zu können und dass man aus Zweckmässigkeitsgründen den einzelnen Lagen schon im spannungslosen Zustande eine Krümmung giebt, hat auf die Wirkung keinen erheblichen Einfluss.

Der Einfachheit wegen haben wir eine Feder von nur 4 Schichten dargestellt. In der Ausführung wählt man statt dessen 10 Schichten von je 9 cm Breite.

Kommt in der Fahrbahn eine Vertiefung um h vor, in die das Rad hineinfällt und vermehrt sich dabei die Durchbiegung der Feder um $f_1 - f$, so verrichtet die Schwere die Arbeit $P(h + f_1 - f)$. Wird hierbei die Feder bis zur Elasticitätsgrenze beansprucht, so ist nach Gl 3 (S. 117):

$$P(h + f_1 - f) = {}^1/_2\,(P_1 f_1 - P f).$$

Bei gutem Federstahl kann man die Elasticitätsgrenze etwa zu $z = 8000$ annehmen. Dann wird wegen $f = 5$ cm:

$$f_1 = 5 \cdot \frac{8000}{4500} = 5 \cdot 1{,}78 = 8{,}9 \text{ cm};$$

$$P_1 = 1900 \cdot 1{,}78 = 3382 \text{ kg};$$

und man findet $h = 1{,}5$ cm. Um diese Höhe nur darf die Achse fallen, damit die Feder nicht über die Elasticitätsgrenze hinaus beansprucht werde.

3. Drehungs-Arbeit.

Wirkt am freien Ende eines einerseits befestigten Stabes von Cylinderform (Fig. 78, S. 64) ein von 0 bis $\mathfrak{M}$ stetig anwachsendes Drehungsmoment, entspricht dem Endwerthe $\mathfrak{M}$ ein Verdrehungswinkel ϑ, einem beliebigen Zwischenwerthe $\mathfrak{M}'$ der Verdrehungswinkel φ, so ist für eine Zunahme dieses Winkels um $d\varphi$ die Arbeit (nach Theil 1, S. 221)

$$d\mathfrak{A} = \mathfrak{M}'\,d\varphi.$$

Weil nun nach S. 65, Gl. 4 $\mathfrak{M}'$ mit φ verhältnisgleich wächst, so wird wie in den früheren ähnlichen Fällen die Gesammtarbeit

1) $$\mathfrak{A} = {}^1/_2\,\mathfrak{M}\vartheta.$$

Führt man dies mit

$$\vartheta = \frac{\mathfrak{M}\,l}{G J_0} \quad \text{und} \quad \mathfrak{M} = \frac{\tau J_0}{r}$$

auf die stärkste Schubspannung τ zurück, so wird

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}\,\frac{\tau^2}{G}\,\frac{J_0 l}{r^2}$$

oder, wenn man $J_0 = F i_0{}^2$ und $Fl = V$ setzt,

2) $$\boldsymbol{\mathfrak{A} = \frac{V}{2}\,\frac{\tau^2}{G}\,\frac{i_0{}^2}{r^2}}.$$

Da nun für kreisförmigen Querschnitt $i_0{}^2 = {}^1/_2\, r^2$, so entsteht

3) $$\mathfrak{A} = \frac{V}{4}\frac{\tau^2}{G}.$$

Für **rechteckigen** Querschnitt von den Seiten d und h (mit $d \leqq h$) war (S. 69, Gl. 13)

$$\mathfrak{M} = \frac{8}{3}\tau\frac{J_2}{d}$$

und nach S. 71, Gl. 16

$$\vartheta = 0{,}8\frac{\tau}{G}\frac{l}{d}\left(1 + \frac{J_2}{J_1}\right),$$

worin $J_1 = {}^1/_{12}\, F h^2$ und $J_2 = {}^1/_{12}\, F d^2$. Daher wird

$$\mathfrak{A} = {}^1/_2\, \mathfrak{M}\vartheta = 1{,}07\frac{\tau^2}{G}\frac{J_2 l}{d^2}\left(1 + \frac{J_2}{J_1}\right) \quad \text{oder}$$

4) $$\mathfrak{A} = \frac{V}{11}\frac{\tau^2}{G}\left(1 + \frac{J_2}{J_1}\right) = \frac{V}{11}\frac{\tau^2}{G}\left(1 + \frac{d^2}{h^2}\right).$$

Im günstigsten Falle, für $d = h$, giebt dies

5) $$\mathfrak{A} = \frac{V}{5{,}5}\frac{\tau^2}{G};$$

im ungünstigsten Falle aber, für $d : h = 0$:

6) $$\mathfrak{A} = \frac{V}{11}\frac{\tau^2}{G}.$$

Um die Drehungs-Arbeit mit der Verlängerungs-Arbeit vergleichen zu können, bedenke man, dass nach S. 15 bei gleicher Sicherheit etwa $\tau = 0{,}8\,\sigma$ zu setzen, dass ferner $G = 0{,}4\,E$ ist dann wird $\frac{\tau^2}{G} = 1{,}6\,\frac{\sigma^2}{E}$.

Für den **Vollcylinder** ergiebt sich nach Gl. 3

7) $$\mathfrak{A} = 0{,}4\; V\frac{\sigma^2}{E},$$

d. h. beinahe ebenso gross wie die Verlängerungs-Arbeit. Bei einem **Hohlcylinder** von geringer Wandstärke ist annähernd $i_0 = r$, daher (nach Gl. 2)

8) $$\mathfrak{A} = \frac{V}{2}\frac{\tau^2}{g} = 0{,}8\; V\frac{\sigma^2}{E},$$

also noch erheblich günstiger als bei der Verlängerung. Die Drehungsarbeit eines Hohlcylinders ist hiernach die günstigste Art, unter der ein Stab Arbeit aufzunehmen vermag.

Verdrehungs-Federn.

Gerade Verdrehungsfedern werden wohl als Thürschliesser an eisernen Pforten benutzt. Wählt man einen Stahlstab mit quadratischem Querschnitte von $d = 0{,}4^{\text{cm}}$ Seite und $l = 120^{\text{cm}}$ Länge, so erträgt derselbe bei einer zulässigen Schubspannung $\tau = 3600^{\text{at}}$ ein Drehmoment (nach S. 69, Gl. 13)

$$\mathfrak{M} = \frac{8}{3} \cdot 3600 \, \frac{0{,}4^3}{12} = 51^{\text{cmkg}},$$

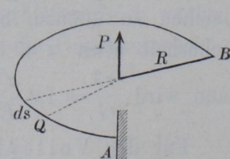
welches, wenn die Thürklinke 50^{cm} von der Drehachse entfernt ist, durch einen Kraftaufwand von $51 : 50 =$ rund 1^{kg} zum Öffnen der Pforte überwunden wird. Der entsprechende Verdrehungswinkel beträgt (nach Gl. 16, S. 71)

$$\vartheta = \frac{0{,}8 \cdot 3600}{880\,000} \cdot 300 \cdot 2 = \text{rund } 2\text{, d. h. } \frac{2 \cdot 180}{\pi} = 115 \text{ Grad},$$

als Winkel, um den die Thür gedreht werden darf.

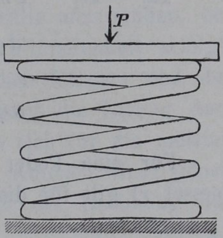
Gewundene Verdrehungsfedern dienen in feiner Ausführung als Federwaagen, in grösserem Maſsstabe als Tragfedern bei Strassenbahn-Fuhrwerken und als Bufferfedern bei Eisenbahn-Fuhrwerken. Ein nach einem Kreise vom Halbmesser R gekrümmter Stab (Fig. 139) sei bei A fest eingespannt (auch gegen Verdrehung), bei B mit einem nach dem Mittelpunkte führenden steifen Arme von der Länge R versehen, an dessen Ende eine rechtwinklig zur Ebene des Kreises stehende Kraft P wirkt. Die Kraft P übt dann auf alle Querschnitte des Stabes einen Verdrehungsmoment PR aus, erzeugt an einem Bogentheilchen ds einen Verdrehungswinkel, der aus Gl. 4, S. 65, bezw. Gl. 16, S. 71, folgt, wenn man l mit ds vertauscht. Bei einem Mittelpunktswinkel α des Ringes hat man l mit $R\alpha$ zu vertauschen, um den Verdrehungswinkel ϑ zu erhalten, und $R\vartheta$ ist dann angenähert die Verschiebung f des Angriffspunktes der Kraft P, solange es sich um kleine ϑ handelt.

Fig. 139.



Bei einer **cylindrischen Schraubenfeder** von n frei liegenden Windungen (Fig. 140) hat man dann l mit $2n\pi R$ zu vertauschen. Hiernach gilt für eine Feder, deren Querschnitt ein Kreis vom Halbmesser r, nach S. 65:

Fig. 140.



$$\text{9)}\qquad \mathfrak{M} = PR = \frac{\tau J_0}{r} = \frac{\tau r^3 \pi}{2};$$

$$\text{10)}\quad \left\{\begin{aligned} f &= R\vartheta = \frac{P\cdot 2n\pi R^3}{GJ_0} = P\frac{4nR^3}{Gr^4} \\ &= \frac{\tau}{G}2n\pi\frac{R^2}{r}. \end{aligned}\right.$$

Bei der Benutzung solcher Federn zu Waagen und Kraftmessern bedingt die Verhältnis-Gleichheit von f und P eine gleichmässige Theilung.

Für eine Feder von rechteckigem Querschnitte ist nach S. 69:

$$\text{11)}\qquad \mathfrak{M} = PR = \frac{8}{3}\tau\frac{J_2}{d} = \frac{2}{9}\tau h d^2;$$

$$\text{12)}\qquad f = 1{,}6\frac{\tau}{G}\frac{n\pi R^2}{d}\left(1+\frac{J_2}{J_1}\right) = 1{,}6\frac{\tau}{G}\frac{n\pi R^2}{d}\left(1+\frac{d^2}{h^2}\right).$$

Eine **kegelförmige Schraubenfeder** (Fig. 141) bildet im Grundrisse eine Spirale. Für einen Punkt Q im Abstande ϱ von der Achse ist das Moment $P\varrho$, wechselnd von PR_1 bis PR_2. Ein Bogentheilchen ds giebt einen Verdrehungswinkel

$$\frac{\vartheta}{l}ds = \frac{\vartheta}{l}\varrho\, d\varphi$$

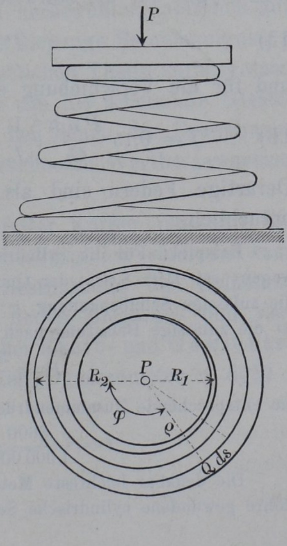
(wenn ϑ der Verdrehungswinkel für eine Länge l ist) und eine Verschiebung des Angriffspunktes von P um

$$df = \varrho\frac{\vartheta}{l}\varrho\, d\varphi.$$

Die Gesammtverschiebung ist also

$$f = \frac{1}{l}\int_0^{2n\pi}\vartheta\varrho^2 d\varphi.$$

Fig. 141.



Man kann annehmen, dass ϱ sich nach einem Geradlinien-Gesetze ändert, d. h.

$$\frac{R_2 - \varrho}{R_2 - R_1} = \frac{\varphi}{2\,n\,\pi} \quad \text{also} \quad \varrho = R_2 - \frac{R_2 - R_1}{2\,n\,\pi}\varphi, \quad \text{mit}$$

$$d\varrho = -\frac{R_2 - R_1}{2\,n\,\pi}\,d\varphi \quad \text{oder}$$

$$d\varphi = -\frac{2\,n\,\pi}{R_2 - R_1}\,d\varrho\,.$$

Für eine Feder von **kreisförmigem** Querschnitte (Halbmesser r) gilt für die stärkste Spannung τ die Gleichung

13) $$P R_2 = \frac{\tau J_0}{r} = \frac{\tau r^3 \pi}{2}\,.$$

Ferner ist $$\vartheta = \frac{P\varrho}{G J_0}\,l, \quad \text{daher}$$

$$f = -\frac{P}{G J_0}\,\frac{2\,n\,\pi}{R_2 - R_1}\int_{R_2}^{R_1}\varrho^3 d\varrho = \frac{P n \pi (R_2{}^4 - R_1{}^4)}{2\,G J_0 (R_2 - R_1)}$$

14) $$f = \frac{P n \pi}{2\,G J_0}(R_2{}^2 + R_1{}^2)(R_2 + R_1)\,.$$

Für eine Feder von **rechteckigem** Querschnitte ($d \cdot h$ mit $d \leqq h$) gilt für die stärkste Spannung τ die Gleichung:

15) $$P R_2 = \frac{8}{3}\,\tau\,\frac{J_2}{d}\,,$$

und für die Verschiebung erhält man leicht

16) $$f = 0{,}15\,\frac{P n \pi}{G}\left(\frac{1}{J_2} + \frac{1}{J_1}\right)\left(R_2{}^2 + R_1{}^2\right)\left(R_2 + R_1\right).$$

Derartige Federn sind als Bufferfedern der Eisenbahnwagen gebräuchlich.

Beispiel: Für die cylindrische Schrauben-Tragfeder eines Strassenbahnwagens sei $R = 8^{\text{cm}}$, der Querschnitt ein Kreis vom Halbmesser $r = 1^{\text{cm}}$, die zulässige Schubspannung $\tau = 3600^{\text{at}}$; $G = 1\,000\,000^{\text{at}}$; $n = 8$. Dann ist die zulässige Belastung nach Gl. 9

$$P = \frac{3600 \cdot 1 \cdot \pi}{2 \cdot 8} = 707^{\text{kg}},$$

die entsprechende Zusammendrückung nach Gl. 10

$$f = \frac{3600}{1\,000\,000}\,2 \cdot 8 \cdot \pi \cdot 64 = 11{,}6^{\text{cm}}\,.$$

Die denkbar leichteste Metallfeder würde eine aus einer dünnwandigen Röhre gewundene cylindrische Schraubenfeder sein.

Schlussbemerkung: Bei sämmtlichen vorstehenden Untersuchungen über Formänderungs-Arbeit und ihre Anwendung wurde die Masse des elastischen Körpers vernachlässigt. Auf Grund dieser Vernachlässigung war es zulässig, die für eine langsame stetige Formänderung hergeleitete Arbeit auch auf Fälle anzuwenden, bei denen die Formänderung mit einer gewissen Plötzlichkeit erfolgt. Die Berücksichtigung der Masse des elastischen Körpers und der Beschleunigung seiner einzelnen Theile erschwert die Lösung derartiger Aufgaben in solchem Grade, dass man sich für die meisten Fälle der vorstehend entwickelten Gleichungen bedienen wird; jedoch darf man nicht übersehen, dass das Ergebnis der Rechnung nur annähernd richtig sein kann.

Eine plötzliche Belastung, jedoch ohne Stoss, hat stets Schwingungen zur Folge, bei denen die stärkste Spannung das Doppelte der Gleichgewichts-Spannung beträgt. Dieses Ergebnis findet auch Anwendung auf die verschiedenen Fälle der Beschleunigungs-Zustände elastischer Körper. Auf S. 90 wurde ausdrücklich vorausgesetzt, dass sämmtliche Theile des Körpers übereinstimmende Bewegung haben. Der Körper befindet sich dann in scheinbarer Ruhe in Bezug auf einen Raum, der dieselbe Bewegung ausführt. War der Körper vorher spannungslos und treten die Kräfte, die den Beschleunigungs-Zustand herbeiführen, plötzlich auf, so wird nur der Schwerpunkt des Körpers diejenige Beschleunigung p haben, welche S. 90 u. ff. für seine sämmtlichen Theile vorausgesetzt war. Die einzelnen Theile aber werden um die scheinbare Gleichgewichtslage Schwingungen ausführen, bei denen die Spannungen auf das Doppelte der auf S. 90 u. ff. berechneten Werthe anwachsen können.

Da die Formänderungen elastisch-fester Körper innerhalb der Elasticitätsgrenze den Belastungen verhältnisgleich sind, so kann die Messung der Formänderung zur Bestimmung der Belastung benutzt werden. Aus diesem Grunde finden Biegungs- und Verdrehungsfedern ausgedehnte Anwendung bei Kraft- und Gewichtsmessern (Federwaagen, Federmanometer, Dynamometer u. dgl.)