dieser Beziehung der kleine Werth von E, d. h. die grössere Nachgiebigkeit von Nutzen. In erheblichem Maſse günstig ist dieser Umstand beim Kautschuk. Dieser Stoff ist bei gleichem Rauminhalte dem Gussstahl etwa 4,3 Mal überlegen. Kautschuk würde daher für Feder-Anordnungen, bei denen es sich um die Aufnahme von Arbeit handelt, der vortheilhafteste Stoff sein, wenn er eine grössere Dauer hätte. In früherer Zeit hat man bei den Eisenbahn-Fuhrwerken die Kautschukfedern in grossem Umfange verwandt, hat aber gefunden, dass Kautschuk seine guten Eigenschaften zu bald verliert. Guter Kautschuk bleibt freilich im spannungslosen Zustande unter Umständen 30 Jahre lang gut elastisch, im gespannten Zustande aber wird er bald brüchig und hart.

a) Einwirkung plötzlicher Belastung. Hängt ein Körper vom Gewichte Q ruhend am unteren Ende eines lothrechten, oben befestigten Stabes vom Querschnitt F und der Länge l, so herrscht in dem Stabe, dessen Eigengewicht wir vernachlässigen, die Spannung

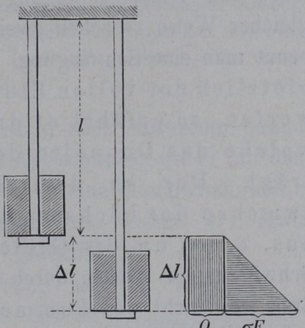
$$\sigma_0 = Q : F, \tag{7}$$

und seine elastische Verlängerung beträgt $\Delta l_0 = \frac{Q}{F} \cdot \frac{l}{E}$.

Wird aber der zu Anfang in geeigneter Weise unterstützte Körper mit dem unteren Ende des spannungslosen Stabes verbunden und dann seiner Unterstützung plötzlich beraubt, so übt der Stab im nächsten Augenblicke noch keine Kraft auf den Körper aus, weil er noch die Länge l des spannungslosen Zustandes hat. Der Körper steht also anfänglich unter alleiniger Wirkung der Schwere und wird eine lothrechte Bewegung mit der Fallbeschleunigung beginnen (Fig. 120, linke Seite). Hierbei erfährt der Stab eine zunehmende Verlängerung, also auch eine wachsende Spannkraft, die dem Gewichte Q entgegenwirkt. Aber erst, wenn der Körper um die Grösse $\Delta l_0 = \frac{Q}{F} \cdot \frac{l}{E}$ gesunken ist, hat die Spannkraft die Grösse Q erreicht, so dass in diesem Augenblicke die Beschleunigung des Körpers Null beträgt. Da bis hierher die Bewegung eine beschleunigte war, so wird der Körper eine gewisse Geschwindigkeit c erlangt haben, die erst bei weiterer Verlängerung des Stabes, bei weiterem Anwachsen seiner Spannkraft allmählich zu Null gemacht werden kann. Der Stab wird also eine grösste Verlängerung $\Delta l > \Delta l_0$, daher auch eine stärkste Spannung $\sigma > \sigma_0$ erfahren. Diese Werthe Δl und σ lassen sich mittels des Satzes der Arbeit berechnen.

Zu Anfang hatte der Körper die Geschwindigkeit Null, das gleiche findet statt in dem Augenblicke der stärksten Verlängerung der Stange (Fig. 120, rechte Seite); denn wenn im nächsten Zeittheilchen dt die Weglänge ds Null betragen soll, so muss $v = ds : dt =$ Null sein. In dem Verlaufe der Abwärts-Bewegung ist daher die gesammte Änderung des Arbeitsvermögens des Körpers Null, somit auch die gesammte Arbeit. Nun verrichtet das Gewicht Q die Arbeit $Q\varDelta l$, dargestellt durch ein Rechteck. Die Arbeit der inneren Kräfte aber beträgt, wenn der Stab vollkommen elastisch bleibt, längs eines Weges $\varDelta l$ (nach Gl. 6, S. 102): $-\dfrac{P}{2}\varDelta l$, dargestellt durch ein Dreieck, wenn P den (grössten) Endwerth der Spannkraft $= \sigma F$ bedeutet. Die absoluten Werthe beider Arbeiten, d. h. die Inhalte der beiden Figuren müssen einander gleich sein, damit die Arbeitssumme Null werde. Also wird

Fig. 120.



$$^1\!/_2\,\sigma F \varDelta l = Q \varDelta l, \quad \text{oder}$$

9) $$\sigma = 2Q : F = 2\sigma_0 \quad \text{und ebenso}$$

10) $$\varDelta l = 2\varDelta l_0.$$

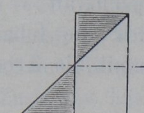
In der tiefsten Lage beträgt die Spannkraft des Stabes $\sigma F = 2Q$; der Körper steht augenblicklich unter Einwirkung einer aufwärts gerichteten Mittelkraft $2Q - Q = Q$ und erfährt dadurch eine aufwärts gerichtete Beschleunigung g. Die Spannkraft wird so lange über die Schwere das Uebergewicht haben, bis wieder die Gleichgewichtslage erreicht ist. Der Körper wird aber erst wieder die Geschwindigkeit Null haben, wenn er um h gestiegen ist, wenn die positive Arbeit des sich verkürzenden Körpers gleich dem absoluten Werthe der negativen Arbeit der Schwere, wenn also

$$\frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E} = Qh$$

geworden ist. Setzt man hierin $V = Fl$, $\sigma = 2Q : F$ ein, so entsteht $h = 2\frac{Ql}{EF} = 2\varDelta l_0 = \varDelta l$, d. h. der Körper kommt auf die ursprüngliche Höhe zurück, und nun kehren die Vorgänge der ersten Auf- und Nieder-Bewegung fortgesetzt wieder. Eine solche, in gleicher Weise zwischen zwei Orten hin und her gehende Bewegung nennt man eine Schwingung. Also: Wird ein elastischer Stab plötzlich der vollen Einwirkung eines Gewichtes unterworfen, so erfährt er dadurch eine stärkste Spannung, welche das Doppelte der Gleichgewichtsspannung beträgt. Der an dem Stabe hängende Körper führt zwischen der höchsten und tiefsten Lage Schwingungen aus, u. zw. um die Gleichgewichtslage als Mitte. Diese Schwingungen werden durch Luftwiderstand und dadurch, dass der Stab sich nicht vollkommen elastisch verhält, allmählich kleiner, und Stab und Körper gehen endlich in die Ruhe- oder Gleichgewichtslage über.

Die veränderliche, auf den Körper wirkende Gesammtkraft bringt man am deutlichsten zur Anschauung, wenn man die beiden Arbeitsfiguren entgegengesetzter Vorzeichen in einander zeichnet, so dass man den Unterschied der beiden Kräfte unmittelbar abmessen kann.

Fig. 121.

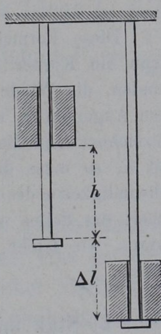


Derartige Fälle plötzlicher Belastung kommen in der Anwendung sehr häufig vor. Und dieser Umstand ist einer der Gründe dafür, dass man (s. S. 10) bei einer statischen Berechnung die zulässige Spannung σ_0 erheblich kleiner als die Spannung an der Elasticitätsgrenze wählt. Denn bemisst man den Querschnitt F des Stabes unter Annahme des Gleichgewichts nach einer Spannung $0{,}5\,z$, so wird bei plötzlicher Belastung die wahre Spannung $= z$ (Elasticitätsgrenze) werden.

Will man ein kleines Gewicht an einen Kautschukfaden, oder ein grosses an eine Hängstange, eine Kette, einen Krahn derartig anhängen, dass in den genannten elastischen Körpern die stärkste Spannung nur wenig grösser als die Gleichgewichts-Spannung werde, so muss man dem Körper die anfängliche Unterstützung nicht plötzlich nehmen, sondern muss die unterstützenden Vorrichtungen (bei einem kleinen Gewichte vielleicht die Hand, bei einem grösseren eine Windevorrichtung) langsam senken. Dabei wird dann das Gewicht des Körpers allmählich auf den Faden, die Stange oder Kette übertragen, während die Stützvorrichtung in demselben Maſse entlastet wird. Auf diese Weise erfährt der Körper keine nennenswerthe Geschwindigkeit und wird in dem Augenblicke, wo die Spannkraft des Fadens, der Stange oder Kette gleich dem Gewichte des Körpers geworden ist, seine Senkung beenden und im Gleichgewichte verbleiben. Bei verhältnismässig grossen Lasten ist dieses Verfahren schwer anzuwenden, deshalb darf man bei der Berechnung von Hängestangen, Ketten, Krahnen u. dergl. auf diesen günstigen Umstand nicht sicher rechnen und wird daher die zulässige Spannung (für ruhende Last) entsprechend klein anzusetzen haben.

Die Gleichgewichtsspannung σ_0 wird in noch stärkerem Grade überschritten, wenn der Körper in dem Augenblicke, wo er auf den spannungslosen Stab zu wirken beginnt, schon eine Geschwindigkeit c im Sinne der Verlängerung der Stange hat, indem er, etwa mittels einer Bohrung auf dem Stabe gleitend, von einer Höhe h auf einen Vorsprung am unteren Stabende herabfällt (Fig. 122). Ist Δl die grösste Verlängerung des Stabes, nach deren Entstehung der fallende Körper die Geschwindigkeit Null erreicht, so ist zwischen der höchsten und tiefsten Lage des Körpers wiederum die Änderung des Arbeitsvermögens Null, mithin, da der Körper um $h + \Delta l$ sinkt:

Fig. 122.



11) $$\frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E} = Q(h + \Delta l),$$

oder, mit $\Delta l = \dfrac{\sigma l}{E}$:

$$\frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E} = Qh + \frac{Q\sigma l}{E}.$$

Diese Gleichung giebt, nach σ aufgelöst:

$$\sigma = \frac{Ql}{V} \pm \sqrt{\frac{Q^2 l^2}{V^2} + \frac{2QhE}{V}},$$

oder, wenn man $V = Fl$, $Q : F = \sigma_0$ setzt:

12) $$\sigma = \sigma_0 + \sqrt{\sigma_0^2 + 2\sigma_0 \frac{h}{l} E}.$$

(Ein negatives Zeichen vor dem Wurzelausdrucke hat für die vorliegende Aufgabe keine Bedeutung, da es sich nur um einen positiven Werth σ handeln kann.)

Beispiel: Der Eisenstab habe $F = 4$ qcm Querschnitt und $l = 5$ m $= 500$ cm Länge, der Körper $Q = 100$ kg Gewicht und nur $h = 10$ cm Fallhöhe; dann ist die Gleichgewichts-Spannung $\sigma_0 = 25$ at, d. h. ganz unerheblich. Es wird aber

$$\sigma = 25 + \sqrt{625 + 2000000} = 1439 \text{ at}.$$

In Folge der Fallhöhe von 10 cm entsteht also eine im Vergleiche mit der Gleichgewichts-Spannung sehr erhebliche Anstrengung des Stabes. Die entsprechende Verlängerung beträgt

$$\varDelta l = \frac{1439 \cdot 500}{2000000} = 0{,}36 \text{ cm},$$

ist also gegen $h = 10$ cm unerheblich. Für die meisten Fälle kann man $\varDelta l$ gegen h vernachlässigen; dann wird aus Gl. 11:

$$13)\qquad \frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E} = Q h,$$

mithin, erheblich einfacher,

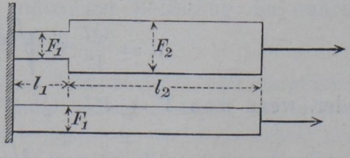
$$14)\qquad \sigma = \sqrt{2\,\sigma_0 \frac{h}{l} E} = 1414 \text{ at}.$$

Diese Formel gilt auch für die Spannung des Seiles einer Dampfwinde, wenn ein Körper vom Gewichte Q mit dem anfänglich schlaffen Seile verbunden, die Winde nun aber derartig in Gang gesetzt wird, dass das Seil in dem Augenblicke, wo es straff wird, sich mit einer Geschwindigkeit c bewegt. Bezeichnet man die dieser Geschwindigkeit entsprechende Geschwindigkeitshöhe mit h, so muss die Arbeit Qh, welche nöthig ist, um der Last Q die Geschwindigkeit c des Seiles mitzutheilen, durch Vermittelung der Formänderungsarbeit des Seiles von der Winde auf die Last übertragen werden. Man sieht daraus, wie leicht bei unvorsichtigem Betriebe der Winde Seilrisse entstehen können.

b) Stab mit sprungweise veränderlichem Querschnitte.

Der Stab möge auf eine Länge l_1 den Querschnitt F_1, auf eine Länge l_2 den grösseren Querschnitt F_2 haben (Fig. 123). Bringt man ihn dann in ähnlicher Weise, wie auf S. 100 beschrieben, durch eine allmählich anwachsende Zugkraft in Spannung, so werden die Spannungen in den verschiedenen Querschnitten σ_1 und σ_2 betragen, zwischen denen die Beziehung $\sigma_2 F_2 = \sigma_1 F_1$, mithin

Fig. 123.



$$\sigma_2 = \sigma_1 \frac{F_1}{F_2} = \frac{\sigma_1}{n}$$

besteht, wenn man $F_2 = n F_1$ setzt. Bei der Erzeugung dieser