Der gefährliche Querschnitt liegt (wie bei gleichförmiger Drehung) dicht an der Achse mit $x = 0$, und es wird

$$\sigma_{max} = \gamma \left\{ \frac{c^2}{2g} + \frac{p}{g} \frac{Fl^2}{3\mathfrak{W}} \right\}.$$

Beispiel: Solchen Spannungen sind besonders Degenklingen ausgesetzt, wenn ihnen durch die Hand des Fechters eine heftige Drehbeschleunigung in der Richtung quer zur Schärfe ertheilt wird. Nimmt man den Querschnitt annähernd als Rechteck, die Breite $b = 1{,}5$ cm die Dicke $d = 0{,}2$ cm, die Länge $l = 80$ cm an, so wird $\mathfrak{W} = \frac{1}{6} Fd$. Die Spannung σ_1 ist in solchen Fällen unbedeutend, da die einzelnen Bewegungen viel zu kurze Dauer haben, als dass bedeutende Umfangsgeschwindigkeiten c entstehen könnten. Es sind hier nur die Umfangsbeschleunigungen wichtig. Wir setzen daher

$$\sigma = \sigma_2 = \gamma \frac{p}{g} \frac{Fl^2}{3\mathfrak{W}} = \gamma \frac{p}{g} \frac{2\,l^2}{d} = 0{,}003 \cdot \frac{p}{g} \frac{2 \cdot 80^2}{0{,}2} = 512 \frac{p}{g}.$$

Es erfordert dies ein Kraftmoment der Hand

$$\mathfrak{M} = \varepsilon J = \frac{1}{3} M l^2 \varepsilon = \frac{1}{3} p M l = \frac{1}{3} \frac{p}{g} \gamma F l^2 = \frac{1}{3} \frac{p}{g} \cdot 15{,}36 \text{ cmkg}.$$

Ist in einem besonderen Falle $p = 3g$, so wird die stärkste Spannung $\sigma = 1536$ at, das Kraftmoment der Hand $\mathfrak{M} = 15{,}4$ cmkg. Die Faust eines geübten Fechters kann wohl das 10fache leisten, daher die Klinge durch einen Lufthieb zerbrechen.

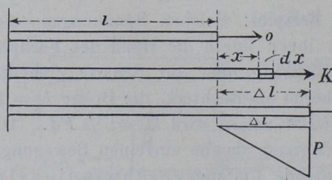
C. Formänderungs-Arbeit elastisch-fester Körper.

Während bisher das Vorhandensein eines bestimmten Spannungszustandes angenommen wurde, sollen nun die Vorgänge beim Entstehen der Spannungen und Formänderungen untersucht werden. Es kommt hierbei vor Allem auf die Bestimmung der bei der Formänderung von den äusseren und inneren Kräften verrichteten Arbeit, der sog. Formänderungs-Arbeit, an.

I. Arbeit bei der Verlängerung und Verkürzung gerader Stäbe.

Ein prismatischer Stab von der Länge l und dem Querschnitt F sei an dem einen Ende (links in Fig. 116) befestigt; am anderen freien Ende wirke eine im Schwerpunkte der Endfläche angreifende Zugkraft K. Diese Kraft soll aber der Grösse nach nicht gleichbleibend sein, sondern sie soll langsam und stetig von Null bis zu einem Werthe P anwachsen. Dann wird mit jeder kleinen Zunahme der Kraft eine kleine Zunahme der Verlängerung verbunden sein. Die Zunahme der Kraft möge langsam vor sich gehen, damit auch die Verlängerung langsam erfolge, daher kein Theil des Stabes ein nennenswerthes Arbeitsvermögen erfahre, so dass man in jedem Augenblicke den Stab als in Ruhe, im Gleichgewichte, betrachten kann. Dem beliebigen Zwischenwerthe K der veränderlichen Kraft entspreche eine Verlängerung x, mithin ein Verlängerungs-Verhältnis oder eine Dehnung $\varepsilon_x = x : l$ (s. S. 5), während dem Endwerthe P der Kraft eine Verlängerung Δl, also eine Dehnung $\varepsilon = \Delta l : l$ zugehöre. Bei einer unendlich kleinen Zunahme der Verlängerung x um dx verrichtet K die Arbeit $d\mathfrak{A} = K dx$. Setzt man nun $K = F\sigma_x$, $P = F\sigma$, so wird auch

Fig. 116.



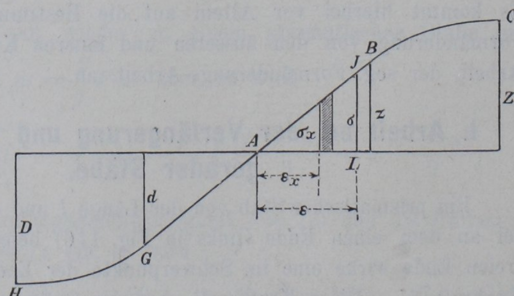
$$d\mathfrak{A} = F\sigma_x l \cdot d\varepsilon_x$$

und die Gesammtarbeit bei der Verlängerung um $\Delta l = l\varepsilon$:

$$\mathfrak{A} = Fl\int_0^{\varepsilon} \sigma_x d\varepsilon_x. \tag{1}$$

Die Beziehung zwischen σ_x und ε_x wird mittels der Dehnungslinie (s. S. 6) zum Ausdrucke gebracht. Hat diese für den vorliegenden Körper die Form $HGABC$ (Fig. 117), wobei die von A aus gemessenen Abscissen die Dehnungen ε_x, die entsprechenden Ordinaten die Spannungen σ_x bedeuten, so ist $\sigma_x d\varepsilon_x$ in der letzten Gleichung ein Flächenstreifen der Dehnungslinie,

Fig. 117.



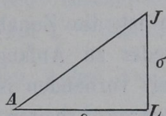
mithin das Integral die ganze Fläche von A bis zu dem Endwerthe $\varepsilon = AL$ der erzeugten Dehnung, d. h. die Fläche AJL, so dass die zur Verlängerung um $\Delta l = l\varepsilon$ erforderliche Arbeit wird:

2) $$\mathfrak{A} = F \cdot l \cdot AJL.$$

Ist die Dehnungslinie bekannt, so kann man die Fläche AJL stets ermitteln.

Für die weiteren Entwickelungen nehmen wir ein gleich bleibendes Verhältnis zwischen Spannung und Dehnung an, setzen also voraus, dass die Spannung z an der Elasticitäts- oder Proportionalitätsgrenze nicht überschritten werde (vergl. S. 5/6). Dann ist AJL ein Dreieck von der Fläche $^1/_2\,\sigma\varepsilon$ (Fig. 118), so dass

Fig. 118.



3) $$\mathfrak{A} = {}^1/_2\, Fl\sigma\varepsilon = {}^1/_2\, P \cdot \Delta l$$

wird, wofür man wegen $\varepsilon = \sigma : E$ auch schreiben kann

4) $$\mathfrak{A} = \frac{Fl\sigma^2}{2E}.$$

Bezeichnet man den Rauminhalt Fl des Stabes mit V, so wird noch einfacher

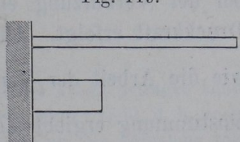
5) $$\mathfrak{A} = \frac{V}{2}\,\frac{\sigma^2}{E}.$$

Dies ist die Arbeit, welche erforderlich ist, um einen prismatischen Stab vom Rauminhalt V aus dem spannungslosen Zustande in den Zustand einer überall gleichen Spannung σ zu versetzen.

Am leichtesten zu merken ist die Form $\mathfrak{A} = {}^1/_2\, P \cdot \Delta l$, Inhalt des Dreiecks in Fig. 116, unten; $^1/_2\, P$ ist die mittlere Kraft, Δl der Weg des Angriffspunktes.

Bei Gl. 5 ist zunächst auffällig, dass die Verlängerungsarbeit nicht von dem Querschnitt und der Länge des Stabes im Einzelnen, sondern nur von seinem Inhalte V abhängt, dass also ein langer Stab von kleinem Querschnitte dieselbe Arbeit zur Erzeugung der Spannung σ erfordert wie ein kurzer, dicker Stab (Fig. 119), wenn beide nur gleichen Rauminhalt haben. Es erklärt sich dies (abgesehen von der vorstehenden Ableitung) daraus, dass die Arbeit ein Produkt aus

Fig. 119.



dem Wege $\Delta l = l\sigma : E$ und dem Mittelwerthe der gleichmässig von 0 bis P anwachsenden Kraft, d. h. $1/2\, P = 1/2\, \sigma F$ ist. Bei dem dünnen, langen Stabe ist $1/2\, P$ verhältnismässig klein, aber Δl gross; bei dem dicken Stabe dagegen ist $1/2\, P$ gross und Δl entsprechend kleiner, so dass das Produkt in beiden Fällen den gleichen Werth erhält.

Wendet man auf diesen Vorgang der langsamen Verlängerung das allgemeine Gesetz der Arbeit (1. Theil, S. 143, Gl. 1) an:

$$\Sigma\, 1/2\, m v^2 - \Sigma\, 1/2\, m c^2 = \Sigma \mathfrak{A}_k + \Sigma \mathfrak{A}_i\,,$$

so ist die Zunahme des Arbeitsvermögens = Null zu setzen, da weder zu Anfang noch zu Ende eine nennenswerthe Geschwindigkeit vorhanden ist. Daher muss die Summe der äusseren und der inneren Arbeiten Null sein. Da nun die Arbeit der äusseren Kraft $\mathfrak{A}_k = \frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E}$ gefunden wurde, so muss die Arbeit der inneren Spannkräfte

$$6) \qquad \mathfrak{A}_i = -\frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E} = -\frac{P}{2}\Delta l$$

sein.

Kehrt der Stab aus dem Zustande der Spannung σ langsam in den spannungslosen Zustand zurück, so hat die Richtung der Bewegung des Angriffspunktes der Zugkraft entgegengesetzten Sinn im Vergleiche mit dem Sinne der Kraft, mithin kehrt sich das Vorzeichen von $\mathfrak{A}_k$ um, es wird $\mathfrak{A}_k = -\frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E}$; zugleich wird dann $\mathfrak{A}_i = +\frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E}$.

Wird ein Stab durch eine allmählich anwachsende Druckkraft um Δl verkürzt, so verrichtet die Kraft eine positive Arbeit, weil bei der Verkürzung eine Bewegung des Stabendes im Sinne der Druckkraft erfolgt. Diese Arbeit berechnet man in gleicher Weise wie die Arbeit der Verlängerung zu $\mathfrak{A} = +\frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E}$. Die Übereinstimmung ergiebt sich auch schon daraus, dass die Vertauschung der Zugspannung $+\sigma$ mit der Druckspannung $-\sigma$ in σ^2 keine Änderung herbeiführt.

Bei der Verlängerung wie bei der Verkürzung ist, wenn man vom spannungslosen Zustande ausgeht, die äussere Arbeit positiv, die innere negativ, für die Rückkehr in den spannungslosen Zustand gilt das Entgegengesetzte. Der absolute Werth dieser Arbeiten ist

$$\frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E}.$$

Es ist nützlich, die Verlängerungs- und Verkürzungs-Arbeit, welche prismatische Stäbe aus verschiedenem Stoff innerhalb der Elasticitätsgrenze ertragen können, vergleichend zusammenzustellen. Man bezieht diese Arbeiten zweckmässig auf 1 ccm Rauminhalt, hat also mit $V = 1$ nur $\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E}$ zu berechnen, wobei $\sigma = z$ bezw. d (Spannungen von der Elasticitätsgrenze) zu setzen ist. Auf Grund der Zahlenwerthe der Tabelle S. 8 ergeben sich dann folgende Arbeitswerthe in $^{\text{cmkg}}/_{\text{ccm}}$:

Formänderungs-Arbeit bis zur Elasticitätsgrenze für 1 ccm.

Stoff	Verlängerungs-Arbeit	Verkürzungs-Arbeit
Gusseisen	$\frac{1}{2}\frac{600^2}{1\,000\,000} = 0{,}18$	$\frac{1}{2}\frac{1600^2}{1\,000\,000} = 1{,}28$
Stabeisen	$\frac{1}{2}\frac{1600^2}{2\,000\,000} = 0{,}64$	$\frac{1}{2}\frac{1600^3}{2\,000\,000} = 0{,}64$
Gussstahl	$\frac{1}{2}\frac{4500^2}{2\,200\,000} = 4{,}6$	$\frac{1}{2}\frac{4500^2}{2\,200\,000} = 4{,}6$
Holz	$\frac{1}{2}\frac{250^2}{120\,000} = 0{,}26$	$\frac{1}{2}\frac{170^2}{120\,000} = 0{,}12$
Glas	$\frac{1}{2}\frac{340^2}{1\,000\,000} = 0{,}058$	$\frac{1}{2}\frac{1450^2}{1\,000\,000} = 1{,}05$
Kautschuk	$\frac{1}{2}\frac{20^2}{10} = 20$	

Hierbei ist zn beachten, dass Gussstahl 7 Mal so viel Arbeit ertragen kann wie Stabeisen, während er gegenüber ruhender Last nur 4500 : 1600, d. h. noch nicht 3 Mal so widerstandsfähig ist. Wo es sich daher um die Aufnahme von Arbeiten handelt, kann der kostspielige Gussstahl vortheilhafter sein als Stabeisen. Holz ergiebt grössere Verlängerungsarbeit als Gusseisen; es ist in dieser Beziehung der kleine Werth von E, d. h. die grössere Nachgiebigkeit von Nutzen. In erheblichem Maſse günstig ist dieser Umstand beim Kautschuk. Dieser Stoff ist bei gleichem Rauminhalte dem Gussstahl etwa 4,3 Mal überlegen. Kautschuk würde daher für Feder-Anordnungen, bei denen es sich um die Aufnahme von Arbeit handelt, der vortheilhafteste Stoff sein, wenn er eine grössere Dauer hätte. In früherer Zeit hat man bei den Eisenbahn-Fuhrwerken die Kautschukfedern in grossem Umfange verwandt, hat aber gefunden, dass Kautschuk seine guten Eigenschaften zu bald verliert. Guter Kautschuk bleibt freilich im spannungslosen Zustande unter Umständen 30 Jahre lang gut elastisch, im gespannten Zustande aber wird er bald brüchig und hart.

a) Einwirkung plötzlicher Belastung. Hängt ein Körper vom Gewichte Q ruhend am unteren Ende eines lothrechten, oben befestigten Stabes vom Querschnitt F und der Länge l, so herrscht in dem Stabe, dessen Eigengewicht wir vernachlässigen, die Spannung

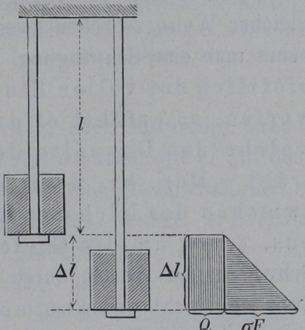
7) $$\sigma_0 = Q : F,$$

und seine elastische Verlängerung beträgt $\Delta l_0 = \frac{Q}{F} \cdot \frac{l}{E}$.

Wird aber der zu Anfang in geeigneter Weise unterstützte Körper mit dem unteren Ende des spannungslosen Stabes verbunden und dann seiner Unterstützung plötzlich beraubt, so übt der Stab im nächsten Augenblicke noch keine Kraft auf den Körper aus, weil er noch die Länge l des spannungslosen Zustandes hat. Der Körper steht also anfänglich unter alleiniger Wirkung der Schwere und wird eine lothrechte Bewegung mit der Fallbeschleunigung beginnen (Fig. 120, linke Seite). Hierbei erfährt der Stab eine zunehmende Verlängerung, also auch eine wachsende Spannkraft, die dem Gewichte Q entgegenwirkt. Aber erst, wenn der Körper um die Grösse $\Delta l_0 = \frac{Q}{F} \cdot \frac{l}{E}$ gesunken ist, hat die Spannkraft die Grösse Q erreicht, so dass in diesem Augenblicke die Beschleunigung des Körpers Null beträgt. Da bis hierher die Bewegung eine beschleunigte war, so wird der Körper eine gewisse Geschwindigkeit c erlangt haben, die erst bei weiterer Verlängerung des Stabes, bei weiterem Anwachsen seiner Spannkraft allmählich zu Null gemacht werden kann. Der Stab wird also eine grösste Verlängerung $\Delta l > \Delta l_0$, daher auch eine stärkste Spannung $\sigma > \sigma_0$ erfahren. Diese Werthe Δl und σ lassen sich mittels des Satzes der Arbeit berechnen.

Zu Anfang hatte der Körper die Geschwindigkeit Null, das gleiche findet statt in dem Augenblicke der stärksten Verlängerung der Stange (Fig. 120, rechte Seite); denn wenn im nächsten Zeittheilchen dt die Weglänge ds Null betragen soll, so muss $v = ds : dt =$ Null sein. In dem Verlaufe der Abwärts-Bewegung ist daher die gesammte Änderung des Arbeitsvermögens des Körpers Null, somit auch die gesammte Arbeit. Nun verrichtet das Gewicht Q die Arbeit $Q \Delta l$, dargestellt durch ein Rechteck. Die Arbeit der inneren Kräfte aber beträgt, wenn der Stab vollkommen elastisch bleibt, längs eines Weges Δl (nach Gl. 6, S. 102): $-\frac{P}{2}\Delta l$, dargestellt durch ein Dreieck, wenn P den (grössten) Endwerth der Spannkraft $= \sigma F$ bedeutet. Die absoluten Werthe beider Arbeiten, d. h. die Inhalte der beiden Figuren müssen einander gleich sein, damit die Arbeitssumme Null werde. Also wird

Fig. 120.



$$\tfrac{1}{2}\sigma F \Delta l = Q \Delta l, \quad \text{oder}$$

9) $$\sigma = 2Q : F = 2\sigma_0 \quad \text{und ebenso}$$

10) $$\Delta l = 2\Delta l_0.$$

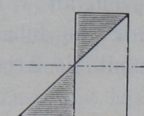
In der tiefsten Lage beträgt die Spannkraft des Stabes $\sigma F = 2Q$; der Körper steht augenblicklich unter Einwirkung einer aufwärts gerichteten Mittelkraft $2Q - Q = Q$ und erfährt dadurch eine aufwärts gerichtete Beschleunigung g. Die Spannkraft wird so lange über die Schwere das Uebergewicht haben, bis wieder die Gleichgewichtslage erreicht ist. Der Körper wird aber erst wieder die Geschwindigkeit Null haben, wenn er um h gestiegen ist, wenn die positive Arbeit des sich verkürzenden Körpers gleich dem absoluten Werthe der negativen Arbeit der Schwere, wenn also

$$\frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E} = Qh$$

geworden ist. Setzt man hierin $V = Fl$, $\sigma = 2Q : F$ ein, so entsteht $h = 2\frac{Ql}{EF} = 2\varDelta l_0 = \varDelta l$, d. h. der Körper kommt auf die ursprüngliche Höhe zurück, und nun kehren die Vorgänge der ersten Auf- und Nieder-Bewegung fortgesetzt wieder. Eine solche, in gleicher Weise zwischen zwei Orten hin und her gehende Bewegung nennt man eine Schwingung. Also: Wird ein elastischer Stab plötzlich der vollen Einwirkung eines Gewichtes unterworfen, so erfährt er dadurch eine stärkste Spannung, welche das Doppelte der Gleichgewichtsspannung beträgt. Der an dem Stabe hängende Körper führt zwischen der höchsten und tiefsten Lage Schwingungen aus, u. zw. um die Gleichgewichtslage als Mitte. Diese Schwingungen werden durch Luftwiderstand und dadurch, dass der Stab sich nicht vollkommen elastisch verhält, allmählich kleiner, und Stab und Körper gehen endlich in die Ruhe- oder Gleichgewichtslage über.

Die veränderliche, auf den Körper wirkende Gesammtkraft bringt man am deutlichsten zur Anschauung, wenn man die beiden Arbeitsfiguren entgegengesetzter Vorzeichen in einander zeichnet, so dass man den Unterschied der beiden Kräfte unmittelbar abmessen kann.

Fig. 121.

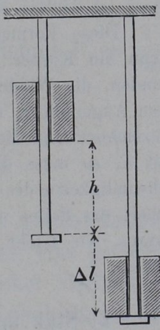


Derartige Fälle plötzlicher Belastung kommen in der Anwendung sehr häufig vor. Und dieser Umstand ist einer der Gründe dafür, dass man (s. S. 10) bei einer statischen Berechnung die zulässige Spannung σ_0 erheblich kleiner als die Spannung an der Elasticitätsgrenze wählt. Denn bemisst man den Querschnitt F des Stabes unter Annahme des Gleichgewichts nach einer Spannung $0{,}5\,z$, so wird bei plötzlicher Belastung die wahre Spannung $= z$ (Elasticitätsgrenze) werden.

Will man ein kleines Gewicht an einen Kautschukfaden, oder ein grosses an eine Hängstange, eine Kette, einen Krahn derartig anhängen, dass in den genannten elastischen Körpern die stärkste Spannung nur wenig grösser als die Gleichgewichts-Spannung werde, so muss man dem Körper die anfängliche Unterstützung nicht plötzlich nehmen, sondern muss die unterstützenden Vorrichtungen (bei einem kleinen Gewichte vielleicht die Hand, bei einem grösseren eine Windevorrichtung) langsam senken. Dabei wird dann das Gewicht des Körpers allmählich auf den Faden, die Stange oder Kette übertragen, während die Stützvorrichtung in demselben Maſse entlastet wird. Auf diese Weise erfährt der Körper keine nennenswerthe Geschwindigkeit und wird in dem Augenblicke, wo die Spannkraft des Fadens, der Stange oder Kette gleich dem Gewichte des Körpers geworden ist, seine Senkung beenden und im Gleichgewichte verbleiben. Bei verhältnismässig grossen Lasten ist dieses Verfahren schwer anzuwenden, deshalb darf man bei der Berechnung von Hängestangen, Ketten, Krahnen u. dergl. auf diesen günstigen Umstand nicht sicher rechnen und wird daher die zulässige Spannung (für ruhende Last) entsprechend klein anzusetzen haben.

Die Gleichgewichtsspannung σ_0 wird in noch stärkerem Grade überschritten, wenn der Körper in dem Augenblicke, wo er auf den spannungslosen Stab zu wirken beginnt, schon eine Geschwindigkeit c im Sinne der Verlängerung der Stange hat, indem er, etwa mittels einer Bohrung auf dem Stabe gleitend, von einer Höhe h auf einen Vorsprung am unteren Stabende herabfällt (Fig. 122). Ist Δl die grösste Verlängerung des Stabes, nach deren Entstehung der fallende Körper die Geschwindigkeit Null erreicht, so ist zwischen der höchsten und tiefsten Lage des Körpers wiederum die Änderung des Arbeitsvermögens Null, mithin, da der Körper um $h + \Delta l$ sinkt:

Fig. 122.



11) $$\frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E} = Q(h + \Delta l),$$

oder, mit $\Delta l = \dfrac{\sigma l}{E}$:

$$\frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E} = Qh + \frac{Q\sigma l}{E}.$$

Diese Gleichung giebt, nach σ aufgelöst:

$$\sigma = \frac{Ql}{V} \pm \sqrt{\frac{Q^2 l^2}{V^2} + \frac{2QhE}{V}},$$

oder, wenn man $V = Fl$, $Q : F = \sigma_0$ setzt:

12) $$\sigma = \sigma_0 + \sqrt{\sigma_0^2 + 2\sigma_0 \frac{h}{l} E}.$$

(Ein negatives Zeichen vor dem Wurzelausdrucke hat für die vorliegende Aufgabe keine Bedeutung, da es sich nur um einen positiven Werth σ handeln kann.)

Beispiel: Der Eisenstab habe $F = 4$ qcm Querschnitt und $l = 5$ m $= 500$ cm Länge, der Körper $Q = 100$ kg Gewicht und nur $h = 10$ cm Fallhöhe; dann ist die Gleichgewichts-Spannung $\sigma_0 = 25$ at, d. h. ganz unerheblich. Es wird aber

$$\sigma = 25 + \sqrt{625 + 2000000} = 1439 \text{ at}.$$

In Folge der Fallhöhe von 10 cm entsteht also eine im Vergleiche mit der Gleichgewichts-Spannung sehr erhebliche Anstrengung des Stabes. Die entsprechende Verlängerung beträgt

$$\varDelta l = \frac{1439 \cdot 500}{2000000} = 0{,}36 \text{ cm},$$

ist also gegen $h = 10$ cm unerheblich. Für die meisten Fälle kann man $\varDelta l$ gegen h vernachlässigen; dann wird aus Gl. 11:

$$13) \qquad \frac{V}{2} \frac{\sigma^2}{E} = Q h,$$

mithin, erheblich einfacher,

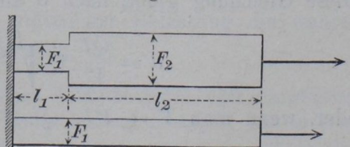
$$14) \qquad \sigma = \sqrt{2 \sigma_0 \frac{h}{l} E} = 1414 \text{ at}.$$

Diese Formel gilt auch für die Spannung des Seiles einer Dampfwinde, wenn ein Körper vom Gewichte Q mit dem anfänglich schlaffen Seile verbunden, die Winde nun aber derartig in Gang gesetzt wird, dass das Seil in dem Augenblicke, wo es straff wird, sich mit einer Geschwindigkeit c bewegt. Bezeichnet man die dieser Geschwindigkeit entsprechende Geschwindigkeitshöhe mit h, so muss die Arbeit Qh, welche nöthig ist, um der Last Q die Geschwindigkeit c des Seiles mitzutheilen, durch Vermittelung der Formänderungsarbeit des Seiles von der Winde auf die Last übertragen werden. Man sieht daraus, wie leicht bei unvorsichtigem Betriebe der Winde Seilrisse entstehen können.

b) Stab mit sprungweise veränderlichem Querschnitte.

Der Stab möge auf eine Länge l_1 den Querschnitt F_1, auf eine Länge l_2 den grösseren Querschnitt F_2 haben (Fig. 123). Bringt man ihn dann in ähnlicher Weise, wie auf S. 100 beschrieben, durch eine allmählich anwachsende Zugkraft in Spannung, so werden die Spannungen in den verschiedenen Querschnitten σ_1 und σ_2 betragen, zwischen denen die Beziehung $\sigma_2 F_2 = \sigma_1 F_1$, mithin

Fig. 123.



$$\sigma_2 = \sigma_1 \frac{F_1}{F_2} = \frac{\sigma_1}{n}$$

besteht, wenn man $F_2 = n F_1$ setzt. Bei der Erzeugung dieser

Spannungen muss die wirkende Zugkraft eine Arbeit verrichten, welche nach Gl. 5, S. 101 beträgt:

$$\mathfrak{A} = \frac{V_1}{2}\frac{\sigma_1^2}{E} + \frac{V_2}{2}\frac{\sigma_2^2}{E},$$

oder, auf σ_1 zurückgeführt:

15) $$\mathfrak{A} = \frac{\sigma_1^2}{2E}\left\{V_1 + \frac{V_2}{n^2}\right\}.$$

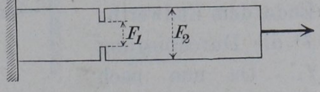
Für die Sicherheit des Stabes im Gleichgewichtszustande kommt nur der kleinste Querschnitt in Frage. Der Rauminhalt $(F_2 - F_1) l_2$, den der vorliegende Stab mehr enthält als ein solcher mit überall gleichem Querschnitt F_1, ist für den Ruhezustand eine Verschwendung. Für die mögliche Arbeitsleistung ist diese Verschwendung an Stoff aber sogar schädlich; denn ein Stab von der Länge $l_1 + l_2$ und dem einheitlichen Querschnitt F_1 hat einen Rauminhalt $V_1 + \frac{V_2}{n}$ und nimmt bis zur Spannung σ_1 eine Arbeit auf

16) $$\mathfrak{A}_1 = \frac{\sigma_1^2}{2E}\left(V_1 + \frac{V_2}{n}\right).$$

Da $n > 1$, so ist $\mathfrak{A}_1 > \mathfrak{A}$, d. h. der Stab von gleichmässiger Stärke erträgt, bis er auf eine Spannung σ_1 kommt, eine grössere Arbeit als der ungleichmässig starke Stab von gleicher Stoffmenge. Gegen Arbeitswirkung verstärkt wird daher der ungleichmässige Stab durch Fortnahme des für den Ruhezustand nur Ueberflüssigen (nach A. Ritter, Technische Mechanik).

Diese Betrachtungen finden Anwendung auf einen Stab, dessen Querschnitt F_2 auf eine geringe Länge l_1 durch Einsägen, Einschneiden oder auf irgend andere Weise eine Schwächung auf die Querschnittsgrösse F_1 erfahren hat. Es ist dann V_1 gegen V_2 zu vernachlässigen und es wird, wenn man V_2 als Gesammtinhalt nunmehr V nennt,

Fig. 124.



17) $$\mathfrak{A} = \frac{\sigma_1^2}{2E}\frac{V}{n^2},$$

während für den gleichmässig auf den Querschnitt F_1 und den Inhalt $V : n$ gebrachten Stab

18) $$\mathfrak{A}_1 = \frac{\sigma_1^2}{2E} \frac{V}{n}$$

wird, so dass wird $\mathfrak{A}_1 : \mathfrak{A} = n$.

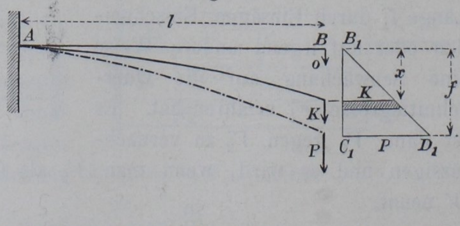
Die Widerstandsfähigkeit eines Stabes gegen Arbeit wird durch Einsägen auf halben Querschnitt auf $^1/_4$ vermindert, aber auf $^1/_2$ des ursprünglichen Werthes wieder erhöht, wenn man durch Wegnahme der Hälfte des Stoffes in zweckmässiger Weise überall den gleichen Querschnitt $F_1 = {}^1/_2 F_2$ herstellt. Noch mehrfach wird sich das Ergebnis zeigen, dass Körper überall gleicher Sicherheit hinsichtlich der Arbeitsleistung überraschend vortheilhaft sind. Der innere Grund liegt darin, dass der zulässige Endwerth P der Zugkraft durch F_1 bedingt ist, dass der übermässig grosse Querschnitt F_2 aber die Verlängerung Δl vermindert, wodurch auch das Produkt $^1/_2 P \Delta l = \mathfrak{A}$ eine Verminderung erfährt. Grosse Formänderungen sind für die Aufnahme von Arbeit vortheilhaft. Bei Ankertauen und Ankerketten, die das Arbeitsvermögen bewegter Schiffe durch die Arbeit ihrer Spannkräfte zu vernichten haben, sind Fehlstellen besonders verhängnisvoll.

2. Biegungs-Arbeit.

a) Prismatischer Stab.

Ein prismatischer, bei A (Fig. 125) wagerecht eingespannter Stab werde am freien Ende durch eine von Null ab allmählich bis P anwachsende Kraft gebogen. Dem beliebigen Zwischenwerthe K der Kraft entspricht eine Biegung x am freien Ende, dem Endwerthe P die Durchbiegung f. Da nun nach Gl. 7, S. 43:

Fig. 125.



$$x = \frac{Kl^3}{3EJ},$$

d. h. K mit x verhältnisgleich, so ist die Beziehung zwischen beiden Grössen wiederum ein Dreieck $B_1 C_1 D_1$ mit $B_1 C_1 = f$, $C_1 D_1 = P$.