Stosse (S. 139) beurtheilt werden. Ohne Rücksicht auf diesen Umstand würde man zu dem Schlusse kommen, dass die Federplatte beim Zurückschwingen die Kugel mit der Geschwindigkeit c wieder forttreiben werde; in Wirklichkeit fällt die Geschwindigkeit des Rücklaufs geringer aus.

c) Tragfedern der Fuhrwerke (Biegungsfedern).

Die Federn, welche die Wagenkasten der Fuhrwerke tragen, haben den Zweck, die Erschütterungen zu vermindern, welche durch Unregelmässigkeiten der Fahrbahn verursacht werden. Fällt ein Fuhrwerk ohne Federn, dessen Gewicht $= Q$, in eine Vertiefung h, so muss die Arbeit der Schwere Qh beim Aufschlagen auf den Boden der Vertiefung durch die Arbeit des Widerstandes der Fahrbahn, sowie der lothrechten Kräfte, mit denen die einzelnen Theile des Fuhrwerks auf einander drücken, aufgehoben werden. Ist nun der Boden wenig nachgiebig, sind die Räder und das ganze Fuhrwerk sehr steif gebaut, so dass nur geringe Formänderungen entstehen, so werden die Kräfte, deren Arbeit $= Qh$ sein muss, in Folge geringer Wegeslängen sehr gross. Daraus entsteht eine örtliche Zerstörung der Fahrbahn, eine starke Anspannung der tragenden Theile des Fuhrwerks; auch wird durch den harten Aufschlag, d. h. die starke Verzögerung, welche auf die Fallbeschleunigung folgt, die Lockerung der Verbindungen (Schrauben, Nägel) erleichtert.

Fig. 130.

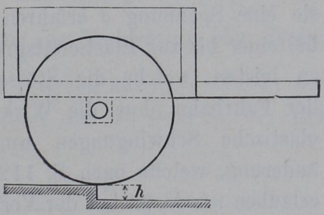
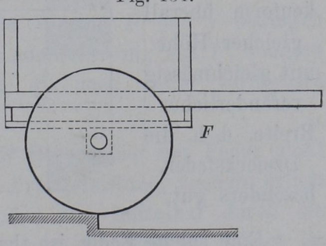


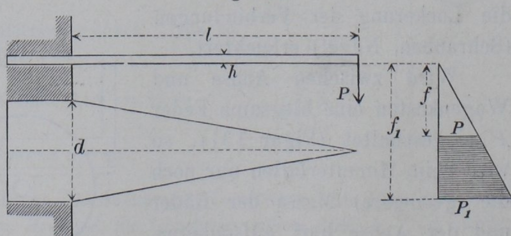
Fig. 131.



Wird zwischen Achse und Wagenkasten eine biegsame Feder F eingeschaltet (Figur 131), so wird beim Hinunterfallen nur noch die (geringere) Masse der Räder und der Achse hart aufschlagen. Der Wagenkasten mit der Last wird aber längs einer grösseren Wegeslänge aufgefangen, weil die Feder nach dem Aufschlagen der Räder sich durchbiegt und durch ihre Biegungsarbeit die Arbeit der Schwere aufzehrt. In Folge der beträchtlichen Vergrösserung des lothrechten Weges des Wagenkastens nach dem Aufschlagen der Räder wird nun die Grösse der verzögernden Kraft so erheblich vermindert, dass an Stelle des zerstörenden, unangenehm fühlbaren und lärmenden Stosses eine sanfte lothrechte Schwingung entsteht. Gute Federn schonen also die Fahrbahn und das Fuhrwerk, sowie die Nerven der betheiligten Menschen. Die zuweilen benutzten Kautschukreifen sind eine Fortsetzung dieser Bestrebungen, indem durch sie auch der Stoss der Räder und Achsen zu einem elastischen gemacht wird.

Die Tragfedern haben eine zweifache Aufgabe: sie müssen das Gewicht des Wagenkastens im Gleichgewichtszustande tragen, wobei sie eine Spannung σ erfahren und müssen ferner im Stande sein, bei einer bis zur Elasticitätsgrenze wachsenden Spannung eine Arbeit zu leisten, welche die Stösse, die durch die Unregelmässigkeiten der Fahrbahn ohne die Wirkung der Federn entstehen würden, in elastische Schwingungen umwandelt. Die Arbeit der Längenänderung, welche nach S. 112 eine günstige Ausnutzung des Stoffes erlauben würde, ist bei der Verwendung von Stahl nicht gut verwendbar, weil die Längenänderung zu gering ausfällt. Die Verkürzungsarbeit von Kautschuk-Blöcken hat man bei Strassenbahn-Fuhrwerken früher benutzt, aber aus den S. 104 angeführten Gründen aufgeben müssen. Daher verwendet man die Biegungsarbeit des Stahles, bei der eine beträchtliche Formänderung möglich ist. Hierzu eignet sich nun nach S. 113 die Balkenform überall gleicher Höhe mit gleichmässig veränderlicher Breite, d. h. die Dreiecksfeder, besonders gut.

Fig. 132.



Eine solche Feder ist thatsächlich in der Mitte unterstützt und an beiden Enden durch gleiche Lasten belastet; wegen der vollkommen symmetrischen Anordnung betrachten wir zunächst nur die eine Hälfte, die an dem einen Ende als wagerecht eingespannt betrachtet werden kann (Fig. 132). Für den Ruhezustand gilt

$$1)\qquad \sigma \frac{J}{e} = \sigma \frac{d h^2}{6} = P l .$$

Mit der Ruhelast ist nach S. 48 eine Durchbiegung

$$2)\qquad f = \frac{P l^3}{2 E J} = \frac{\sigma}{E} \frac{l^2}{h}$$

$(h = 2e)$ verbunden. Diese Gleichgewichts-Biegung f ist für spätere Arbeitsleistung nicht mehr zu verwerthen, denn sie entsteht ebenso wie die Spaunnng σ schon bei dem Aufbringen der Last. Nur der Spannungs-Spielraum von σ bis zur Elasticitätsgrenze z mit dem Arbeitswerthe $\frac{V}{6} \frac{z^2 - \sigma^2}{E}$ ist noch für die Vernichtung der Stösse verfügbar. Dabei vergrössert sich die Biegung auf $f_1 = f \cdot z : \sigma$, der am Ende auftretende Biegungswiderstand auf $P_1 = P \cdot z : \sigma$. Die noch auszunutzende Biegungsarbeit

$$3)\qquad \frac{P_1 f_1 - P f}{2} = \frac{V}{6} \frac{z^2 - \sigma^2}{E}$$

wird in der Figur durch das schraffirte Trapez dargestellt.

Welchen Anforderungen die Feder zu genügen hat, ist vorwiegend durch die Erfahrung ermittelt worden, und diese hat man in der Weise zum Ausdrucke gebracht, dass eine einem bestimmten Zwecke angemesse Feder eine gewisse Länge l haben muss, unter der Ruhelast P nur bis zu einer gewissen Spannung σ beansprucht werden darf und dass mit der Ruhelast eine bestimmte Durchbiegung f verbunden sein muss. Die Werthe P und f bedingen dann nicht allein die Arbeit $\frac{1}{2} P f$ bis zur Belastung mit P, sondern auch zugleich, weil man $z : \sigma$ kennt, die noch weiter verfügbare Arbeit (nach Gl. 3).

Man kümmert sich also bei der Berechnung der Feder nicht unmittelbar um die ihr zuzumuthende Arbeitsleistung, sondern bringt diese (zur Vereinfachung der Aufgabe) nur mittelbar durch die der Ruhelast entsprechende Biegung f zum Ausdrucke. Jedoch ist hiermit die Fähigkeit der Feder, die Last zu tragen und darüber hinaus noch Arbeit zu leisten, vollkommen gekennzeichnet.

Die Querschnittshöhe bestimmt sich aus Gl. 2 zu

$$4)\qquad h = \frac{\sigma}{E}\frac{l^2}{f},$$

die Breite hiernach aus Gl. 1 zu

$$5)\qquad d = \frac{6\,Pl}{\sigma h^2}.$$

Der Rauminhalt $V = {}^1\!/_2\, d h l$ ergiebt sich hiernach, wie es nach Gl. 8, S. 113, sein muss, zu $3\,Pf\dfrac{E}{\sigma^2}$.

Beispiel: Es seien gegeben:
$P = 1900$ kg; $f = 5$ cm; $\sigma = 4500$ at; $E = 2\,500\,000$ at; $l = 60$ cm. Dann wird nach Gl. 4 u. 5:

$$h = \frac{4500}{2\,500\,000}\,\frac{60^2}{5} = 1{,}3 \text{ cm};$$

$$d = \frac{6 \cdot 1900 \cdot 60}{4500 \cdot 1{,}69} = 90 \text{ cm}.$$

Eine Feder von so grosser Breite d ist für die Anwendung nicht geeignet. Sie wird daher in solcher Weise umgestaltet, dass eine zusammengesetzte Feder von geringerer Breite entsteht, die aber die gleiche Tragfähigkeit und Biegsamkeit hat wie die soeben berechnete. Man theilt die Federplatte nach Fig. 133 in eine gerade Anzahl $2\,n$ (z. B. 8) parallele Streifen, vereinigt je zwei mit gleichen Ziffern bezeichnete Theile zu einem Stück und legt die so erhaltenen Streien nach Fig. 134 auf einander, wobei man zunächst über dem Ende jedes Streifens ein Klötzchen angebracht denkt, so dass die einzelnen Streifen nur dort Kräfte auf einander ausüben können. Diese Kräfte werden mit K_1, K_2, K_3 bezeichnet. Fig. 135 zeigt die untere Ansicht der Feder, deren Breite $\dfrac{d}{n}$ beträgt. Die unterste Schicht AB von der Länge $\dfrac{l}{n}$ biegt sich bei B um

Fig. 133.

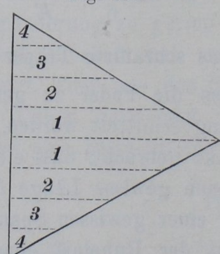


Fig. 134.

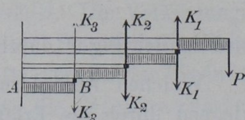
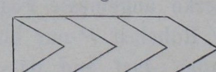


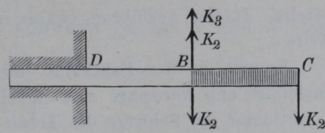
Fig. 135.



$$6)\qquad f_3 = \frac{K_3\left(\dfrac{l}{n}\right)^3}{2\,E\dfrac{J}{n}},$$

weil der Breite ${}^1\!/_n\, d$ ein Trägheitsmoment ${}^1\!/_n\, J$ entspricht. Die darüber liegende Schicht muss bei B die gleiche Durchbiegung f_3 zeigen, weil die zwischengelegten Klötzchen gleiche Biegung erzwingen. An dieser Schicht greift (Fig. 136) bei C die Kraft K_2, bei B die Kraft K_3 an. Fügt man in B zwei gleiche entgegengesetzte K_2 hinzu, so bilden die gegebene Kraft K_2 bei C und die bei B entgegengesetzt hinzugefügte ein Kräftepaar $\mathfrak{M} = K_2 \cdot {}^1/_n\, l$, welches dem von D bis B prismatischen Stabe nach S. 43 bei B eine Biegung um $\dfrac{K_2\,({}^1/_n\, l)^3}{2\,E \cdot {}^1/_n\, J}$ ertheilt. Ausserdem wirkt bei B nach abwärts die Kraft $K_2 - K_3$, die nach S. 43 bei B eine Biegung $\dfrac{(K_2 - K_3)\,({}^1/_n\, l)^3}{3\,E \cdot {}^1/_n\, J}$ erzeugt. Setzt man die Summe beider Biegungen gleich f_3 (Gl. 6), so entsteht

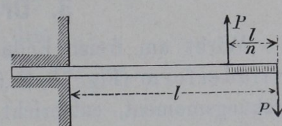
Fig. 136.



$$\frac{K_2}{2} + \frac{K_2}{3} - \frac{K_3}{3} = \frac{K_3}{2}, \quad \text{d. h. } K_3 = K_2.$$

In gleicher Weise erhält man $K_2 = K_1$ und $K_1 = P$; d. h. die an den Klötzchen übertragenen Kräfte sind sämmtlich gleich der Last P. Die oberste Lage bildet (Fig. 137) einen Balken überall gleicher Sicherheit, dessen Spannung

Fig. 137.



$$\sigma = \frac{P \cdot {}^1/_n\, l\, e}{{}^1/_n\, J} = \frac{P\,l\,e}{J} = \frac{P\,l\,h}{2\,J}$$

dieselbe ist, wie diejenige der Platte (s. Gl. 1, S. 117); sie biegt sich nach S. 49, Fig. 61 nach einem Kreisbogen vom Halbmesser

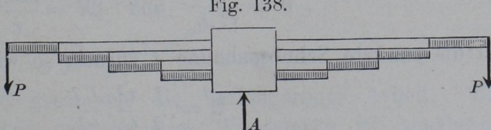
$$\rho = \frac{E\,h}{2\,\sigma} = \frac{2\,500\,000 \cdot 1{,}3}{2 \cdot 4500} = 361^{\,\mathrm{cm}},$$

und die Durchbiegung des freien Endes beträgt

$$f = \frac{l^2}{2\,\rho} = \frac{\sigma}{E}\,\frac{l^2}{h}$$

wie bei der Platte (Gl. 2, S. 117). Von den übrigen Lagen gilt dasselbe. Werden die Klötzchen auf die Höhe Null vermindert, so ändert sich in der Wirkung der Federlagen nichts Wesentliches. Setzt man diese Schichtenfeder an der gedachten Einspannungsstelle mit einer symmetrisch gestellten zusammen (Fig. 138), so entsteht eine an beiden Enden je mit P belastete Tragfeder, die sich bei A auf ein Achslager stützt. Dass man an den freien Enden geeignete Anordnungen trifft, um die Last P sicher auflagern

Fig. 138.



zu können und dass man aus Zweckmässigkeitsgründen den einzelnen Lagen schon im spannungslosen Zustande eine Krümmung giebt, hat auf die Wirkung keinen erheblichen Einfluss.

Der Einfachheit wegen haben wir eine Feder von nur 4 Schichten dargestellt. In der Ausführung wählt man statt dessen 10 Schichten von je 9 cm Breite.

Kommt in der Fahrbahn eine Vertiefung um h vor, in die das Rad hineinfällt und vermehrt sich dabei die Durchbiegung der Feder um $f_1 - f$, so verrichtet die Schwere die Arbeit $P(h + f_1 - f)$. Wird hierbei die Feder bis zur Elasticitätsgrenze beansprucht, so ist nach Gl 3 (S. 117):

$$P(h + f_1 - f) = \tfrac{1}{2}(P_1 f_1 - P f).$$

Bei gutem Federstahl kann man die Elasticitätsgrenze etwa zu $z = 8000$ annehmen. Dann wird wegen $f = 5$ cm:

$$f_1 = 5 \cdot \frac{8000}{4500} = 5 \cdot 1{,}78 = 8{,}9 \text{ cm};$$

$$P_1 = 1900 \cdot 1{,}78 = 3382 \text{ kg};$$

und man findet $h = 1{,}5$ cm. Um diese Höhe nur darf die Achse fallen, damit die Feder nicht über die Elasticitätsgrenze hinaus beansprucht werde.

3. Drehungs-Arbeit.

Wirkt am freien Ende eines einerseits befestigten Stabes von Cylinderform (Fig. 78, S. 64) ein von 0 bis $\mathfrak{M}$ stetig anwachsendes Drehungsmoment, entspricht dem Endwerthe $\mathfrak{M}$ ein Verdrehungswinkel ϑ, einem beliebigen Zwischenwerthe $\mathfrak{M}'$ der Verdrehungswinkel φ, so ist für eine Zunahme dieses Winkels um $d\varphi$ die Arbeit (nach Theil 1, S. 221)

$$d\mathfrak{A} = \mathfrak{M}' d\varphi.$$

Weil nun nach S. 65, Gl. 4 $\mathfrak{M}'$ mit φ verhältnisgleich wächst, so wird wie in den früheren ähnlichen Fällen die Gesammtarbeit

1) $$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{M}\vartheta.$$

Führt man dies mit

$$\vartheta = \frac{\mathfrak{M} l}{G J_0} \quad \text{und} \quad \mathfrak{M} = \frac{\tau J_0}{r}$$

auf die stärkste Schubspannung τ zurück, so wird

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{G}\frac{J_0 l}{r^2}$$

oder, wenn man $J_0 = F i_0^2$ und $F l = V$ setzt,

2) $$\boldsymbol{\mathfrak{A} = \frac{V}{2}\frac{\tau^2}{G}\frac{i_0^2}{r^2}}.$$