Beispiel: Der Eisenstab habe $F = 4$ qcm Querschnitt und $l = 5$ m $= 500$ cm Länge, der Körper $Q = 100$ kg Gewicht und nur $h = 10$ cm Fallhöhe; dann ist die Gleichgewichts-Spannung $\sigma_0 = 25$ at, d. h. ganz unerheblich. Es wird aber

$$\sigma = 25 + \sqrt{625 + 2000000} = 1439 \text{ at}.$$

In Folge der Fallhöhe von 10 cm entsteht also eine im Vergleiche mit der Gleichgewichts-Spannung sehr erhebliche Anstrengung des Stabes. Die entsprechende Verlängerung beträgt

$$\varDelta l = \frac{1439 \cdot 500}{2000000} = 0{,}36 \text{ cm},$$

ist also gegen $h = 10$ cm unerheblich. Für die meisten Fälle kann man $\varDelta l$ gegen h vernachlässigen; dann wird aus Gl. 11:

13) $$\frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E} = Q h,$$

mithin, erheblich einfacher,

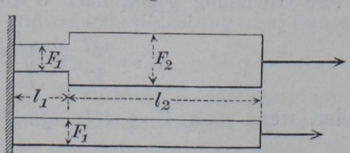
14) $$\sigma = \sqrt{2\,\sigma_0 \frac{h}{l} E} = 1414 \text{ at}.$$

Diese Formel gilt auch für die Spannung des Seiles einer Dampfwinde, wenn ein Körper vom Gewichte Q mit dem anfänglich schlaffen Seile verbunden, die Winde nun aber derartig in Gang gesetzt wird, dass das Seil in dem Augenblicke, wo es straff wird, sich mit einer Geschwindigkeit c bewegt. Bezeichnet man die dieser Geschwindigkeit entsprechende Geschwindigkeitshöhe mit h, so muss die Arbeit $Q h$, welche nöthig ist, um der Last Q die Geschwindigkeit c des Seiles mitzutheilen, durch Vermittelung der Formänderungsarbeit des Seiles von der Winde auf die Last übertragen werden. Man sieht daraus, wie leicht bei unvorsichtigem Betriebe der Winde Seilrisse entstehen können.

b) Stab mit sprungweise veränderlichem Querschnitte.

Der Stab möge auf eine Länge l_1 den Querschnitt F_1, auf eine Länge l_2 den grösseren Querschnitt F_2 haben (Fig. 123). Bringt man ihn dann in ähnlicher Weise, wie auf S. 100 beschrieben, durch eine allmählich anwachsende Zugkraft in Spannung, so werden die Spannungen in den verschiedenen Querschnitten σ_1 und σ_2 betragen, zwischen denen die Beziehung $\sigma_2 F_2 = \sigma_1 F_1$, mithin

Fig. 123.



$$\sigma_2 = \sigma_1 \frac{F_1}{F_2} = \frac{\sigma_1}{n}$$

besteht, wenn man $F_2 = n F_1$ setzt. Bei der Erzeugung dieser

Spannungen muss die wirkende Zugkraft eine Arbeit verrichten, welche nach Gl. 5, S. 101 beträgt:

$$\mathfrak{A} = \frac{V_1}{2}\frac{\sigma_1{}^2}{E} + \frac{V_2}{2}\frac{\sigma_2{}^2}{E},$$

oder, auf σ_1 zurückgeführt:

15) $$\mathfrak{A} = \frac{\sigma_1{}^2}{2E}\left\{V_1 + \frac{V_2}{n^2}\right\}.$$

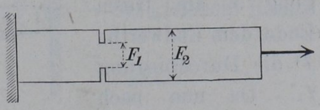
Für die Sicherheit des Stabes im Gleichgewichtszustande kommt nur der kleinste Querschnitt in Frage. Der Rauminhalt $(F_2 - F_1)\,l_2$, den der vorliegende Stab mehr enthält als ein solcher mit überall gleichem Querschnitt F_1, ist für den Ruhezustand eine Verschwendung. Für die mögliche Arbeitsleistung ist diese Verschwendung an Stoff aber sogar schädlich; denn ein Stab von der Länge $l_1 + l_2$ und dem einheitlichen Querschnitt F_1 hat einen Rauminhalt $V_1 + \frac{V_2}{n}$ und nimmt bis zur Spannung σ_1 eine Arbeit auf

16) $$\mathfrak{A}_1 = \frac{\sigma_1{}^2}{2E}\left(V_1 + \frac{V_2}{n}\right).$$

Da $n > 1$, so ist $\mathfrak{A}_1 > \mathfrak{A}$, d. h. der Stab von gleichmässiger Stärke erträgt, bis er auf eine Spannung σ_1 kommt, eine grössere Arbeit als der ungleichmässig starke Stab von gleicher Stoffmenge. Gegen Arbeitswirkung verstärkt wird daher der ungleichmässige Stab durch Fortnahme des für den Ruhezustand nur Ueberflüssigen (nach A. Ritter, Technische Mechanik).

Diese Betrachtungen finden Anwendung auf einen Stab, dessen Querschnitt F_2 auf eine geringe Länge l_1 durch Einsägen, Einschneiden oder auf irgend andere Weise eine Schwächung auf die Querschnittsgrösse F_1 erfahren hat. Es ist dann V_1 gegen V_2 zu vernachlässigen und es wird, wenn man V_2 als Gesammtinhalt nunmehr V nennt,

Fig. 124.



17) $$\mathfrak{A} = \frac{\sigma_1{}^2}{2E}\frac{V}{n^2},$$

während für den gleichmässig auf den Querschnitt F_1 und den Inhalt $V:n$ gebrachten Stab

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{\sigma_1^2}{2E}\frac{V}{n} \tag{18}$$

wird, so dass wird $\mathfrak{A}_1 : \mathfrak{A} = n$.

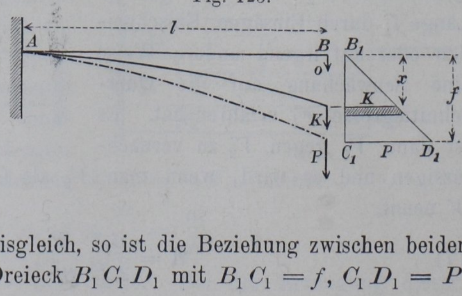
Die Widerstandsfähigkeit eines Stabes gegen Arbeit wird durch Einsägen auf halben Querschnitt auf $^1/_4$ vermindert, aber auf $^1/_2$ des ursprünglichen Werthes wieder erhöht, wenn man durch Wegnahme der Hälfte des Stoffes in zweckmässiger Weise überall den gleichen Querschnitt $F_1 = {}^1/_2 F_2$ herstellt. Noch mehrfach wird sich das Ergebnis zeigen, dass Körper überall gleicher Sicherheit hinsichtlich der Arbeitsleistung überraschend vortheilhaft sind. Der innere Grund liegt darin, dass der zulässige Endwerth P der Zugkraft durch F_1 bedingt ist, dass der übermässig grosse Querschnitt F_2 aber die Verlängerung $\varDelta l$ vermindert, wodurch auch das Produkt $^1/_2 P \varDelta l = \mathfrak{A}$ eine Verminderung erfährt. Grosse Formänderungen sind für die Aufnahme von Arbeit vortheilhaft. Bei Ankertauen und Ankerketten, die das Arbeitsvermögen bewegter Schiffe durch die Arbeit ihrer Spannkräfte zu vernichten haben, sind Fehlstellen besonders verhängnisvoll.

2. Biegungs-Arbeit.

a) Prismatischer Stab.

Ein prismatischer, bei A (Fig. 125) wagerecht eingespannter Stab werde am freien Ende durch eine von Null ab allmählich bis P anwachsende Kraft gebogen. Dem beliebigen Zwischenwerthe K der Kraft entspricht eine Biegung x am freien Ende, dem Endwerthe P die Durchbiegung f. Da nun nach Gl. 7, S. 43:

Fig. 125.



$$x = \frac{Kl^3}{3EJ},$$

d. h. K mit x verhältnisgleich, so ist die Beziehung zwischen beiden Grössen wiederum ein Dreieck $B_1 C_1 D_1$ mit $B_1 C_1 = f$, $C_1 D_1 = P$.