während für den gleichmässig auf den Querschnitt F_1 und den Inhalt $V:n$ gebrachten Stab

18) $$\mathfrak{A}_1 = \frac{\sigma_1{}^2}{2E}\frac{V}{n}$$

wird, so dass wird $\mathfrak{A}_1 : \mathfrak{A} = n$.

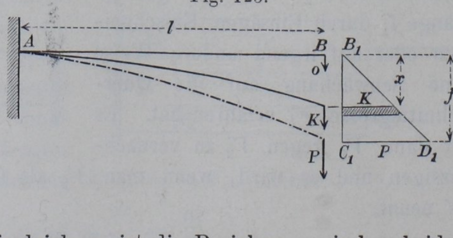
Die Widerstandsfähigkeit eines Stabes gegen Arbeit wird durch Einsägen auf halben Querschnitt auf $^1/_4$ vermindert, aber auf $^1/_2$ des ursprünglichen Werthes wieder erhöht, wenn man durch Wegnahme der Hälfte des Stoffes in zweckmässiger Weise überall den gleichen Querschnitt $F_1 = {}^1/_2 F_2$ herstellt. Noch mehrfach wird sich das Ergebnis zeigen, dass Körper überall gleicher Sicherheit hinsichtlich der Arbeitsleistung überraschend vortheilhaft sind. Der innere Grund liegt darin, dass der zulässige Endwerth P der Zugkraft durch F_1 bedingt ist, dass der übermässig grosse Querschnitt F_2 aber die Verlängerung Δl vermindert, wodurch auch das Produkt $^1/_2 P \Delta l = \mathfrak{A}$ eine Verminderung erfährt. Grosse Formänderungen sind für die Aufnahme von Arbeit vortheilhaft. Bei Ankertauen und Ankerketten, die das Arbeitsvermögen bewegter Schiffe durch die Arbeit ihrer Spannkräfte zu vernichten haben, sind Fehlstellen besonders verhängnisvoll.

2. Biegungs-Arbeit.

a) Prismatischer Stab.

Ein prismatischer, bei A (Fig. 125) wagerecht eingespannter Stab werde am freien Ende durch eine von Null ab allmählich bis P anwachsende Kraft gebogen. Dem beliebigen Zwischenwerthe K der Kraft entspricht eine Biegung x am freien Ende, dem Endwerthe P die Durchbiegung f. Da nun nach Gl. 7, S. 43:

Fig. 125.



$$x = \frac{Kl^3}{3EJ},$$

d. h. K mit x verhältnisgleich, so ist die Beziehung zwischen beiden Grössen wiederum ein Dreieck $B_1 C_1 D_1$ mit $B_1 C_1 = f$, $C_1 D_1 = P$.

Das Arbeitstheilchen von K ist $K dx$, gleich einem Flächenstreifen des Dreiecks, die Gesammtarbeit daher gleich dem Inhalte des ganzen Dreiecks, d. h.

1) $$\mathfrak{A} = {}^1/_2\, Pf;$$

es ist wieder $^1/_2\, P$ der Mittelwerth der veränderlichen Kraft, f die Wegeslänge. Weil nun

2) $$f = \frac{Pl^3}{3EJ},$$

so wird zunächst $$\mathfrak{A} = \frac{P^2 l^3}{6EJ}$$

und weil ferner $Pl = \sigma \dfrac{J}{e}$, so ergiebt sich

3) $$\mathfrak{A} = \frac{1}{6} \frac{Jl}{e^2} \frac{\sigma^2}{E},$$

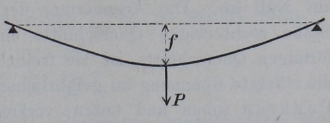
wenn σ die stärkste Biegungsspannung ist, J und e die bekannte Bedeutung (S. 22) haben. Setzt man $J = Fi^2$ (s. S. 62), wo i der Trägheitshalbmesser, so entseht

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{6} Fl \frac{i^2}{e^2} \frac{\sigma^2}{E} \quad \text{oder}$$

4) $$\mathfrak{A} = \frac{V}{6} \frac{i^2}{e^2} \frac{\sigma^2}{E}$$

wenn wiederum $Fl = V$ bedeutet. Das Verhältnis $i:e$ ist nur von der Form, nicht aber von der Grösse des Querschnitts abhängig. Mithin ist bei bestimmter Querschnittsform die zur Erzeugung einer bestimmten Biegungsspannung σ erforderliche Arbeit nur noch von dem Rauminhalte V des Stabes abhängig. Mag also ein Stab mit rechteckigem Querschnitte lang oder kurz sein, mag er hochkantig oder flachliegend befestigt sein — bei gleichem Rauminhalte wird die Biegungsarbeit in allen diesen Fällen die gleiche sein.

Fig. 126.



Die Gültigkeit der Gl. 4 ist auch nicht auf die Befestigungsart nach Fig. 125 beschränkt, vielmehr ergiebt sich, wenn man den Stab an beiden Enden unterstützt und in der Mitte belastet (Fig. 126), derselbe Werth.

Es ist nämlich wiederum $\mathfrak{A} = {}^1/_2 Pf$, ferner $f = \frac{Pl^3}{48\,EJ}$ (S. 45), $\frac{Pl}{4} = \sigma\frac{J}{e}$; setzt man diese Werthe ein, so entsteht Gl. 3.

Aus denselben Gründen, die auf S. 102 entwickelt wurden, ist $\mathfrak{A}_i = -\mathfrak{A}$ die Arbeit der inneren Spannkräfte des gebogenen Stabes. Ebenso kehrt sich, wenn die Rückkehr zum spannungslosen Zustande erfolgt, das Zeichen von $\mathfrak{A}$ und somit auch dasjenige von $\mathfrak{A}_i$ um.

Hinsichtlich der Einwirkung einer plötzlichen Belastung ergiebt sich in ähnlicher Weise, wie auf S. 104—106 entwickelt wurde, dass die stärkste Spannung das Doppelte der Gleichgewichtsspannung beträgt und dass der Stab Schwingungen um die Gleichgewichtslage als Mitte ausführen wird.

Für **rechteckigen** Querschnitt ist $J = {}^1/_{12} Fh^2$ (S. 22), mithin $i^2 = {}^1/_{12} h^2$, $e^2 = {}^1/_4 h^2$, $i^2 : e^2 = 1 : 3$, folglich

5) $$\mathfrak{A} = \frac{V}{18}\,\frac{\sigma^2}{E}.$$

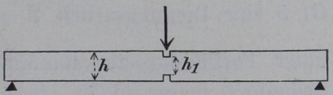
Für **kreisförmigen** Querschnitt ist $J = {}^1/_4 Fr^2$ (S. 24), $i^2 = {}^1/_4 r^2$, $e^2 = r^2$, daher

6) $$\mathfrak{A} = \frac{V}{24}\,\frac{\sigma^2}{E}.$$

Die Biegungsarbeit ergiebt sich in diesen beiden Fällen (Gl. 5 und 6) 9 bezw. 12 Mal kleiner als die Arbeit der Längenänderung (S. 101, Gl. 5). Es erklärt sich dies folgendermassen: Bei der Verlängerung herrscht an allen Stellen aller Querschnitte die gleiche Spannung σ, mithin wird bei einem gezogenen Stabe die Festigkeit bis zu dem gewünschten Grade vollständig ausgenutzt, während beim gebogenen Stabe die stärkste Spannung nur in dem einen Querschnitte, wo das Moment den grössten Werth erreicht, vorkommt, sich aber in der Längenrichtung bis auf Null vermindert. Aber auch in dem Querschnitte des grössten Momentes kommt die stärkste Spannung nur im grössten Abstande von der Nulllinie vor, nimmt aber nach dieser hin ebenfalls auf Null ab. Die Ausnutzung der Festigkeit ist daher bei dem gebogenen Stabe rechteckigen Querschnitts eine recht ungünstige. Beim Stabe kreisförmigen Querschnitts ist sie freilich noch etwas ungünstiger, weil bei diesem die stärkste Spannung im gefährlichen Querschnitte nur an den beiden äussersten Punkten (oben und unten) vorkommt beim rechteckigem Querschnitte aber doch wenigstens über zwei geraden Linien (Oberkante und Unterkante des Querschnitts) sich erstreckt.

Der Einfluss einer Verschwächung ergiebt sich in ähnlicher Weise wie beim gezogenen Stabe, ist aber noch erheblicher als dort, wenn die Einkerbung an den Stellen der stärksten Spannung (oben und unten) erfolgt. Für einen Stab von rechteckigem Querschnitt ist $\mathfrak{A} = \frac{V}{18}\frac{\sigma^2}{E}$. Wird der Stab in der Mitte (Fig. 127) oben und unten eingekerbt, so dass von der Höhe h nur der Theil h_1 widerstandsfähig bleibt, das Widerstandsmoment also von $^1/_6\, d h^2$ auf $^1/_6\, d h_1^2$ abnimmt, so wird die stärkste Spannung an der Einkerbung $\sigma_1 = \sigma \frac{h^2}{h_1^2}$. Weil nun V und auch die Spannungsverhältnisse des Stabes, abgesehen von der Einkerbung, dieselben geblieben sind, so kann geschrieben werden

Fig. 127.



$$7)\qquad \mathfrak{A} = \frac{V}{18}\frac{\sigma_1^2}{E}\frac{h_1^4}{h^4}.$$

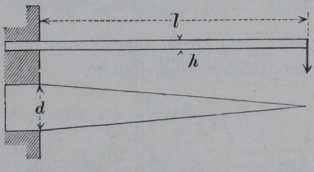
Wird also durch Einkerbung in der Mitte $h_1 = 0{,}8\, h$, so ist $h_1^4 = 0{,}41\, h^4$, und es vermindert sich die der Spannung σ_1 entsprechende Biegungsarbeit auf das 0,41 fache.

Von diesem Umstande wird z. B. in Eisenhütten vielfache Anwendung gemacht, wenn man Eisenstäbe durch das Arbeitsvermögen von Hammerschlägen zerbrechen will. Man kerbt den Stab an der gewünschten Bruchstelle mittels eines sog. Schrotmeissels ein, wonach dann der hohl gelegte Stab unter dem Hammerschlage verhältnismässig leicht zerbricht.

b) Stab überall gleicher Sicherheit und gleicher Höhe.

Ist der Stab im Grundrisse (rechtwinklig zur Richtung der biegenden Kraft) dreieckig zugeschärft (Fig. 128), so wird die Durchbiegung $f = \frac{Pl^3}{2EJ}$ (S. 48, Gl. 21), somit

Fig. 128.



$$\mathfrak{A} = \frac{Pf}{2} = \frac{P^2 l^3}{4EJ}, \quad Pl = \sigma\frac{J}{e}$$

und $$\mathfrak{A} = \frac{1}{4}\frac{Jl}{e^2}\frac{\sigma^2}{E} = \frac{1}{4} Fl \frac{i^2}{e^2}\frac{\sigma^2}{E}.$$

Jetzt ist aber, wegen der Zuschärfung, der Rauminhalt $V = {}^1/_2\, Fl$, oder $Fl = 2V$, und weil wieder $i^2 : e^2 = 1 : 3$, so erhält man

$$8)\qquad \mathfrak{A} = \frac{Pf}{2} = \frac{V}{6}\frac{\sigma^2}{E},$$

d. h. 3 Mal so gross wie bei überall gleichem Querschnitte, weil beim Stabe gleicher Sicherheit die stärkste Spannung σ nicht nur