 + 0}, \quad \text{d. h. } v = -c.$$

Der Körper wird also mit der gleichen Geschwindigkeit von der Wand zurückgeworfen, mit der er dieselbe traf.

2. Stoss sich drehender Körper.

Zwei Körper drehen sich um feste Parallelachsen A u. A_1 und treffen derartig zusammen, dass zwischen ihnen ein gegenseitiger Druck N auftritt, der rechtwinklig zu der Ebene beider Drehachsen steht und diese Ebene in P schneidet. Dann ist P der Stosspunkt; er sei von A u. A_1 um a bzw. a_1 entfernt. Die Umfangsgeschwindigkeiten beider Körper am Stosspunkte mögen c bzw. c_1 betragen. Diese Geschwindigkeiten sind der Unterscheidung wegen auf dem Drehungskreise angedeutet, ebenso die Geschwindigkeiten v und v_1 nach dem Stoss (an der rechten Seite der Figur). Der Druck N

ertheilt der stossenden Masse eine im Stosspunkte gemessene Umfangs-Verzögerung $p = \frac{N}{\mu}$ und der gestossenen Masse an derselben Stelle eine Umfangs-Beschleunigung $p_1 = \frac{N}{\mu_1}$, wenn μ und μ_1 die auf den Stosspunkt bezogenen Massen der beiden Körper sind (Theil 1, S. 268). Hiernach ist

$$1) \quad p : p_1 = \mu_1 : \mu.$$

Diese Gleichung entspricht der Gl. 1, S. 127, für den geraden centralen Stoss freier Körper; nur treten an die Stelle der wahren Massen M_1 und M hier die auf P bezogenen Massen μ_1 und μ , welche den Bedingungen $J = \mu a^2$, $J_1 = \mu_1 a_1^2$ genügen, wenn J und J_1 die Trägheitsmomente der Körper in Bezug auf die Drehachsen sind. Hiernach ergeben sich auch für die Geschwindigkeits-Änderungen während des Stosses die Gleichungen in derselben Weise wie Gl. 8 und 9, S. 129, wenn man auch in diesen M und M_1 mit μ und μ_1 vertauscht; nämlich

$$2) \quad c - v = \frac{c - c_1}{1 + \frac{\mu}{\mu_1}} (1 + k)$$

$$3) \quad v_1 - c_1 = \frac{c - c_1}{1 + \frac{\mu_1}{\mu}} (1 + k).$$

Ist der stossende Körper aber ein freier Körper, der sich in der Richtung der Stosslinie fortschreitend bewegt und dessen Schwerpunkt auf der Stosslinie liegt (Fig. 153), so gelten obige Gleichungen mit der Abänderung, dass für μ wieder die wahre Masse M eintritt.

Ballistisches Pendel.

Diese Vorrichtung hat Ähnlichkeit mit Fig. 154 und ist in früherer Zeit benutzt worden, um aus der Bewegung des Pendels nach dem Stosse die Geschwindigkeit c des dagegen abgefeuerten

Fig. 152.

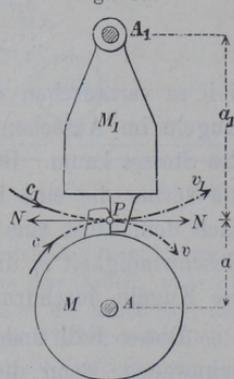
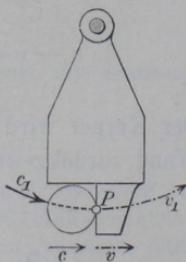
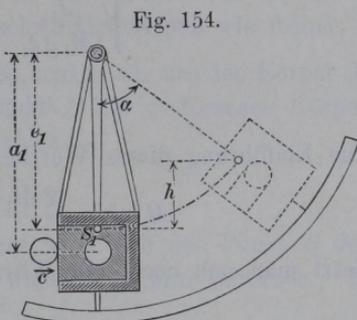


Fig. 153.



Geschosses M zu berechnen. Diese Einrichtung ist ein so vorzügliches Beispiel zu den hier behandelten Vorgängen, dass sie hier besprochen werden soll, wiewohl sie jetzt in der Anwendung durch vollkommenere Vorrichtungen ersetzt ist.

Das Pendel hat an der Stelle, gegen die das Geschoss abgefeuert wird, einen vorn offenen, eisernen Kasten, der mit trockenem Thon, weichem Holz u. dgl. gefüllt ist, so dass das Geschoss darin stecken bleibt und der Stoss als un-



elastisch ($k=0$) angesehen werden kann. Vor dem Stoss ist das Pendel in Ruhe. Daher wird nach Gl. 2 und 3, S. 142 oder nach Gl. 5, S. 128

$$4) \quad v = v_1 = u = \frac{Mc}{M + \mu_1}.$$

Bei der Drehbewegung des Pendels nach dem Stosse möge dasselbe einen Winkel α beschreiben, bis es seine Geschwindigkeit verloren hat und zurückschwingt. Ist nun sein Schwerpunkt S_1 um e_1 von der Drehachse entfernt, so hebt sich dieser bei der Drehung um $h = e_1 (1 - \cos \alpha)$. Dann ist nach dem Satze der Arbeit

$$5) \quad (M + \mu_1) \frac{v_1^2}{2} = (Mg a_1 + M_1 g e_1) (1 - \cos \alpha);$$

die linke Seite ist das Arbeitsvermögen von Pendel und Geschoss nach dem Stosse, die rechte Seite der absolute Werth der Arbeit der Schwerkraft beim Ausschlage des Pendels.

Bei der Ausführung musste das Pendel stets sehr schwer sein im Verhältnisse zum Geschosse, so dass M gegen M_1 und μ_1 zu vernachlässigen ist. Zur Vereinfachung der Formeln empfiehlt es sich, schon jetzt diese Vernachlässigung vorzunehmen. Dann wird aus Gl. 4 und 5:

$$6) \quad M^2 c^2 = 2 M_1 \mu_1 g e_1 (1 - \cos \alpha).$$

Die auf den Abstand a_1 bezogene Masse μ_1 kann nun ebenfalls durch einen Versuch ermittelt werden, indem man das Pendel

schwingen lässt und seine Schwingungsdauer t beobachtet. Für diese gilt (nach Theil 1, S. 279)

$$t = \pi \sqrt{\frac{J_1}{M_1 g e_1}} = \pi \sqrt{\frac{\mu_1 a_1^2}{M_1 g e_1}}, \text{ so dass}$$

$$\mu_1 = \frac{M_1 g e_1 t^2}{a_1^2 \pi^2}.$$

Die Einführung dieses Werthes in Gl. 6 liefert

$$M^2 c^2 = \frac{2 M_1^2 g^2 e_1^2 t^2 (1 - \cos \alpha)}{a_1^2 \pi^2}.$$

Setzt man nun noch, um Wurzelausdrücke zu vermeiden,

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \text{ so wird}$$

$$7) \quad c = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \frac{g t}{\pi} \frac{M_1}{M} \frac{e_1}{a_1}.$$

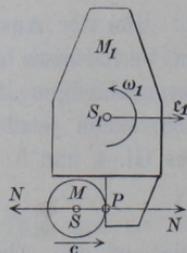
Beispiel: Es sei $M_1 = 500 M$, $t = 1,6$ sek.; $M_1 e_1$ kann nach Theil 1, S. 283, Fig. 352 gemessen werden; es sei $e_1 = 2,2$ m. Der untere Zeiger des Pendels bewegt sich in einem geschlitzten Gradbogen, der vor dem Versuche mit Talg ausgestrichen wurde, so dass man, wenn das Pendel wieder zur Ruhe gekommen ist, α bequem ablesen kann; es sei $\alpha = 18^\circ$. Die Stelle, wo das Geschoss eingedrungen, sei um $a_1 = 2,7$ m von der Drehachse entfernt. Dann wird

$$c = 2 \sin 9^\circ \cdot 9,81 \cdot \frac{1,6}{\pi} \cdot 500 \cdot \frac{2,2}{2,7} = 637 \text{ m}.$$

3. Excentrischer Stoss.

Die Masse M stosse derartig gegen die Masse M_1 , dass der Stossdruck N wohl durch den Schwerpunkt S von M , nicht aber durch den Schwerpunkt S_1 von M_1 gehe, sondern von diesem einen Abstand a_1 habe (Fig. 155). Dann wird M_1 durch N eine Winkelbeschleunigung erfahren; aus diesem Grunde wollen wir annehmen, dass M_1 vor dem Stosse schon eine Drehbewegung habe. Eine Achse durch S_1 , rechtwinklig zur Bildebene, sei für M_1 eine freie Achse; um diese drehe sich der Körper vor dem Stosse mit einer Winkelgeschwindigkeit ω_1 . Die Bildebene sei eine Ebene E , welche durch den Schwerpunkt S_1 rechtwinklig zu jener Achse S_1 gelegt ist; in

Fig. 155.



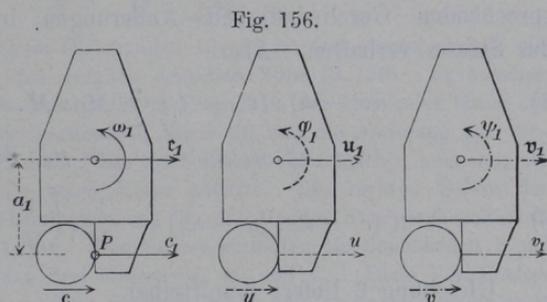
ihr befinde sich der Stosspunkt P und auch der Stossdruck N . Der Körper M_1 habe vor dem Stosse noch eine Verschiebungsgeschwindigkeit c_1 , parallel mit N . Für den Körper M sei der Stoss gerade und central; seine Geschwindigkeit sei, wie früher, c .

Der leichteren Vorstellung wegen denken wir uns den Körper M_1 starr und nur M elastisch. Der Punkt P des gestossenen Körpers hat vor dem Stosse die Geschwindigkeit

$$c_1 = c_1 + a_1 \omega_1.$$

Im ersten Abschnitte des Stosses wird sich der Punkt S dem Punkte P nähern, im zweiten sich wieder von ihm entfernen. Im Augenblicke der

stärksten Zusammenpressung haben P und S gleiche Geschwindigkeit u . In diesem Zeitpunkte habe M_1 die Verschiebungsgeschwindigkeit u_1 , die Winkel-



geschwindigkeit φ_1 (Fig. 156), so dass $u = u_1 + a_1 \varphi_1$ sein muss. Nach dem Stosse habe M die Geschwindigkeit v , M_1 die Verschiebungsgeschwindigkeit v_1 , die Winkelgeschwindigkeit ψ_1 , die Geschwindigkeit am Stosspunkte $v_1 = v_1 + a_1 \psi_1$.

In irgend einem Augenblicke des Stosses hat M die Verzögerung

$$1) \quad p = \frac{N}{M},$$

der Schwerpunkt S_1 die Beschleunigung

$$2) \quad \wp_1 = \frac{N}{M_1},$$

M_1 (nach Theil 1, S. 276 mit $\mathfrak{M} = Na_1$) die Winkelbeschleunigung

$$3) \quad \varepsilon_1 = \frac{N}{\mu_1 a_1}$$

(wenn $J_1 = \mu_1 a_1^2$ das Trägheitsmoment der Masse M_1 in Bezug

auf die Schwerpunktsachse S_1 ist), der Punkt P der Masse M_1 , mithin die Gesamtbeschleunigung

$$p_1 = p_1 + a_1 \varepsilon_1 = N \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{\mu_1} \right).$$

Hieraus ergeben sich die Verhältnisse

$$p : p_1 = M_1 : M,$$

$$p : a_1 \varepsilon_1 = \mu_1 : M,$$

$$p : p_1 = \frac{1}{M} : \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{\mu_1} \right).$$

Ebenso wie diese Beschleunigungen müssen sich auch die entsprechenden Geschwindigkeits-Änderungen im ersten Abschnitte des Stosses verhalten. Also

$$4) \quad (c - u) : (u_1 - c_1) = M_1 : M,$$

$$5) \quad (c - u) : a_1 (\varphi_1 - \omega_1) = \mu_1 : M,$$

$$6) \quad (c - u) : (u - c_1) = \frac{1}{M} : \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{\mu_1} \right).$$

Gleichung 6 liefert unmittelbar

$$u = \frac{c \left(\frac{M}{M_1} + \frac{M}{\mu_1} \right) + c_1}{1 + \frac{M}{M_1} + \frac{M}{\mu_1}} \quad \text{und darnach wird}$$

$$7) \quad c - u = \frac{c - c_1}{1 + \frac{M}{M_1} + \frac{M}{\mu_1}}.$$

In Verbindung mit Gl. 4 entsteht dann

$$8) \quad u_1 - c_1 = \frac{c - c_1}{1 + \frac{M}{M_1} + \frac{M}{\mu_1}},$$

während Gl. 5 und 7 ergeben

$$9) \quad a_1 (\varphi_1 - \omega_1) = \frac{c - c_1}{1 + \frac{\mu_1}{M} + \frac{\mu_1}{M_1}}.$$

Die Geschwindigkeits-Änderungen innerhalb der ganzen Dauer des Stosses erhält man nun, indem man die des ersten Abschnittes noch mit $1 + k$ multiplicirt. Daher

$$10) \quad c - v = \frac{c - c_1}{1 + \frac{M}{M_1} + \frac{M}{\mu_1}} (1 + k),$$

$$11) \quad v_1 - c_1 = \frac{c - c_1}{1 + \frac{M_1}{M} + \frac{M_1}{\mu_1}} (1 + k),$$

$$12) \quad a_1 (\psi_1 - \omega_1) = \frac{c - c_1}{1 + \frac{\mu_1}{M} + \frac{\mu_1}{M_1}} (1 + k).$$

Das Bildungsgesetz dieser Gleichungen 10–12 ist fast ebenso einfach wie das der Gleichungen für den geraden centralen Stoss (S. 129). Es kommen hier drei Geschwindigkeits-Änderungen in Frage: die der stossenden Masse M , die des Schwerpunktes der gestossenen Masse M_1 und die Änderung der Umfangsgeschwindigkeit der Drehung um die Schwerpunktsachse S_1 , gemessen am Stosspunkte, wobei μ_1 als träge Masse auftritt. Die rechten Seiten der Gleichungen enthalten übereinstimmend im Zähler die Stossgeschwindigkeit $c - c_1$ und den Faktor $1 + k$. Die Nenner enthalten als Summanden 1 und zwei Verhältnisse unter den drei Massen M , M_1 und μ_1 . Diese Verhältnisse sind derartig geordnet, dass stets diejenige Masse, um deren Geschwindigkeit sich's gerade handelt, in diesem Verhältnisse den Zähler bildet, während die beiden andern Massen die Nenner darstellen. Wenn man in diesem Sinne die entstehenden Gleichungen überblickt, kann man sie leicht aus dem Kopfe anschreiben.

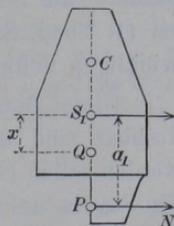
Mittelpunkt des Stosses.

Ein beliebiger, zwischen S_1 und P im Abstand x von S_1 befindlicher Punkt Q der Masse M_1 erfährt eine gesammte Tangential-Beschleunigung p_x , welche sich aus der Verschiebungs-Beschleunigung v_1 und der Drehungs-Beschleunigung $x \varepsilon_1$ zusammensetzt; es ist $p_x = v_1 + x \varepsilon_1$, oder nach Gl. 2 und 3, S. 145:

$$p_x = N \left(\frac{1}{M_1} + \frac{x}{\mu_1 a_1} \right).$$

Zwischen P und S_1 ist $p_x > v_1$, in S_1 ist $p_x = v_1$, während die Punkte der über S_1 hinaus verlängerten Geraden PS_1 einem negativen x entsprechen, so dass

Fig. 157.



$p_x < p_1$ wird. Für einen Punkt C heben sich die Beschleunigungen p_1 und $CS_1 \cdot \varepsilon_1$ gerade auf, wenn nämlich

$$\frac{N}{M_1} = \frac{N CS_1}{\mu_1 a_1} \quad \text{oder}$$

$$CS_1 = \frac{\mu_1 a_1}{M_1}, \quad \text{mithin}$$

$$CP = \frac{\mu_1 a_1}{M_1} + a_1 = \frac{\mu_1 a_1^2 + M_1 a_1^2}{M_1 a_1} \quad \text{ist.}$$

Da nun $\mu_1 a_1^2$ das Trägheitsmoment für die Schwerpunkts-Achse, so ist der Zähler der letzten Gleichung das Trägheitsmoment in Bezug auf eine Achse P , rechtwinklig zur Bildebene, der Nenner das statische Moment für dieselbe Achse. Somit ist (Theil 1, S. 279)

$$13) \quad CP = l = \frac{J_P}{M_1 a_1}$$

die Schwingungslänge für den an der Achse P als Pendel aufgehängten Körper oder wegen der Vertauschbarkeit von Drehachse und Schwingungsachse auch für ein bei C aufgehängtes Pendel mit der Schwingungsachse P . Sämmtliche Punkte der rechtwinklig zur Bildebene durch C gelegten Geraden erfahren übereinstimmend die Beschleunigung Null. War die Masse M_1 nun vor dem Stoss in Ruhe, so werden die Punkte der Geraden C auch durch den Stoss nicht aus der Ruhe gebracht werden, während alle anderen Punkte in Beschleunigung gerathen. Befestigt man daher den Körper an der Achse C , so wird diese durch einen Stoss bei P keine Einwirkung erfahren. Aus diesem Grunde nennt man dann P den Mittelpunkt des Stosses in Bezug auf die Achse C . Dabei wurde vorausgesetzt, dass die rechtwinklig zur Bildebene, d. h. parallel mit C liegende Schwerpunktsachse S_1 eine freie Achse sei (1. Theil, S. 289) und dass P in der zu dieser Achse rechtwinkligen Schwerpunkts-Ebene liege.

Diese Beziehung ist wichtig für Körper, welche um Achsen drehbar sind und durch den Stoss von Daumen oder dgl. bewegt werden sollen (Aufwerfhämmer); greift der Daumen im Mittelpunkte des Stosses an, so wird die Achse durch den Stoss nicht beeinflusst. Auch bei Werkzeugen, die durch einen Schlag getroffen, oder mit denen Schläge ausgeübt werden, ist es vortheilhaft, die führende

Hand bei C angreifen zu lassen, wenn bei P der Schlag erfolgt, damit die Hand keine Erschütterung (Prellung) empfinde.

Beispiel: Der Körper sei ein gerader Stab; zu dem im unteren Viertelpunkte gegebenen Stosspunkte P soll die unempfindliche Achse C gesucht werden. Es wird nach Gl. 13

$$l = \frac{J_P}{M_1 a_1} = \frac{M_1^{1/12} h^2 + M_1^{1/16} h^2}{M_1 \cdot^{1/4} h} = \frac{7}{12} h,$$

d. h. C liegt um $(\frac{7}{12} - \frac{1}{4}) h = \frac{1}{3} h$ über C . Fasst man die Stange bei C mit der Hand, so wird ein bei P geführter Stoss der Hand nicht fühlbar werden. Das Gleiche gilt, wenn man den Stab bei P erfasst und der Schlag bei C erfolgt.

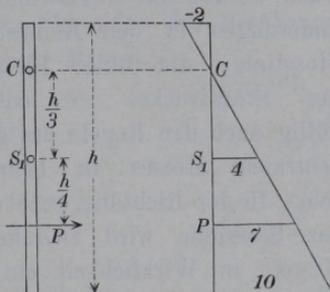
Es sollen nun auch die Geschwindigkeits-Änderungen berechnet werden, welche entstehen, wenn gegen die ruhende Stange bei P eine kugelförmige Masse M mit der Geschwindigkeit c stösst. Der Stoss werde als unelastisch und die Masse M gleich der Masse M_1 vorausgesetzt. Dann ist

$$\begin{aligned} k &= 0, & \omega_1 &= 0, \\ c_1 &= 0, & M_1 &= M, \\ c_1 &= 0, & \mu_1 &= \frac{4}{3} M_1 \end{aligned}$$

und nach den Gl. 10–12 (S. 147)

$$\begin{aligned} c - v &= \frac{c}{1 + 1 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{11} c; & v &= \frac{7}{11} c. \\ v_1 &= \frac{c}{1 + 1 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{11} c, \\ a_1 \phi_1 &= \frac{c}{1 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3}} = \frac{3}{11} c. \end{aligned}$$

Fig. 158.



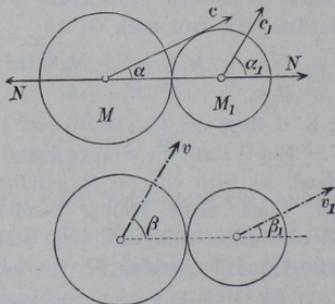
Da die Umfangsgeschwindigkeiten der Drehung an den verschiedenen Stellen mit dem Abstände x vom Schwerpunkte verhältnisgleich, so ist die Darstellung der Gesamt-Geschwindigkeiten eine Gerade. Trägt man in P und S_1 die Geschwindigkeiten v und v_1 durch Ordinaten 7 und 4 auf (Fig. 158), so ergibt sich eine Gerade, die die Stange in dem Unempfindlichkeitspunkte C schneidet.

4. Schiefer centraler Stoss.

Die Schwerpunkte der beiden Körper mögen im Augenblicke des Zusammentreffens Geschwindigkeiten c und c_1 haben, die mit

der durch beide Schwerpunkte gehenden Stosslinie die Winkel α und α_1 bilden (Fig. 159). Man kann die Geschwindigkeiten zerlegen in $c \cos \alpha$ und $c_1 \cos \alpha_1$ nach der Richtung der Stosslinie und $c \sin \alpha$ bzw. $c_1 \sin \alpha_1$ rechtwinklig dazu. Dann werden die Geschwindigkeitsänderungen in der Richtung der Stosslinie, die unter Einwirkung des Stossdruckes N entstehen, völlig nach den Regeln des geraden centralen Stosses zu beurtheilen sein. In der Richtung, rechtwinklig zur Stosslinie wird zwischen den

Fig. 159.



Kugeln in Wirklichkeit ein Reibungswiderstand auftreten, dessen Berücksichtigung die Aufgabe ziemlich verwickelt macht. Wir wollen auf diesen jedoch hier keine Rücksicht nehmen, die Körper als völlig glatt betrachten. Unter dieser Voraussetzung tritt dann rechtwinklig zur Stosslinie keine Kraft auf, so dass die Seitengeschwindigkeiten $c \sin \alpha$ und $c_1 \sin \alpha_1$ unverändert verbleiben. Nennt man v und v_1 die Geschwindigkeiten nach dem Stosse mit den Neigungswinkeln β und β_1 gegen die Stosslinie, so wird nunmehr nach Gl. 8 und 9, S. 129

$$1) \quad c \cos \alpha - v \cos \beta = \frac{c \cos \alpha - c_1 \cos \alpha_1}{1 + \frac{M}{M_1}} (1 + k),$$

$$2) \quad v_1 \cos \beta_1 - c_1 \cos \alpha_1 = \frac{c \cos \alpha - c_1 \cos \alpha_1}{1 + \frac{M_1}{M}} (1 + k).$$

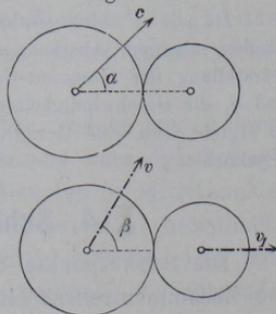
$$3) \quad v \sin \beta = c \sin \alpha,$$

$$4) \quad v_1 \sin \beta_1 = c_1 \sin \alpha_1.$$

Stoss gegen eine ruhende Kugel. War M_1 zu Anfang in Ruhe, d. h. $c_1 = 0$, so wird

$$c \cos \alpha - v \cos \beta = \frac{c \cos \alpha}{1 + \frac{M}{M_1}} (1 + k),$$

Fig. 160.



$$v_1 \cos \beta_1 = \frac{c \cos \alpha}{1 + \frac{M_1}{M}} (1 + k),$$

$$v \sin \beta = c \sin \alpha,$$

$$v_1 \sin \beta_1 = 0, \quad \beta_1 = 0,$$

$v_1 = v_1 \cos \beta_1$. Die getroffene Kugel bewegt sich nach dem Stoss in der Richtung der gemeinschaftlichen Normalen der Berührungsstelle. Sind die Kugeln von gleichen Massen, so wird

$$5) \quad v \cos \beta = 1/2 c \cos \alpha (1 - k),$$

$$6) \quad v \sin \beta = c \sin \alpha, \quad \text{daher}$$

$$7) \quad \text{tg } \beta = \frac{2 \text{tg } \alpha}{1 - k},$$

$$8) \quad v_1 = 1/2 c \cos \alpha (1 + k).$$

Bei unelastischem Stosse wird $k = 0$, daher $\text{tg } \beta = 2 \text{tg } \alpha$. Ist (Fig. 161) $AB = c$, $\sphericalangle BAC = \alpha$, $AC = c \cos \alpha$, so wird, wenn man $AD = DC$ macht, $DB = v$, $DC = v_1$ nach Richtung und Grösse.

Bei elastischem Stosse aber wird $k = 1$, daher $v \cos \beta = 0$, $\beta = 90^\circ$, $v = c \sin \alpha$, $v_1 = c \cos \alpha$, $v = CB$, $v_1 = AC$ (Fig. 162) nach Grösse und Richtung. Beide Kugeln bewegen sich also nach dem Stosse unter rechtem Winkel aus einander.

Stoss einer Kugel gegen eine feste Wand ($c_1 = 0$, $M_1 = \infty$). Es wird

$$c \cos \alpha - v \cos \beta \\ = c \cos \alpha (1 + k),$$

$$\text{d. h. } v \cos \beta = -c \cos \alpha \cdot k,$$

$$v \sin \beta = c \sin \alpha,$$

$$\text{mithin } \text{tg}(-\beta) = \frac{\text{tg } \alpha}{k}.$$

Für unelastischen Stoss ergibt sich (mit $k = 0$)

$$v \cos \beta = 0, \quad v = c \sin \alpha,$$

$-\beta = 90^\circ$, d. h. die Seitengeschwindigkeit, rechtwinklich zur Wand, geht verloren, es bleibt nur die Seitengeschwindigkeit in der Richtung der Wand erhalten (Fig. 163).

Fig. 161.

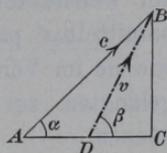


Fig. 162.

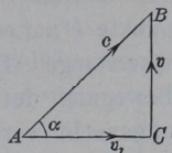


Fig. 163.

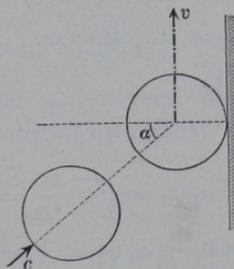
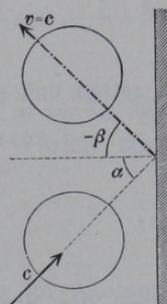


Fig. 164.

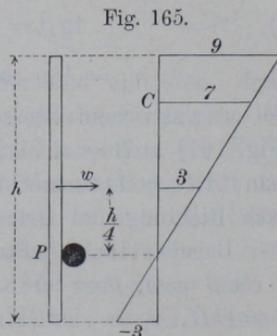


Für elastischen Stoss wird (mit $k = 1$): $v \cos \beta - c \cos \alpha$, $v = c$,
 $-\beta = \alpha$, d. h. die Kugel wird von der festen Wand ohne Verlust
 an Geschwindigkeit so zurückgeworfen wie ein Lichtstrahl von einem
 Spiegel (Fig. 164); Ausfall- und Einfallwinkel sind einander gleich.

5. Einige besondere Fälle des Stosses.

Es mögen hier noch einige Fälle des Stosses betrachtet werden,
 auf welche die entwickelten Formeln scheinbar nicht, oder nicht
 unmittelbar passen, die aber doch durch ähnliche Betrachtungen,
 wie sie im Vorstehenden zur Anwendung
 gelangten, zur Lösung geführt werden
 können.

1. Ein fortschreitender Stab
 stösst gegen ein festes Hindernis.
 Ein Stab von der Länge h bewege sich
 mit der überall gleichen Geschwindig-
 keit w und treffe im unteren Viertel-
 punkte P auf eine unwandelbar befestigte
 Querstange (Fig. 165). Es soll die
 Bewegung des Stabes nach dem Stoss
 untersucht werden.



Die Querstange ist wegen ihrer Unbeweglichkeit als eine un-
 endlich grosse Masse aufzufassen. Die Gleichungen 11 und 12,
 S. 147, sind auf diesen Fall anwendbar; man hat darin

$$c = 0, \quad c_1 = w, \quad c_1 = w,$$

$$\omega_1 = 0, \quad M = \infty, \quad \mu_1 = 4/3 M_1$$

zu setzen und erhält

$$v_1 - w = \frac{-w}{1 + 3/4}, \quad v_1 = 3/7 w;$$

$$a_1 \psi_1 = \frac{-w}{1 + 4/3} = -3/7 w;$$

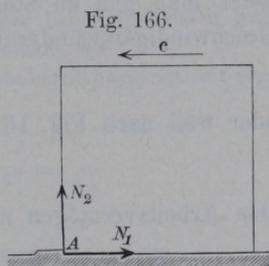
$$v_1 = v_1 + a_1 \psi_1 = 3/7 w - 3/7 w = 0.$$

Neben der Stange sind die Geschwindigkeiten als Vielfache von
 $1/7 w$ dargestellt.

Man kann diese Aufgabe auch lösen, indem man die Bewegung
 des Stabes auffasst als scheinbare Ruhe in Bezug auf einen mit

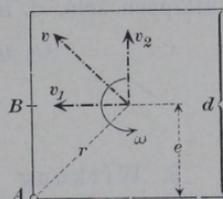
der Geschwindigkeit w fortschreitenden Raum. Die Masse $M = \infty$ bewegt sich dann mit der Geschwindigkeit w gegen den ruhenden Stab. Mit den hiernach erhaltenen Geschwindigkeiten hat man dann die Geschwindigkeit w des Raumes in geeigneter Weise wieder zu verbinden.

2. Ein fortschreitend gleitender Würfel stösst mit seiner vorderen unteren Kante gegen ein Hindernis (Fig. 166). Der Körper muss dann eine Drehung um die Kante A ausführen; diese betrachten wir aber als das Ergebnis einer Verschiebung des Schwerpunktes mit der Geschwindigkeit v und einer Drehung um die zur Bildebene rechtwinklige Schwerpunktsachse S mit der Winkelgeschwindigkeit ω (Fig. 167), wodurch mit $r\omega = v$ der Punkt A die Geschwindigkeit Null bekommt. Wir zerlegen v in die Seitengeschwindigkeiten v_1 und v_2 , die hier offenbar gleich sein müssen.



Da nun die Geschwindigkeit v_2 durch den Stoss neu entsteht, so muss neben der Kraft N_1 auch noch eine Kraft N_2 auftreten (Fig. 166). Das Gewicht des Würfels wird gegenüber den Kräften N_1 und N_2 vernachlässigt. Die Würfelseite werde $d = 2e$ genannt. Das Trägheitsmoment des Würfels in Bezug auf die Achse S findet man nach Theil 1, S. 271 leicht zu

Fig. 167.



also ist die auf den Abstand e bezogene Masse $\mu = \frac{2}{3} M$. Während des Stosses erfährt der Schwerpunkt des Würfels eine Beschleunigung

$$p_1 = \frac{N_1}{M} \quad \text{und} \quad p_2 = \frac{N_2}{M}$$

im Sinne dieser Kräfte, eine Umfangsbeschleunigung im Abstand e von S in der Grösse

$$e\varepsilon = \frac{N_1 - N_2}{\mu} = \frac{3}{2} \frac{N_1 - N_2}{M}.$$

Diese Beschleunigungen stehen in den Verhältnissen

$$p_1 : p_2 = N_1 : N_2,$$

$$p_2 : e\varepsilon = 2N_2 : 3(N_1 - N_2).$$

Da der Punkt B aber in lothrechter Richtung die Beschleunigung $p_2 - e\varepsilon$ erfährt, welche (annähernd) $= 0$ sein muss, so ergibt sich $2N_2 = 3(N_1 - N_2)$, d. h. $N_2 = \frac{3}{5}N_1$. Hiernach wird

$$p_1 : p_2 = 5 : 3, \quad p_2 = e\varepsilon.$$

Setzt man nun an Stelle der Beschleunigungen die entsprechenden Geschwindigkeitsänderungen, so erhält man

$$c - v_1 : v_2 = 5 : 3,$$

oder weil nach Fig. 167 $v_2 = v_1$ sein muss,

$$v_1 = v_2 = \frac{3}{8}c = e\omega; \quad v = v_1\sqrt{2}.$$

Das Arbeitsvermögen nach dem Stosse beträgt

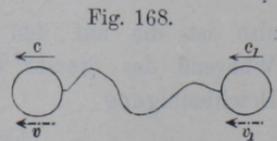
$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1 &= \frac{1}{2}(Mv^2 + \mu e^2\omega^2) = \frac{1}{2}M(2v_1^2 + \frac{2}{3}v_1^2) \\ &= \frac{1}{2}Mc^2 \cdot \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Soll der Würfel nach dem Stosse sich überschlagen, nicht wieder zurückfallen, so muss $\mathfrak{A}_1 \geq$ Arbeit der Schwere beim völligen Aufkippen sein, d. h.

$$\frac{1}{2}Mc^2 \cdot \frac{3}{8} \geq Mge(\sqrt{2} - 1) \quad \text{oder}$$

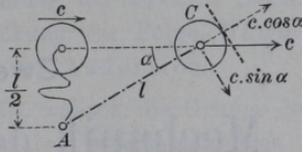
$$\frac{c^2}{2g} \geq 1,1e.$$

3. Wirkung von Fäden statt einer Berührung der Körper. Sind die Körper durch einen anfangs schlaffen Faden verbunden, so werden in dem Augenblicke, wo der Faden straff wird, durch seine Spannkraft ähnliche Wirkungen auf die Körper ausgeübt wie durch unmittelbare Berührung. Daher gelten in dem Falle der Fig. 168 für v und v_1 die Gleichungen 8 und 9, S. 129. Ist der Faden mit einem Körper M in Verbindung, am anderen Ende aber unwandelbar befestigt, so wirkt die Befestigung wie eine feste Wand ($M_1 = \infty$). Für unelastischen Faden ist $k = 0$, für vollkommen elastischen Faden $k = 1$ zu setzen.



Beispiel: Ein Körper bewegt sich fortschreitend mit der Geschwindigkeit c auf einer Geraden (Fig. 169). Ein undehnbarer Faden von der Länge l sei mit dem Körper verbunden und bei A in einem Abstand $\frac{1}{2}l$ von der Geraden befestigt. In dem Augenblicke, wo der Faden straff wird, vernichtet seine Spannkraft die Seitengeschwindigkeit $c \cos \alpha$, und mit der Geschwindigkeit $c \sin \alpha = \frac{1}{2}c$ bewegt sich der Körper in einer Kreislinie mit dem Mittelpunkt A weiter. Der Faden wirkt im Augenblicke des Straffwerdens ebenso, als ob der Körper bei C unelastisch gegen eine feste Wand stiesse, welche zu $l = AC$ rechtwinklig ist.

Fig. 169.



Jedes ruckweise Anziehen mittels eines undehnbaren Seiles ist mit einem Arbeitsverluste verbunden.