Der gefährliche Querschnitt liegt (wie bei gleichförmiger Drehung) dicht an der Achse mit $x = 0$, und es wird

$$\sigma_{max} = \gamma \left\{ \frac{c^2}{2g} + \frac{p}{g} \frac{Fl^2}{3\mathfrak{W}} \right\}.$$

Beispiel: Solchen Spannungen sind besonders Degenklingen ausgesetzt, wenn ihnen durch die Hand des Fechters eine heftige Drehbeschleunigung in der Richtung quer zur Schärfe ertheilt wird. Nimmt man den Querschnitt annähernd als Rechteck, die Breite $b = 1{,}5$ cm die Dicke $d = 0{,}2$ cm, die Länge $l = 80$ cm an, so wird $\mathfrak{W} = {}^1/_6\, Fd$. Die Spannung σ_1 ist in solchen Fällen unbedeutend, da die einzelnen Bewegungen viel zu kurze Dauer haben, als dass bedeutende Umfangs*geschwindigkeiten* c entstehen könnten. Es sind hier nur die Umfangs*beschleunigungen* wichtig. Wir setzen daher

$$\sigma = \sigma_2 = \gamma \frac{p}{g} \frac{Fl^2}{3\mathfrak{W}} = \gamma \frac{p}{g} \frac{2\, l^2}{d} = 0{,}003 \cdot \frac{p}{g} \frac{2 \cdot 80^2}{0{,}2} = 512 \frac{p}{g}.$$

Es erfordert dies ein Kraftmoment der Hand

$$\mathfrak{M} = \varepsilon J = \frac{1}{3} M l^2 \varepsilon = \frac{1}{3} p M l = \frac{1}{3} \frac{p}{g} \gamma F l^2 = \frac{1}{3} \frac{p}{g} \cdot 15{,}36 \text{ cmkg}.$$

Ist in einem besonderen Falle $p = 3g$, so wird die stärkste Spannung $\sigma = 1536$ at, das Kraftmoment der Hand $\mathfrak{M} = 15{,}4$ cmkg. Die Faust eines geübten Fechters kann wohl das 10fache leisten, daher die Klinge durch einen Lutthieb zerbrechen.

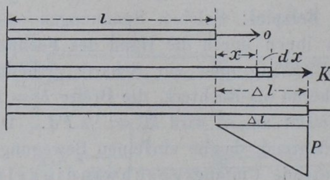
C. Formänderungs-Arbeit elastisch-fester Körper.

Während bisher das Vorhandensein eines bestimmten Spannungszustandes angenommen wurde, sollen nun die Vorgänge beim Entstehen der Spannungen und Formänderungen untersucht werden. Es kommt hierbei vor Allem auf die Bestimmung der bei der Formänderung von den äusseren und inneren Kräften verrichteten Arbeit, der sog. Formänderungs-Arbeit, an.

I. Arbeit bei der Verlängerung und Verkürzung gerader Stäbe.

Ein prismatischer Stab von der Länge l und dem Querschnitt F sei an dem einen Ende (links in Fig. 116) befestigt; am anderen freien Ende wirke eine im Schwerpunkte der Endfläche angreifende Zugkraft K. Diese Kraft soll aber der Grösse nach nicht gleichbleibend sein, sondern sie soll langsam und stetig von Null bis zu einem Werthe P anwachsen. Dann wird mit jeder kleinen Zunahme der Kraft eine kleine Zunahme der Verlängerung verbunden sein. Die Zunahme der Kraft möge langsam vor sich gehen, damit auch die Verlängerung langsam erfolge, daher kein Theil des Stabes ein nennenswerthes Arbeitsvermögen erfahre, so dass man in jedem Augenblicke den Stab als in Ruhe, im Gleichgewichte, betrachten kann.

Fig. 116.



Dem beliebigen Zwischenwerthe K der veränderlichen Kraft entspreche eine Verlängerung x, mithin ein Verlängerungs-Verhältnis oder eine Dehnung $\varepsilon_x = x : l$ (s. S. 5), während dem Endwerthe P der Kraft eine Verlängerung Δl, also eine Dehnung $\varepsilon = \Delta l : l$ zugehöre. Bei einer unendlich kleinen Zunahme der Verlängerung x um dx verrichtet K die Arbeit $d\mathfrak{A} = Kdx$. Setzt man nun $K = F\sigma_x$, $P = F\sigma$, so wird auch

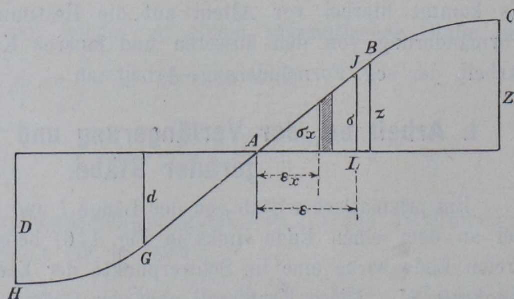
$$d\mathfrak{A} = F\sigma_x l \cdot d\varepsilon_x$$

und die Gesammtarbeit bei der Verlängerung um $\Delta l = l\varepsilon$:

1) $$\mathfrak{A} = Fl\int_0^{\varepsilon}\sigma_x d\varepsilon_x.$$

Die Beziehung zwischen σ_x und ε_x wird mittels der Dehnungslinie (s. S. 6) zum Ausdrucke gebracht. Hat diese für den vorliegenden Körper die Form $HGABC$ (Fig. 117), wobei die von A aus gemessenen Abscissen die Dehnungen ε_x, die entsprechenden Ordinaten die Spannungen σ_x bedeuten, so ist

Fig. 117.



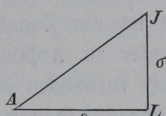
$\sigma_x d\varepsilon_x$ in der letzten Gleichung ein Flächenstreifen der Dehnungslinie, mithin das Integral die ganze Fläche von A bis zu dem Endwerthe $\varepsilon = AL$ der erzeugten Dehnung, d. h. die Fläche AJL, so dass die zur Verlängerung um $\Delta l = l\varepsilon$ erforderliche Arbeit wird:

2) $$\mathfrak{A} = F \cdot l \cdot AJL.$$

Ist die Dehnungslinie bekannt, so kann man die Fläche AJL stets ermitteln.

Für die weiteren Entwickelungen nehmen wir ein gleich bleibendes Verhältnis zwischen Spannung und Dehnung an, setzen also voraus, dass die Spannung z an der Elasticitäts- oder Proportionalitätsgrenze nicht überschritten werde (vergl. S. 5/6). Dann ist AJL ein Dreieck von der Fläche $^1/_2\, \sigma\varepsilon$ (Fig. 118), so dass

Fig. 118.



3) $$\mathfrak{A} = {}^1/_2\, Fl\sigma\varepsilon = {}^1/_2\, P \cdot \Delta l$$

wird, wofür man wegen $\varepsilon = \sigma : E$ auch schreiben kann

4) $$\mathfrak{A} = \frac{Fl\sigma^2}{2E}.$$

Bezeichnet man den Rauminhalt Fl des Stabes mit V, so wird noch einfacher

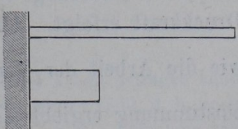
5) $$\mathfrak{A} = \frac{V}{2} \frac{\sigma^2}{E}.$$

Dies ist die Arbeit, welche erforderlich ist, um einen prismatischen Stab vom Rauminhalt V aus dem spannungslosen Zustande in den Zustand einer überall gleichen Spannung σ zu versetzen.

Am leichtesten zu merken ist die Form $\mathfrak{A} = {}^1/_2\, P \cdot \Delta l$, Inhalt des Dreiecks in Fig. 116, unten; $^1/_2\, P$ ist die mittlere Kraft, Δl der Weg des Angriffspunktes.

Bei Gl. 5 ist zunächst auffällig, dass die Verlängerungsarbeit nicht von dem Querschnitt und der Länge des Stabes im Einzelnen, sondern nur von seinem Inhalte V abhängt, dass also ein langer Stab von kleinem Querschnitte dieselbe Arbeit zur Erzeugung der Spannung σ erfordert wie ein kurzer, dicker Stab (Fig. 119), wenn beide nur gleichen Rauminhalt haben. Es erklärt sich dies (abgesehen von der vorstehenden Ableitung) daraus, dass die Arbeit ein Produkt aus

Fig. 119.



dem Wege $\varDelta l = l\sigma : E$ und dem Mittelwerthe der gleichmässig von 0 bis P anwachsenden Kraft, d. h. $1/2\, P = 1/2\, \sigma F$ ist. Bei dem dünnen, langen Stabe ist $1/2\, P$ verhältnismässig klein, aber $\varDelta l$ gross; bei dem dicken Stabe dagegen ist $1/2\, P$ gross und $\varDelta l$ entsprechend kleiner, so dass das Produkt in beiden Fällen den gleichen Werth erhält.

Wendet man auf diesen Vorgang der langsamen Verlängerung das allgemeine Gesetz der Arbeit (1. Theil, S. 143, Gl. 1) an:

$$\Sigma\, 1/2\, m v^2 - \Sigma\, 1/2\, m c^2 = \Sigma \mathfrak{A}_k + \Sigma \mathfrak{A}_i\,,$$

so ist die Zunahme des Arbeitsvermögens = Null zu setzen, da weder zu Anfang noch zu Ende eine nennenswerthe Geschwindigkeit vorhanden ist. Daher muss die Summe der äusseren und der inneren Arbeiten Null sein. Da nun die Arbeit der äusseren Kraft $\mathfrak{A}_k = \frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E}$ gefunden wurde, so muss die Arbeit der inneren Spannkräfte

$$6)\qquad \mathfrak{A}_i = -\frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E} = -\frac{P}{2}\varDelta l$$

sein.

Kehrt der Stab aus dem Zustande der Spannung σ langsam in den spannungslosen Zustand zurück, so hat die Richtung der Bewegung des Angriffspunktes der Zugkraft entgegengesetzten Sinn im Vergleiche mit dem Sinne der Kraft, mithin kehrt sich das Vorzeichen von $\mathfrak{A}_k$ um, es wird $\mathfrak{A}_k = -\frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E}$; zugleich wird dann $\mathfrak{A}_i = +\frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E}$.

Wird ein Stab durch eine allmählich anwachsende **Druckkraft** um $\varDelta l$ verkürzt, so verrichtet die Kraft eine positive Arbeit, weil bei der Verkürzung eine Bewegung des Stabendes im Sinne der Druckkraft erfolgt. Diese Arbeit berechnet man in gleicher Weise wie die Arbeit der Verlängerung zu $\mathfrak{A} = +\frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E}$. Die Übereinstimmung ergiebt sich auch schon daraus, dass die Vertauschung der Zugspannung $+\sigma$ mit der Druckspannung $-\sigma$ in σ^2 keine Änderung herbeiführt.

Bei der Verlängerung wie bei der Verkürzung ist, wenn man vom spannungslosen Zustande ausgeht, die äussere Arbeit positiv, die innere negativ, für die Rückkehr in den spannungslosen Zustand gilt das Entgegengesetzte. Der absolute Werth dieser Arbeiten ist

$$\frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E}.$$

Es ist nützlich, die Verlängerungs- und Verkürzungs-Arbeit, welche prismatische Stäbe aus verschiedenem Stoff innerhalb der Elasticitätsgrenze ertragen können, vergleichend zusammenzustellen. Man bezieht diese Arbeiten zweckmässig auf 1 ccm Rauminhalt, hat also mit $V = 1$ nur $\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E}$ zu berechnen, wobei $\sigma = z$ bezw. d (Spannungen von der Elasticitätsgrenze) zu setzen ist. Auf Grund der Zahlenwerthe der Tabelle S. 8 ergeben sich dann folgende Arbeitswerthe in cmkg/ccm:

Formänderungs-Arbeit bis zur Elasticitätsgrenze für 1 ccm.

Stoff	Verlängerungs-Arbeit	Verkürzungs-Arbeit
Gusseisen	$\frac{1}{2}\frac{600^2}{1\,000\,000} = 0{,}18$	$\frac{1}{2}\frac{1600^2}{1\,000\,000} = 1{,}28$
Stabeisen	$\frac{1}{2}\frac{1600^2}{2\,000\,000} = 0{,}64$	$\frac{1}{2}\frac{1600^3}{2\,000\,000} = 0{,}64$
Gussstahl	$\frac{1}{2}\frac{4500^2}{2\,200\,000} = 4{,}6$	$\frac{1}{2}\frac{4500^2}{2\,200\,000} = 4{,}6$
Holz	$\frac{1}{2}\frac{250^2}{120\,000} = 0{,}26$	$\frac{1}{2}\frac{170^2}{120\,000} = 0{,}12$
Glas	$\frac{1}{2}\frac{340^2}{1\,000\,000} = 0{,}058$	$\frac{1}{2}\frac{1450^2}{1\,000\,000} = 1{,}05$
Kautschuk	$\frac{1}{2}\frac{20^2}{10} = 20$	

Hierbei ist zn beachten, dass Gussstahl 7 Mal so viel Arbeit ertragen kann wie Stabeisen, während er gegenüber ruhender Last nur 4500 : 1600, d. h. noch nicht 3 Mal so widerstandsfähig ist. Wo es sich daher um die Aufnahme von Arbeiten handelt, kann der kostspielige Gussstahl vortheilhafter sein als Stabeisen. Holz ergiebt grössere Verlängerungsarbeit als Gusseisen; es ist in dieser Beziehung der kleine Werth von E, d. h. die grössere Nachgiebigkeit von Nutzen. In erheblichem Maſse günstig ist dieser Umstand beim Kautschuk. Dieser Stoff ist bei gleichem Rauminhalte dem Gussstahl etwa 4,3 Mal überlegen. Kautschuk würde daher für Feder-Anordnungen, bei denen es sich um die Aufnahme von Arbeit handelt, der vortheilhafteste Stoff sein, wenn er eine grössere Dauer hätte. In früherer Zeit hat man bei den Eisenbahn-Fuhrwerken die Kautschukfedern in grossem Umfange verwandt, hat aber gefunden, dass Kautschuk seine guten Eigenschaften zu bald verliert. Guter Kautschuk bleibt freilich im spannungslosen Zustande unter Umständen 30 Jahre lang gut elastisch, im gespannten Zustande aber wird er bald brüchig und hart.

a) Einwirkung plötzlicher Belastung. Hängt ein Körper vom Gewichte Q ruhend am unteren Ende eines lothrechten, oben befestigten Stabes vom Querschnitt F und der Länge l, so herrscht in dem Stabe, dessen Eigengewicht wir vernachlässigen, die Spannung

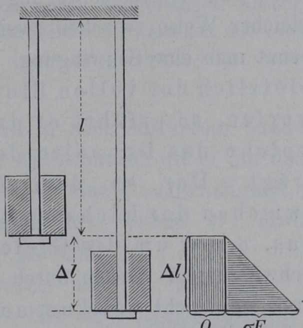
7) $$\sigma_0 = Q : F,$$

und seine elastische Verlängerung beträgt $\varDelta l_0 = \frac{Q}{F} \cdot \frac{l}{E}$.

Wird aber der zu Anfang in geeigneter Weise unterstützte Körper mit dem unteren Ende des spannungslosen Stabes verbunden und dann seiner Unterstützung plötzlich beraubt, so übt der Stab im nächsten Augenblicke noch keine Kraft auf den Körper aus, weil er noch die Länge l des spannungslosen Zustandes hat. Der Körper steht also anfänglich unter alleiniger Wirkung der Schwere und wird eine lothrechte Bewegung mit der Fallbeschleunigung beginnen (Fig. 120, linke Seite). Hierbei erfährt der Stab eine zunehmende Verlängerung, also auch eine wachsende Spannkraft, die dem Gewichte Q entgegenwirkt. Aber erst, wenn der Körper um die Grösse $\varDelta l_0 = \frac{Q}{F} \cdot \frac{l}{E}$ gesunken ist, hat die Spannkraft die Grösse Q erreicht, so dass in diesem Augenblicke die Beschleunigung des Körpers Null beträgt. Da bis hierher die Bewegung eine beschleunigte war, so wird der Körper eine gewisse Geschwindigkeit c erlangt haben, die erst bei weiterer Verlängerung des Stabes, bei weiterem Anwachsen seiner Spannkraft allmählich zu Null gemacht werden kann. Der Stab wird also eine grösste Verlängerung $\varDelta l > \varDelta l_0$, daher auch eine stärkste Spannung $\sigma > \sigma_0$ erfahren. Diese Werthe $\varDelta l$ und σ lassen sich mittels des Satzes der Arbeit berechnen.

Zu Anfang hatte der Körper die Geschwindigkeit Null, das gleiche findet statt in dem Augenblicke der stärksten Verlängerung der Stange (Fig. 120, rechte Seite); denn wenn im nächsten Zeittheilchen dt die Weglänge ds Null betragen soll, so muss $v = ds : dt =$ Null sein. In dem Verlaufe der Abwärts-Bewegung ist daher die gesammte Änderung des Arbeitsvermögens des Körpers Null, somit auch die gesammte Arbeit. Nun verrichtet das Gewicht Q die Arbeit $Q\varDelta l$, dargestellt durch ein Rechteck. Die Arbeit der inneren Kräfte aber beträgt, wenn der Stab vollkommen elastisch bleibt, längs eines Weges $\varDelta l$ (nach Gl. 6, S. 102): $-\dfrac{P}{2}\varDelta l$, dargestellt durch ein Dreieck, wenn P den (grössten) Endwerth der Spannkraft $= \sigma F$ bedeutet. Die absoluten Werthe beider Arbeiten, d. h. die Inhalte der beiden Figuren müssen einander gleich sein, damit die Arbeitssumme Null werde. Also wird

Fig. 120.



$$\tfrac{1}{2}\sigma F \varDelta l = Q \varDelta l, \quad \text{oder}$$

9) $$\sigma = 2Q : F = 2\sigma_0 \quad \text{und ebenso}$$

10) $$\varDelta l = 2\varDelta l_0.$$

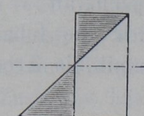
In der tiefsten Lage beträgt die Spannkraft des Stabes $\sigma F = 2Q$; der Körper steht augenblicklich unter Einwirkung einer aufwärts gerichteten Mittelkraft $2Q - Q = Q$ und erfährt dadurch eine aufwärts gerichtete Beschleunigung g. Die Spannkraft wird so lange über die Schwere das Uebergewicht haben, bis wieder die Gleichgewichtslage erreicht ist. Der Körper wird aber erst wieder die Geschwindigkeit Null haben, wenn er um h gestiegen ist, wenn die positive Arbeit des sich verkürzenden Körpers gleich dem absoluten Werthe der negativen Arbeit der Schwere, wenn also

$$\frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E} = Qh$$

geworden ist. Setzt man hierin $V = Fl$, $\sigma = 2Q : F$ ein, so entsteht $h = 2\frac{Ql}{EF} = 2\varDelta l_0 = \varDelta l$, d. h. der Körper kommt auf die ursprüngliche Höhe zurück, und nun kehren die Vorgänge der ersten Auf- und Nieder-Bewegung fortgesetzt wieder. Eine solche, in gleicher Weise zwischen zwei Orten hin und her gehende Bewegung nennt man eine Schwingung. Also: Wird ein elastischer Stab plötzlich der vollen Einwirkung eines Gewichtes unterworfen, so erfährt er dadurch eine stärkste Spannung, welche das Doppelte der Gleichgewichtsspannung beträgt. Der an dem Stabe hängende Körper führt zwischen der höchsten und tiefsten Lage Schwingungen aus, u. zw. um die Gleichgewichtslage als Mitte. Diese Schwingungen werden durch Luftwiderstand und dadurch, dass der Stab sich nicht vollkommen elastisch verhält, allmählich kleiner, und Stab und Körper gehen endlich in die Ruhe- oder Gleichgewichtslage über.

Die veränderliche, auf den Körper wirkende Gesammtkraft bringt man am deutlichsten zur Anschauung, wenn man die beiden Arbeitsfiguren entgegengesetzter Vorzeichen in einander zeichnet, so dass man den Unterschied der beiden Kräfte unmittelbar abmessen kann.

Fig. 121.

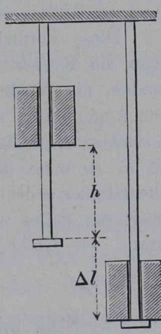


Derartige Fälle plötzlicher Belastung kommen in der Anwendung sehr häufig vor. Und dieser Umstand ist einer der Gründe dafür, dass man (s. S. 10) bei einer statischen Berechnung die zulässige Spannung σ_0 erheblich kleiner als die Spannung an der Elasticitätsgrenze wählt. Denn bemisst man den Querschnitt F des Stabes unter Annahme des Gleichgewichts nach einer Spannung $0{,}5\,z$, so wird bei plötzlicher Belastung die wahre Spannung $= z$ (Elasticitätsgrenze) werden.

Will man ein kleines Gewicht an einen Kautschukfaden, oder ein grosses an eine Hängstange, eine Kette, einen Krahn derartig anhängen, dass in den genannten elastischen Körpern die stärkste Spannung nur wenig grösser als die Gleichgewichts-Spannung werde, so muss man dem Körper die anfängliche Unterstützung nicht plötzlich nehmen, sondern muss die unterstützenden Vorrichtungen (bei einem kleinen Gewichte vielleicht die Hand, bei einem grösseren eine Windevorrichtung) langsam senken. Dabei wird dann das Gewicht des Körpers allmählich auf den Faden, die Stange oder Kette übertragen, während die Stützvorrichtung in demselben Maſse entlastet wird. Auf diese Weise erfährt der Körper keine nennenswerthe Geschwindigkeit und wird in dem Augenblicke, wo die Spannkraft des Fadens, der Stange oder Kette gleich dem Gewichte des Körpers geworden ist, seine Senkung beenden und im Gleichgewichte verbleiben. Bei verhältnismässig grossen Lasten ist dieses Verfahren schwer anzuwenden, deshalb darf man bei der Berechnung von Hängestangen, Ketten, Krahnen u. dergl. auf diesen günstigen Umstand nicht sicher rechnen und wird daher die zulässige Spannung (für ruhende Last) entsprechend klein anzusetzen haben.

Die Gleichgewichtsspannung σ_0 wird in noch stärkerem Grade überschritten, wenn der Körper in dem Augenblicke, wo er auf den spannungslosen Stab zu wirken beginnt, schon eine Geschwindigkeit c im Sinne der Verlängerung der Stange hat, indem er, etwa mittels einer Bohrung auf dem Stabe gleitend, von einer Höhe h auf einen Vorsprung am unteren Stabende herabfällt (Fig. 122). Ist Δl die grösste Verlängerung des Stabes, nach deren Entstehung der fallende Körper die Geschwindigkeit Null erreicht, so ist zwischen der höchsten und tiefsten Lage des Körpers wiederum die Änderung des Arbeitsvermögens Null, mithin, da der Körper um $h + \Delta l$ sinkt:

Fig. 122.



11) $$\frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E} = Q(h + \Delta l),$$

oder, mit $\Delta l = \dfrac{\sigma l}{E}$:

$$\frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E} = Qh + \frac{Q\sigma l}{E}.$$

Diese Gleichung giebt, nach σ aufgelöst:

$$\sigma = \frac{Ql}{V} \pm \sqrt{\frac{Q^2 l^2}{V^2} + \frac{2QhE}{V}},$$

oder, wenn man $V = Fl$, $Q : F = \sigma_0$ setzt:

12) $$\sigma = \sigma_0 + \sqrt{\sigma_0^2 + 2\sigma_0 \frac{h}{l} E}.$$

(Ein negatives Zeichen vor dem Wurzelausdrucke hat für die vorliegende Aufgabe keine Bedeutung, da es sich nur um einen positiven Werth σ handeln kann.)

Beispiel: Der Eisenstab habe $F = 4$ qcm Querschnitt und $l = 5$ m $= 500$ cm Länge, der Körper $Q = 100$ kg Gewicht und nur $h = 10$ cm Fallhöhe; dann ist die Gleichgewichts-Spannung $\sigma_0 = 25$ at, d. h. ganz unerheblich. Es wird aber

$$\sigma = 25 + \sqrt{625 + 2000000} = 1439 \text{ at}.$$

In Folge der Fallhöhe von 10 cm entsteht also eine im Vergleiche mit der Gleichgewichts-Spannung sehr erhebliche Anstrengung des Stabes. Die entsprechende Verlängerung beträgt

$$\varDelta l = \frac{1439 \cdot 500}{2000000} = 0{,}36 \text{ cm},$$

ist also gegen $h = 10$ cm unerheblich. Für die meisten Fälle kann man $\varDelta l$ gegen h vernachlässigen; dann wird aus Gl. 11:

13) $$\frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E} = Q h,$$

mithin, erheblich einfacher,

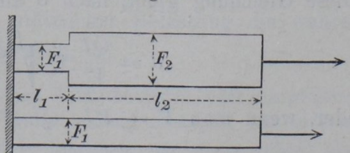
14) $$\sigma = \sqrt{2\,\sigma_0 \frac{h}{l} E} = 1414 \text{ at}.$$

Diese Formel gilt auch für die Spannung des Seiles einer Dampfwinde, wenn ein Körper vom Gewichte Q mit dem anfänglich schlaffen Seile verbunden, die Winde nun aber derartig in Gang gesetzt wird, dass das Seil in dem Augenblicke, wo es straff wird, sich mit einer Geschwindigkeit c bewegt. Bezeichnet man die dieser Geschwindigkeit entsprechende Geschwindigkeitshöhe mit h, so muss die Arbeit $Q h$, welche nöthig ist, um der Last Q die Geschwindigkeit c des Seiles mitzutheilen, durch Vermittelung der Formänderungsarbeit des Seiles von der Winde auf die Last übertragen werden. Man sieht daraus, wie leicht bei unvorsichtigem Betriebe der Winde Seilrisse entstehen können.

b) Stab mit sprungweise veränderlichem Querschnitte.

Der Stab möge auf eine Länge l_1 den Querschnitt F_1, auf eine Länge l_2 den grösseren Querschnitt F_2 haben (Fig. 123). Bringt man ihn dann in ähnlicher Weise, wie auf S. 100 beschrieben, durch eine allmählich anwachsende Zugkraft in Spannung, so werden die Spannungen in den verschiedenen Querschnitten σ_1 und σ_2 betragen, zwischen denen die Beziehung $\sigma_2 F_2 = \sigma_1 F_1$, mithin

Fig. 123.



$$\sigma_2 = \sigma_1 \frac{F_1}{F_2} = \frac{\sigma_1}{n}$$

besteht, wenn man $F_2 = n F_1$ setzt. Bei der Erzeugung dieser

Spannungen muss die wirkende Zugkraft eine Arbeit verrichten, welche nach Gl. 5, S. 101 beträgt:

$$\mathfrak{A} = \frac{V_1}{2} \frac{\sigma_1{}^2}{E} + \frac{V_2}{2} \frac{\sigma_2{}^2}{E},$$

oder, auf σ_1 zurückgeführt:

15) $$\mathfrak{A} = \frac{\sigma_1{}^2}{2\,E}\left\{V_1 + \frac{V_2}{n^2}\right\}.$$

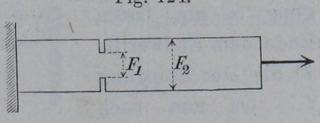
Für die Sicherheit des Stabes im Gleichgewichtszustande kommt nur der kleinste Querschnitt in Frage. Der Rauminhalt $(F_2 - F_1)\,l_2$, den der vorliegende Stab mehr enthält als ein solcher mit überall gleichem Querschnitt F_1, ist für den Ruhezustand eine Verschwendung. Für die mögliche Arbeitsleistung ist diese Verschwendung an Stoff aber sogar schädlich; denn ein Stab von der Länge $l_1 + l_2$ und dem einheitlichen Querschnitt F_1 hat einen Rauminhalt $V_1 + \frac{V_2}{n}$ und nimmt bis zur Spannung σ_1 eine Arbeit auf

16) $$\mathfrak{A}_1 = \frac{\sigma_1{}^2}{2\,E}\left(V_1 + \frac{V_2}{n}\right).$$

Da $n > 1$, so ist $\mathfrak{A}_1 > \mathfrak{A}$, d. h. der Stab von gleichmässiger Stärke erträgt, bis er auf eine Spannung σ_1 kommt, eine grössere Arbeit als der ungleichmässig starke Stab von gleicher Stoffmenge. Gegen Arbeitswirkung verstärkt wird daher der ungleichmässige Stab durch Fortnahme des für den Ruhezustand nur Ueberflüssigen (nach A. Ritter, Technische Mechanik).

Diese Betrachtungen finden Anwendung auf einen Stab, dessen Querschnitt F_2 auf eine geringe Länge l_1 durch Einsägen, Einschneiden oder auf irgend andere Weise eine Schwächung auf die Querschnittsgrösse F_1 erfahren hat. Es ist dann V_1 gegen V_2 zu vernachlässigen und es wird, wenn man V_2 als Gesammtinhalt nunmehr V nennt,

Fig. 124.



17) $$\mathfrak{A} = \frac{\sigma_1{}^2}{2\,E}\,\frac{V}{n^2},$$

während für den gleichmässig auf den Querschnitt F_1 und den Inhalt $V:n$ gebrachten Stab

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{\sigma_1^2}{2E}\frac{V}{n} \tag{18}$$

wird, so dass wird $\mathfrak{A}_1 : \mathfrak{A} = n$.

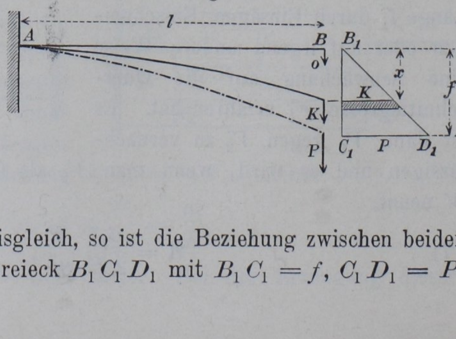
Die Widerstandsfähigkeit eines Stabes gegen Arbeit wird durch Einsägen auf halben Querschnitt auf $1/4$ vermindert, aber auf $1/2$ des ursprünglichen Werthes wieder erhöht, wenn man durch Wegnahme der Hälfte des Stoffes in zweckmässiger Weise überall den gleichen Querschnitt $F_1 = 1/2\,F_2$ herstellt. Noch mehrfach wird sich das Ergebnis zeigen, dass Körper überall gleicher Sicherheit hinsichtlich der Arbeitsleistung überraschend vortheilhaft sind. Der innere Grund liegt darin, dass der zulässige Endwerth P der Zugkraft durch F_1 bedingt ist, dass der übermässig grosse Querschnitt F_2 aber die Verlängerung Δl vermindert, wodurch auch das Produkt $1/2\,P\Delta l = \mathfrak{A}$ eine Verminderung erfährt. Grosse Formänderungen sind für die Aufnahme von Arbeit vortheilhaft. Bei Ankertauen und Ankerketten, die das Arbeitsvermögen bewegter Schiffe durch die Arbeit ihrer Spannkräfte zu vernichten haben, sind Fehlstellen besonders verhängnisvoll.

2. Biegungs-Arbeit.

a) Prismatischer Stab.

Ein prismatischer, bei A (Fig. 125) wagerecht eingespannter Stab werde am freien Ende durch eine von Null ab allmählich bis P anwachsende Kraft gebogen. Dem beliebigen Zwischenwerthe K der Kraft entspricht eine Biegung x am freien Ende, dem Endwerthe P die Durchbiegung f. Da nun nach Gl. 7, S. 43:

Fig. 125.



$$x = \frac{Kl^3}{3EJ},$$

d. h. K mit x verhältnisgleich, so ist die Beziehung zwischen beiden Grössen wiederum ein Dreieck $B_1C_1D_1$ mit $B_1C_1 = f$, $C_1D_1 = P$.

Das Arbeitstheilchen von K ist $K dx$, gleich einem Flächenstreifen des Dreiecks, die Gesammtarbeit daher gleich dem Inhalte des ganzen Dreiecks, d. h.

1) $$\mathfrak{A} = {}^1/_2\, Pf;$$

es ist wieder $^1/_2\, P$ der Mittelwerth der veränderlichen Kraft, f die Wegeslänge. Weil nun

2) $$f = \frac{Pl^3}{3EJ},$$

so wird zunächst $$\mathfrak{A} = \frac{P^2 l^3}{6EJ}$$

und weil ferner $Pl = \sigma \dfrac{J}{e}$, so ergiebt sich

3) $$\mathfrak{A} = \frac{1}{6} \frac{Jl}{e^2} \frac{\sigma^2}{E},$$

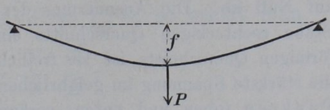
wenn σ die stärkste Biegungsspannung ist, J und e die bekannte Bedeutung (S. 22) haben. Setzt man $J = Fi^2$ (s. S. 62), wo i der Trägheitshalbmesser, so entseht

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{6} Fl \frac{i^2}{e^2} \frac{\sigma^2}{E} \quad \text{oder}$$

4) $$\mathfrak{A} = \frac{V}{6} \frac{i^2}{e^2} \frac{\sigma^2}{E}$$

wenn wiederum $Fl = V$ bedeutet. Das Verhältnis $i:e$ ist nur von der Form, nicht aber von der Grösse des Querschnitts abhängig. Mithin ist bei bestimmter Querschnittsform die zur Erzeugung einer bestimmten Biegungsspannung σ erforderliche Arbeit nur noch von dem Rauminhalte V des Stabes abhängig. Mag also ein Stab mit rechteckigem Querschnitte lang oder kurz sein, mag er hochkantig oder flachliegend befestigt sein — bei gleichem Rauminhalte wird die Biegungsarbeit in allen diesen Fällen die gleiche sein.

Fig. 126.



Die Gültigkeit der Gl. 4 ist auch nicht auf die Befestigungsart nach Fig. 125 beschränkt, vielmehr ergiebt sich, wenn man den Stab an beiden Enden unterstützt und in der Mitte belastet (Fig. 126), derselbe Werth.

Es ist nämlich wiederum $\mathfrak{A} = {}^1/_2 Pf$, ferner $f = \frac{Pl^3}{48\,EJ}$ (S. 45), $\frac{Pl}{4} = \sigma \frac{J}{e}$; setzt man diese Werthe ein, so entsteht Gl. 3.

Aus denselben Gründen, die auf S. 102 entwickelt wurden, ist $\mathfrak{A}_i = -\mathfrak{A}$ die Arbeit der inneren Spannkräfte des gebogenen Stabes. Ebenso kehrt sich, wenn die Rückkehr zum spannungslosen Zustande erfolgt, das Zeichen von $\mathfrak{A}$ und somit auch dasjenige von $\mathfrak{A}_i$ um.

Hinsichtlich der Einwirkung einer plötzlichen Belastung ergiebt sich in ähnlicher Weise, wie auf S. 104—106 entwickelt wurde, dass die stärkste Spannung das Doppelte der Gleichgewichtsspannung beträgt und dass der Stab Schwingungen um die Gleichgewichtslage als Mitte ausführen wird.

Für **rechteckigen** Querschnitt ist $J = {}^1/_{12} Fh^2$ (S. 22), mithin $i^2 = {}^1/_{12} h^2$, $e^2 = {}^1/_4 h^2$, $i^2 : e^2 = 1 : 3$, folglich

5) $$\mathfrak{A} = \frac{V}{18} \frac{\sigma^2}{E}.$$

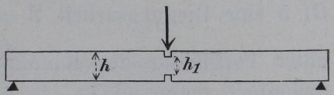
Für **kreisförmigen** Querschnitt ist $J = {}^1/_4 Fr^2$ (S. 24), $i^2 = {}^1/_4 r^2$, $e^2 = r^2$, daher

6) $$\mathfrak{A} = \frac{V}{24} \frac{\sigma^2}{E}.$$

Die Biegungsarbeit ergiebt sich in diesen beiden Fällen (Gl. 5 und 6) 9 bezw. 12 Mal kleiner als die Arbeit der Längenänderung (S. 101, Gl. 5). Es erklärt sich dies folgendermassen: Bei der Verlängerung herrscht an allen Stellen aller Querschnitte die gleiche Spannung σ, mithin wird bei einem gezogenen Stabe die Festigkeit bis zu dem gewünschten Grade vollständig ausgenutzt, während beim gebogenen Stabe die stärkste Spannung nur in dem einen Querschnitte, wo das Moment den grössten Werth erreicht, vorkommt, sich aber in der Längenrichtung bis auf Null vermindert. Aber auch in dem Querschnitte des grössten Momentes kommt die stärkste Spannung nur im grössten Abstande von der Nulllinie vor, nimmt aber nach dieser hin ebenfalls auf Null ab. Die Ausnutzung der Festigkeit ist daher bei dem gebogenen Stabe rechteckigen Querschnitts eine recht ungünstige. Beim Stabe kreisförmigen Querschnitts ist sie freilich noch etwas ungünstiger, weil bei diesem die stärkste Spannung im gefährlichen Querschnitte nur an den beiden äussersten Punkten (oben und unten) vorkommt beim rechteckigem Querschnitte aber doch wenigstens über zwei geraden Linien (Oberkante und Unterkante des Querschnitts) sich erstreckt.

Der Einfluss einer Verschwächung ergiebt sich in ähnlicher Weise wie beim gezogenen Stabe, ist aber noch erheblicher als dort, wenn die Einkerbung an den Stellen der stärksten Spannung (oben und unten) erfolgt. Für einen Stab von rechteckigem Querschnitt ist $\mathfrak{A} = \frac{V}{18}\frac{\sigma^2}{E}$. Wird der Stab in der Mitte (Fig. 127) oben und unten eingekerbt, so dass von der Höhe h nur der Theil h_1 widerstandsfähig bleibt, das Widerstandsmoment also von $\frac{1}{6} d h^2$ auf $\frac{1}{6} d h_1^2$ abnimmt, so wird die stärkste Spannung an der Einkerbung $\sigma_1 = \sigma \frac{h^2}{h_1^2}$. Weil nun V und auch die Spannungsverhältnisse des Stabes, abgesehen von der Einkerbung, dieselben geblieben sind, so kann geschrieben werden

Fig. 127.



7)
$$\mathfrak{A} = \frac{V}{18}\frac{\sigma_1^2}{E}\frac{h_1^4}{h^4}.$$

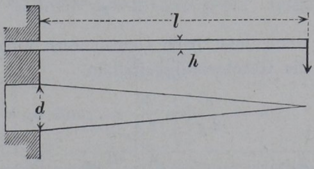
Wird also durch Einkerbung in der Mitte $h_1 = 0{,}8\,h$, so ist $h_1^4 = 0{,}41\,h^4$, und es vermindert sich die der Spannung σ_1 entsprechende Biegungsarbeit auf das 0,41 fache.

Von diesem Umstande wird z. B. in Eisenhütten vielfache Anwendung gemacht, wenn man Eisenstäbe durch das Arbeitsvermögen von Hammerschlägen zerbrechen will. Man kerbt den Stab an der gewünschten Bruchstelle mittels eines sog. Schrotmeissels ein, wonach dann der hohl gelegte Stab unter dem Hammerschlage verhältnismässig leicht zerbricht.

b) Stab überall gleicher Sicherheit und gleicher Höhe.

Ist der Stab im Grundrisse (rechtwinklig zur Richtung der biegenden Kraft) dreieckig zugeschärft (Fig. 128), so wird die Durchbiegung $f = \frac{Pl^3}{2EJ}$ (S. 48, Gl. 21), somit

Fig. 128.



$$\mathfrak{A} = \frac{Pf}{2} = \frac{P^2 l^3}{4EJ}, \quad Pl = \sigma \frac{J}{e}$$

und $$\mathfrak{A} = \frac{1}{4}\frac{Jl}{e^2}\frac{\sigma^2}{E} = \frac{1}{4} Fl \frac{i^2}{e^2}\frac{\sigma^2}{E}.$$

Jetzt ist aber, wegen der Zuschärfung, der Rauminhalt $V = \frac{1}{2} Fl$, oder $Fl = 2V$, und weil wieder $i^2 : e^2 = 1 : 3$, so erhält man

8)
$$\mathfrak{A} = \frac{Pf}{2} = \frac{V}{6}\frac{\sigma^2}{E},$$

d. h. 3 Mal so gross wie bei überall gleichem Querschnitte, weil beim Stabe gleicher Sicherheit die stärkste Spannung σ nicht nur in zwei geraden Querlinien von der Länge d, sondern längs der ganzen oberen und unteren Fläche vorkommt.

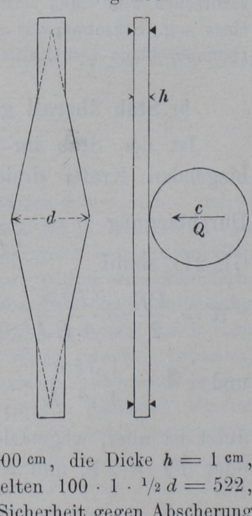
Ein prismatischer Stab vom Rauminhalte $V = ldh$ kann nach Gl. 5 eine Biegungsarbeit $\mathfrak{A} = \frac{ldh}{18}\frac{\sigma^2}{E}$ aufnehmen. Wird derselbe unter Fortnahme der Raummenge $\frac{1}{2} V$ zu einem Stabe gleicher Sicherheit umgewandelt, so ändert dies an seiner Tragfähigkeit im Gleichgewichtszustande nichts. Seine Arbeitsfähigkeit aber wird nun, weil sein Rauminhalt $\frac{1}{2} ldh$ ist,

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{ldh}{12}\frac{\sigma^2}{E} = \frac{3}{2}\mathfrak{A}.$$

Die Fortnahme der Raummenge $\frac{1}{2} V$ hat also die Widerstandsfähigkeit gegen Arbeit auf das $1\frac{1}{2}$fache vergrössert (vergl. den gesperrt gedruckten Satz auf S. 110).

Beispiel: Eine Kugel von $Q = 10$ kg Gewicht, die sich mit $c = 4$ m/sek. Geschwindigkeit bewegt, soll durch eine Gussstahl-Feder überall gleicher Sicherheit aufgefangen werden. Welche Abmessungen muss die Feder erhalten, wenn sie bis zur Elasticitätsgrenze (4500 at) gespannt werden soll?

Fig. 159.



Es muss nach dem Satze der Arbeit

$$0 - \frac{Q}{g}\frac{c^2}{2} = -\frac{V}{6}\frac{\sigma^2}{E}, \quad \text{mithin}$$

$$V = \frac{6\,E}{\sigma^2} Q \frac{c^2}{2\,g} \quad \text{sein.}$$

Für Gussstahl ist nach der Tabelle (S. 103)

$$\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E} = 4{,}6,$$

wenn man nach Centimetern rechnet. Nun ist die Geschwindigkeitshöhe

$$h = \frac{c^2}{2\,g} = \frac{4^2}{2\,g} = \text{rund } 0{,}8\text{ m} = 80\text{ cm},$$

daher $$V = \frac{3 \cdot 10}{4{,}6} 80 = 522\text{ ccm}.$$

Wählt man vielleicht die Spannweite $l = 100$ cm, die Dicke $h = 1$ cm, so muss für die grösste Breite d die Gleichung gelten $100 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} d = 522$, mithin $d = 10{,}44$ cm. An den Enden verlangt die Sicherheit gegen Abscherung und die sichere Auflagerung eine kleine Abweichung von der ideellen Rautenform. Das Gewicht der federnden Platte beträgt etwa 4 kg. Die Masse derselben wurde bei der bisherigen Betrachtung gegenüber der Masse der Kugel vernachlässigt. Der dabei begangene Fehler kann erst auf Grund der Lehre vom

Stosse (S. 139) beurtheilt werden. Ohne Rücksicht auf diesen Umstand würde man zu dem Schlusse kommen, dass die Federplatte beim Zurückschwingen die Kugel mit der Geschwindigkeit c wieder forttreiben werde; in Wirklichkeit fällt die Geschwindigkeit des Rücklaufs geringer aus.

c) Tragfedern der Fuhrwerke (Biegungsfedern).

Die Federn, welche die Wagenkasten der Fuhrwerke tragen, haben den Zweck, die Erschütterungen zu vermindern, welche durch Unregelmässigkeiten der Fahrbahn verursacht werden. Fällt ein Fuhrwerk ohne Federn, dessen Gewicht $= Q$, in eine Vertiefung h, so muss die Arbeit der Schwere Qh beim Aufschlagen auf den Boden der Vertiefung durch die Arbeit des Widerstandes der Fahrbahn, sowie der lothrechten Kräfte, mit denen die einzelnen Theile des Fuhrwerks auf einander drücken, aufgehoben werden. Ist nun der Boden wenig nachgiebig, sind die Räder und das ganze Fuhrwerk sehr steif gebaut, so dass nur geringe Formänderungen entstehen, so werden die Kräfte, deren Arbeit $= Qh$ sein muss, in Folge geringer Wegeslängen sehr gross. Daraus entsteht eine örtliche Zerstörung der Fahrbahn, eine starke Anspannung der tragenden Theile des Fuhrwerks; auch wird durch den harten Aufschlag, d. h. die starke Verzögerung, welche auf die Fallbeschleunigung folgt, die Lockerung der Verbindungen (Schrauben, Nägel) erleichtert.

Fig. 130.

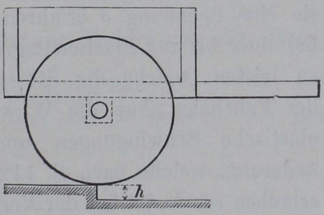
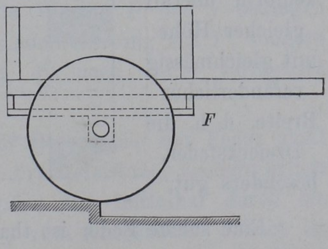


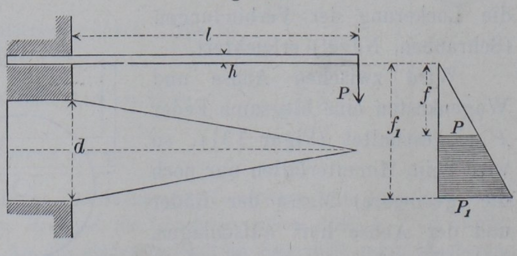
Fig. 131.



Wird zwischen Achse und Wagenkasten eine biegsame Feder F eingeschaltet (Figur 131), so wird beim Hinunterfallen nur noch die (geringere) Masse der Räder und der Achse hart aufschlagen. Der Wagenkasten mit der Last wird aber längs einer grösseren Wegeslänge aufgefangen, weil die Feder nach dem Aufschlagen der Räder sich durchbiegt und durch ihre Biegungsarbeit die Arbeit der Schwere aufzehrt. In Folge der beträchtlichen Vergrösserung des lothrechten Weges des Wagenkastens nach dem Aufschlagen der Räder wird nun die Grösse der verzögernden Kraft so erheblich vermindert, dass an Stelle des zerstörenden, unangenehm fühlbaren und lärmenden Stosses eine sanfte lothrechte Schwingung entsteht. Gute Federn schonen also die Fahrbahn und das Fuhrwerk, sowie die Nerven der betheiligten Menschen. Die zuweilen benutzten Kautschukreifen sind eine Fortsetzung dieser Bestrebungen, indem durch sie auch der Stoss der Räder und Achsen zu einem elastischen gemacht wird.

Die Tragfedern haben eine zweifache Aufgabe: sie müssen das Gewicht des Wagenkastens im Gleichgewichtszustande tragen, wobei sie eine Spannung σ erfahren und müssen ferner im Stande sein, bei einer bis zur Elasticitätsgrenze wachsenden Spannung eine Arbeit zu leisten, welche die Stösse, die durch die Unregelmässigkeiten der Fahrbahn ohne die Wirkung der Federn entstehen würden, in elastische Schwingungen umwandelt. Die Arbeit der Längenänderung, welche nach S. 112 eine günstige Ausnutzung des Stoffes erlauben würde, ist bei der Verwendung von Stahl nicht gut verwendbar, weil die Längenänderung zu gering ausfällt. Die Verkürzungsarbeit von Kautschuk-Blöcken hat man bei Strassenbahn-Fuhrwerken früher benutzt, aber aus den S. 104 angeführten Gründen aufgeben müssen. Daher verwendet man die Biegungsarbeit des Stahles, bei der eine beträchtliche Formänderung möglich ist. Hierzu eignet sich nun nach S. 113 die Balkenform überall gleicher Höhe mit gleichmässig veränderlicher Breite, d. h. die Dreiecksfeder, besonders gut.

Fig. 132.



Eine solche Feder ist thatsächlich in der Mitte unterstützt und an beiden Enden durch gleiche Lasten belastet; wegen der vollkommen symmetrischen Anordnung betrachten wir zunächst nur die eine Hälfte, die an dem einen Ende als wagerecht eingespannt betrachtet werden kann (Fig. 132). Für den Ruhezustand gilt

$$1)\qquad \sigma \frac{J}{e} = \sigma \frac{d h^2}{6} = P l .$$

Mit der Ruhelast ist nach S. 48 eine Durchbiegung

$$2)\qquad f = \frac{P l^3}{2 E J} = \frac{\sigma}{E} \frac{l^2}{h}$$

($h = 2e$) verbunden. Diese Gleichgewichts-Biegung f ist für spätere Arbeitsleistung nicht mehr zu verwerthen, denn sie entsteht ebenso wie die Spaunnng σ schon bei dem Aufbringen der Last. Nur der Spannungs-Spielraum von σ bis zur Elasticitätsgrenze z mit dem Arbeitswerthe $\frac{V}{6} \frac{z^2 - \sigma^2}{E}$ ist noch für die Vernichtung der Stösse verfügbar. Dabei vergrössert sich die Biegung auf $f_1 = f \cdot z : \sigma$, der am Ende auftretende Biegungswiderstand auf $P_1 = P \cdot z : \sigma$. Die noch auszunutzende Biegungsarbeit

$$3)\qquad \frac{P_1 f_1 - P f}{2} = \frac{V}{6} \frac{z^2 - \sigma^2}{E}$$

wird in der Figur durch das schraffirte Trapez dargestellt.

Welchen Anforderungen die Feder zu genügen hat, ist vorwiegend durch die Erfahrung ermittelt worden, und diese hat man in der Weise zum Ausdrucke gebracht, dass eine einem bestimmten Zwecke angemesse Feder eine gewisse Länge l haben muss, unter der Ruhelast P nur bis zu einer gewissen Spannung σ beansprucht werden darf und dass mit der Ruhelast eine bestimmte Durchbiegung f verbunden sein muss. Die Werthe P und f bedingen dann nicht allein die Arbeit $\frac{1}{2} P f$ bis zur Belastung mit P, sondern auch zugleich, weil man $z : \sigma$ kennt, die noch weiter verfügbare Arbeit (nach Gl. 3).

Man kümmert sich also bei der Berechnung der Feder nicht unmittelbar um die ihr zuzumuthende Arbeitsleistung, sondern bringt diese (zur Vereinfachung der Aufgabe) nur mittelbar durch die der Ruhelast entsprechende Biegung f zum Ausdrucke. Jedoch ist hiermit die Fähigkeit der Feder, die Last zu tragen und darüber hinaus noch Arbeit zu leisten, vollkommen gekennzeichnet.

Die Querschnittshöhe bestimmt sich aus Gl. 2 zu

4) $$h = \frac{\sigma}{E}\frac{l^2}{f},$$

die Breite hiernach aus Gl. 1 zu

5) $$d = \frac{6\,Pl}{\sigma h^2}.$$

Der Rauminhalt $V = {}^1\!/_2\, d h l$ ergiebt sich hiernach, wie es nach Gl. 8, S. 113, sein muss, zu $3\,Pf\frac{E}{\sigma^2}$.

Beispiel: Es seien gegeben:
$P = 1900^{\text{ kg}}$; $f = 5^{\text{ cm}}$; $\sigma = 4500^{\text{ at}}$;
$E = 2\,500\,000^{\text{ at}}$; $l = 60^{\text{ cm}}$. Dann wird nach Gl. 4 u. 5:

$$h = \frac{4500}{2\,500\,000}\,\frac{60^2}{5} = 1{,}3^{\text{ cm}};$$

$$d = \frac{6 \cdot 1900 \cdot 60}{4500 \cdot 1{,}69} = 90^{\text{ cm}}.$$

Eine Feder von so grosser Breite d ist für die Anwendung nicht geeignet. Sie wird daher in solcher Weise umgestaltet, dass eine zusammengesetzte Feder von geringerer Breite entsteht, die aber die gleiche Tragfähigkeit und Biegsamkeit hat wie die soeben berechnete. Man theilt die Federplatte nach Fig. 133 in eine gerade Anzahl $2\,n$ (z. B. 8) parallele Streifen, vereinigt je zwei mit gleichen Ziffern bezeichnete Theile zu einem Stück und legt die so erhaltenen Streifen nach Fig. 134 auf einander, wobei man zunächst über dem Ende jedes Streifens ein Klötzchen angebracht denkt, so dass die einzelnen Streifen nur dort Kräfte auf einander ausüben können. Diese Kräfte werden mit K_1, K_2, K_3 bezeichnet. Fig. 135 zeigt die untere Ansicht der Feder, deren Breite $\frac{d}{n}$ beträgt. Die unterste Schicht AB von der Länge $\frac{l}{n}$ biegt sich bei B um

Fig. 133.

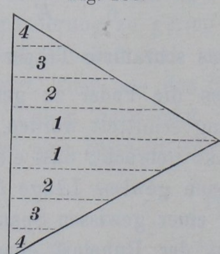


Fig. 134.

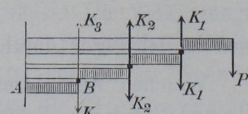
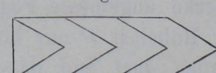


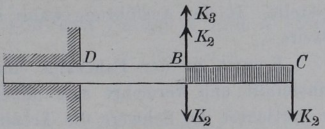
Fig. 135.



6) $$f_3 = \frac{K_3\left(\frac{l}{n}\right)^3}{2\,E\frac{J}{n}},$$

weil der Breite ${}^1\!/_n\, d$ ein Trägheitsmoment ${}^1\!/_n\, J$ entspricht. Die darüber liegende Schicht muss bei B die gleiche Durchbiegung f_3 zeigen, weil die zwischengelegten Klötzchen gleiche Biegung erzwingen. An dieser Schicht greift (Fig. 136) bei C die Kraft K_2, bei B die Kraft K_3 an. Fügt man in B zwei gleiche entgegengesetzte K_2 hinzu, so bilden die gegebene Kraft K_2 bei C und die bei B entgegengesetzt hinzugefügte ein Kräftepaar $\mathfrak{M} = K_2 \cdot {}^1/_n\, l$, welches dem von D bis B prismatischen Stabe nach

Fig. 136.

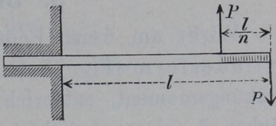


S. 43 bei B eine Biegung um $\dfrac{K_2\,({}^1/_n\, l)^3}{2\,E \cdot {}^1/_n\, J}$ ertheilt. Ausserdem wirkt bei B nach abwärts die Kraft $K_2 - K_3$, die nach S. 43 bei B eine Biegung $\dfrac{(K_2 - K_3)\,({}^1/_n\, l)^3}{3\,E \cdot {}^1/_n\, J}$ erzeugt. Setzt man die Summe beider Biegungen gleich f_3 (Gl. 6), so entsteht

$$\frac{K_2}{2} + \frac{K_2}{3} - \frac{K_3}{3} = \frac{K_3}{2}, \quad \text{d. h. } K_3 = K_2.$$

In gleicher Weise erhält man $K_2 = K_1$ und $K_1 = P$; d. h. die an den Klötzchen übertragenen Kräfte sind sämmtlich gleich der Last P. Die oberste Lage bildet (Fig. 137) einen Balken überall gleicher Sicherheit, dessen Spannung

Fig. 137.



$$\sigma = \frac{P \cdot {}^1/_n\, l\, e}{{}^1/_n\, J} = \frac{P\, l\, e}{J} = \frac{P\, l\, h}{2\, J}$$

dieselbe ist, wie diejenige der Platte (s. Gl. 1, S. 117); sie biegt sich nach S. 49, Fig. 61 nach einem Kreisbogen vom Halbmesser

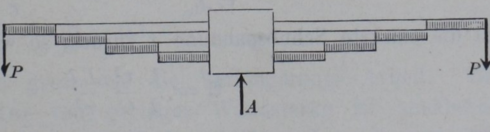
$$\rho = \frac{E\, h}{2\, \sigma} = \frac{2\,500\,000 \cdot 1{,}3}{2 \cdot 4500} = 361\ ^{\text{cm}},$$

und die Durchbiegung des freien Endes beträgt

$$f = \frac{l^2}{2\, \rho} = \frac{\sigma}{E}\, \frac{l^2}{h}$$

wie bei der Platte (Gl. 2, S. 117). Von den übrigen Lagen gilt dasselbe. Werden die Klötzchen auf die Höhe Null vermindert, so ändert sich in der Wirkung der Federlagen nichts Wesentliches. Setzt man diese Schichtenfeder an der gedachten Einspannungsstelle mit einer symmetrisch gestellten zusammen (Fig. 138), so entsteht eine an beiden Enden je mit P belastete Tragfeder, die sich bei A auf ein Achslager stützt. Dass man an den freien Enden geeignete Anordnungen trifft, um die Last P sicher auflagern

Fig. 138.



zu können und dass man aus Zweckmässigkeitsgründen den einzelnen Lagen schon im spannungslosen Zustande eine Krümmung giebt, hat auf die Wirkung keinen erheblichen Einfluss.

Der Einfachheit wegen haben wir eine Feder von nur 4 Schichten dargestellt. In der Ausführung wählt man statt dessen 10 Schichten von je 9 cm Breite.

Kommt in der Fahrbahn eine Vertiefung um h vor, in die das Rad hineinfällt und vermehrt sich dabei die Durchbiegung der Feder um $f_1 - f$, so verrichtet die Schwere die Arbeit $P(h + f_1 - f)$. Wird hierbei die Feder bis zur Elasticitätsgrenze beansprucht, so ist nach Gl 3 (S. 117):

$$P(h + f_1 - f) = {}^1/_2 (P_1 f_1 - P f).$$

Bei gutem Federstahl kann man die Elasticitätsgrenze etwa zu $z = 8000$ annehmen. Dann wird wegen $f = 5$ cm:

$$f_1 = 5 \cdot \frac{8000}{4500} = 5 \cdot 1{,}78 = 8{,}9 \text{ cm};$$

$$P_1 = 1900 \cdot 1{,}78 = 3382 \text{ kg};$$

und man findet $h = 1{,}5$ cm. Um diese Höhe nur darf die Achse fallen, damit die Feder nicht über die Elasticitätsgrenze hinaus beansprucht werde.

3. Drehungs-Arbeit.

Wirkt am freien Ende eines einerseits befestigten Stabes von Cylinderform (Fig. 78, S. 64) ein von 0 bis $\mathfrak{M}$ stetig anwachsendes Drehungsmoment, entspricht dem Endwerthe $\mathfrak{M}$ ein Verdrehungswinkel ϑ, einem beliebigen Zwischenwerthe $\mathfrak{M}'$ der Verdrehungswinkel φ, so ist für eine Zunahme dieses Winkels um $d\varphi$ die Arbeit (nach Theil 1, S. 221)

$$d\mathfrak{A} = \mathfrak{M}' d\varphi.$$

Weil nun nach S. 65, Gl. 4 $\mathfrak{M}'$ mit φ verhältnisgleich wächst, so wird wie in den früheren ähnlichen Fällen die Gesammtarbeit

1) $$\mathfrak{A} = {}^1/_2 \mathfrak{M} \vartheta.$$

Führt man dies mit

$$\vartheta = \frac{\mathfrak{M} l}{G J_0} \quad \text{und} \quad \mathfrak{M} = \frac{\tau J_0}{r}$$

auf die stärkste Schubspannung τ zurück, so wird

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} \frac{J_0 l}{r^2}$$

oder, wenn man $J_0 = F i_0{}^2$ und $F l = V$ setzt,

2) $$\boldsymbol{\mathfrak{A} = \frac{V}{2} \frac{\tau^2}{G} \frac{i_0{}^2}{r^2}}.$$

Da nun für kreisförmigen Querschnitt $i_0{}^2 = {}^1/_2\, r^2$, so entsteht

$$\mathfrak{A} = \frac{V}{4}\,\frac{\tau^2}{G}. \tag{3}$$

Für rechteckigen Querschnitt von den Seiten d und h (mit $d \leqq h$) war (S. 69, Gl. 13)

$$\mathfrak{M} = \frac{8}{3}\,\tau\,\frac{J_2}{d}$$

und nach S. 71, Gl. 16

$$\vartheta = 0{,}8\,\frac{\tau}{G}\,\frac{l}{d}\left(1 + \frac{J_2}{J_1}\right),$$

worin $J_1 = {}^1/_{12}\, F h^2$ und $J_2 = {}^1/_{12}\, F d^2$. Daher wird

$$\mathfrak{A} = {}^1/_2\, \mathfrak{M}\vartheta = 1{,}07\,\frac{\tau^2}{G}\,\frac{J_2\, l}{d^2}\left(1 + \frac{J_2}{J_1}\right) \quad \text{oder}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{V}{11}\,\frac{\tau^2}{G}\left(1 + \frac{J_2}{J_1}\right) = \frac{V}{11}\,\frac{\tau^2}{G}\left(1 + \frac{d^2}{h^2}\right). \tag{4}$$

Im günstigsten Falle, für $d = h$, giebt dies

$$\mathfrak{A} = \frac{V}{5{,}5}\,\frac{\tau^2}{G}; \tag{5}$$

im ungünstigsten Falle aber, für $d : h = 0$:

$$\mathfrak{A} = \frac{V}{11}\,\frac{\tau^2}{G}. \tag{6}$$

Um die Drehungs-Arbeit mit der Verlängerungs-Arbeit vergleichen zu können, bedenke man, dass nach S. 15 bei gleicher Sicherheit etwa $\tau = 0{,}8\,\sigma$ zu setzen, dass ferner $G = 0{,}4\,E$ ist dann wird $\dfrac{\tau^2}{G} = 1{,}6\,\dfrac{\sigma^2}{E}$.

Für den Vollcylinder ergiebt sich nach Gl. 3

$$\mathfrak{A} = 0{,}4\; V\frac{\sigma^2}{E}, \tag{7}$$

d. h. beinahe ebenso gross wie die Verlängerungs-Arbeit. Bei einem Hohlcylinder von geringer Wandstärke ist annähernd $i_0 = r$, daher (nach Gl. 2)

$$\mathfrak{A} = \frac{V}{2}\,\frac{\tau^2}{g} = 0{,}8\; V\frac{\sigma^2}{E}, \tag{8}$$

also noch erheblich günstiger als bei der Verlängerung. Die Drehungsarbeit eines Hohlcylinders ist hiernach die günstigste Art, unter der ein Stab Arbeit aufzunehmen vermag.

Verdrehungs-Federn.

Gerade Verdrehungsfedern werden wohl als Thürschliesser an eisernen Pforten benutzt. Wählt man einen Stahlstab mit quadratischem Querschnitte von $d = 0{,}4^{\text{cm}}$ Seite und $l = 120^{\text{cm}}$ Länge, so erträgt derselbe bei einer zulässigen Schubspannung $\tau = 3600^{\text{at}}$ ein Drehmoment (nach S. 69, Gl. 13)

$$\mathfrak{M} = \frac{8}{3} \cdot 3600 \, \frac{0{,}4^3}{12} = 51^{\text{cmkg}},$$

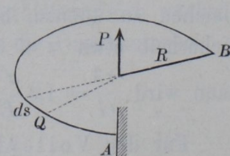
welches, wenn die Thürklinke 50^{cm} von der Drehachse entfernt ist, durch einen Kraftaufwand von $51 : 50 =$ rund 1^{kg} zum Öffnen der Pforte überwunden wird. Der entsprechende Verdrehungswinkel beträgt (nach Gl. 16, S. 71)

$$\vartheta = \frac{0{,}8 \cdot 3600}{880000} \cdot 300 \cdot 2 = \text{rund } 2, \text{ d. h. } \frac{2 \cdot 180}{\pi} = 115 \text{ Grad},$$

als Winkel, um den die Thür gedreht werden darf.

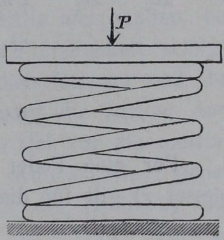
Gewundene Verdrehungsfedern dienen in feiner Ausführung als Federwaagen, in grösserem Maſsstabe als Tragfedern bei Strassenbahn-Fuhrwerken und als Bufferfedern bei Eisenbahn-Fuhrwerken. Ein nach einem Kreise vom Halbmesser R gekrümmter Stab (Fig. 139) sei bei A fest eingespannt (auch gegen Verdrehung), bei B mit einem nach dem Mittelpunkte führenden steifen Arme von der Länge R versehen, an dessen Ende eine rechtwinklig zur Ebene des Kreises stehende Kraft P wirkt. Die Kraft P übt dann auf alle Querschnitte des Stabes einen Verdrehungsmoment PR aus, erzeugt an einem Bogentheilchen ds einen Verdrehungswinkel, der aus Gl. 4, S. 65, bezw. Gl. 16, S. 71, folgt, wenn man l mit ds vertauscht. Bei einem Mittelpunktswinkel α des Ringes hat man l mit $R\alpha$ zu vertauschen, um den Verdrehungswinkel ϑ zu erhalten, und $R\vartheta$ ist dann angenähert die Verschiebung f des Angriffspunktes der Kraft P, solange es sich um kleine ϑ handelt.

Fig. 139.



Bei einer **cylindrischen Schraubenfeder** von n frei liegenden Windungen (Fig. 140) hat man dann l mit $2n\pi R$ zu vertauschen. Hiernach gilt für eine Feder, deren Querschnitt ein Kreis vom Halbmesser r, nach S. 65:

Fig. 140.



9) $$\mathfrak{M} = PR = \frac{\tau J_0}{r} = \frac{\tau r^3 \pi}{2};$$

10) $$\left\{\begin{aligned} f = R\vartheta &= \frac{P \cdot 2n\pi R^3}{GJ_0} = P\frac{4nR^3}{Gr^4} \\ &= \frac{\tau}{G}\, 2n\pi \frac{R^2}{r}. \end{aligned}\right.$$

Bei der Benutzung solcher Federn zu Waagen und Kraftmessern bedingt die Verhältnis-Gleichheit von f und P eine gleichmässige Theilung.

Für eine Feder von rechteckigem Querschnitte ist nach S. 69:

11) $$\mathfrak{M} = PR = \frac{8}{3}\tau\frac{J_2}{d} = \frac{2}{9}\tau h d^2;$$

12) $$f = 1{,}6\frac{\tau}{G}\frac{n\pi R^2}{d}\left(1 + \frac{J_2}{J_1}\right) = 1{,}6\frac{\tau}{G}\frac{n\pi R^2}{d}\left(1 + \frac{d^2}{h^2}\right).$$

Eine **kegelförmige Schraubenfeder** (Fig. 141) bildet im Grundrisse eine Spirale. Für einen Punkt Q im Abstande ϱ von der Achse ist das Moment $P\varrho$, wechselnd von PR_1 bis PR_2. Ein Bogentheilchen ds giebt einen Verdrehungswinkel

$$\frac{\vartheta}{l}\,ds = \frac{\vartheta}{l}\,\varrho\,d\varphi$$

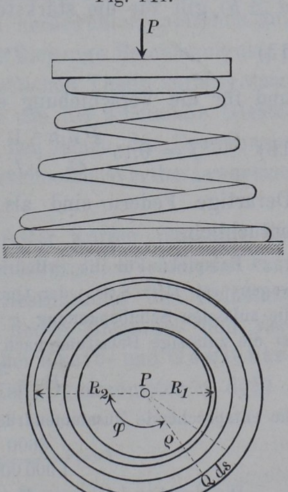
(wenn ϑ der Verdrehungswinkel für eine Länge l ist) und eine Verschiebung des Angriffspunktes von P um

$$df = \varrho\frac{\vartheta}{l}\varrho\,d\varphi.$$

Die Gesammtverschiebung ist also

$$f = \frac{1}{l}\int_0^{2n\pi} \vartheta\varrho^2\,d\varphi.$$

Fig. 141.



Man kann annehmen, dass ϱ sich nach einem Geradlinien-Gesetze ändert, d. h.

$$\frac{R_2 - \varrho}{R_2 - R_1} = \frac{\varphi}{2\,n\,\pi} \quad \text{also} \quad \varrho = R_2 - \frac{R_2 - R_1}{2\,n\,\pi}\,\varphi, \quad \text{mit}$$

$$d\varrho = -\frac{R_2 - R_1}{2\,n\,\pi}\,d\varphi \quad \text{oder}$$

$$d\varphi = -\frac{2\,n\,\pi}{R_2 - R_1}\,d\varrho\,.$$

Für eine Feder von **kreisförmigem** Querschnitte (Halbmesser r) gilt für die stärkste Spannung τ die Gleichung

13) $$P R_2 = \frac{\tau J_0}{r} = \frac{\tau r^3 \pi}{2}\,.$$

Ferner ist $$\vartheta = \frac{P\varrho}{G J_0}\,l, \quad \text{daher}$$

$$f = -\frac{P}{G J_0}\,\frac{2\,n\,\pi}{R_2 - R_1}\int_{R_2}^{R_1} \varrho^3 d\varrho = \frac{P n \pi (R_2^4 - R_1^4)}{2\,G J_0 (R_2 - R_1)}$$

14) $$f = \frac{P n \pi}{2\,G J_0}(R_2^2 + R_1^2)(R_2 + R_1)\,.$$

Für eine Feder von **rechteckigem** Querschnitte ($d \cdot h$ mit $d \leqq h$) gilt für die stärkste Spannung τ die Gleichung:

15) $$P R_2 = \frac{8}{3}\,\tau\,\frac{J_2}{d}\,,$$

und für die Verschiebung erhält man leicht

16) $$f = 0{,}15\,\frac{P n \pi}{G}\left(\frac{1}{J_2} + \frac{1}{J_1}\right)\left(R_2^2 + R_1^2\right)\left(R_2 + R_1\right).$$

Derartige Federn sind als Bufferfedern der Eisenbahnwagen gebräuchlich.

Beispiel: Für die cylindrische Schrauben-Tragfeder eines Strassenbahnwagens sei $R = 8^{\text{cm}}$, der Querschnitt ein Kreis vom Halbmesser $r = 1^{\text{cm}}$, die zulässige Schubspannung $\tau = 3600^{\text{at}}$; $G = 1\,000\,000^{\text{at}}$; $n = 8$. Dann ist die zulässige Belastung nach Gl. 9

$$P = \frac{3600 \cdot 1 \cdot \pi}{2 \cdot 8} = 707^{\text{kg}},$$

die entsprechende Zusammendrückung nach Gl. 10

$$f = \frac{3600}{1\,000\,000}\,2 \cdot 8 \cdot \pi \cdot 64 = 11{,}6^{\text{cm}}\,.$$

Die denkbar leichteste Metallfeder würde eine aus einer dünnwandigen Röhre gewundene cylindrische Schraubenfeder sein.

Schlussbemerkung: Bei sämmtlichen vorstehenden Untersuchungen über Formänderungs-Arbeit und ihre Anwendung wurde die Masse des elastischen Körpers vernachlässigt. Auf Grund dieser Vernachlässigung war es zulässig, die für eine langsame stetige Formänderung hergeleitete Arbeit auch auf Fälle anzuwenden, bei denen die Formänderung mit einer gewissen Plötzlichkeit erfolgt. Die Berücksichtigung der Masse des elastischen Körpers und der Beschleunigung seiner einzelnen Theile erschwert die Lösung derartiger Aufgaben in solchem Grade, dass man sich für die meisten Fälle der vorstehend entwickelten Gleichungen bedienen wird; jedoch darf man nicht übersehen, dass das Ergebnis der Rechnung nur annähernd richtig sein kann.

Eine plötzliche Belastung, jedoch ohne Stoss, hat stets Schwingungen zur Folge, bei denen die stärkste Spannung das Doppelte der Gleichgewichts-Spannung beträgt. Dieses Ergebnis findet auch Anwendung auf die verschiedenen Fälle der Beschleunigungs-Zustände elastischer Körper. Auf S. 90 wurde ausdrücklich vorausgesetzt, dass sämmtliche Theile des Körpers übereinstimmende Bewegung haben. Der Körper befindet sich dann in scheinbarer Ruhe in Bezug auf einen Raum, der dieselbe Bewegung ausführt. War der Körper vorher spannungslos und treten die Kräfte, die den Beschleunigungs-Zustand herbeiführen, plötzlich auf, so wird nur der Schwerpunkt des Körpers diejenige Beschleunigung p haben, welche S. 90 u. ff. für seine sämmtlichen Theile vorausgesetzt war. Die einzelnen Theile aber werden um die scheinbare Gleichgewichtslage Schwingungen ausführen, bei denen die Spannungen auf das Doppelte der auf S. 90 u. ff. berechneten Werthe anwachsen können.

Da die Formänderungen elastisch-fester Körper innerhalb der Elasticitätsgrenze den Belastungen verhältnisgleich sind, so kann die Messung der Formänderung zur Bestimmung der Belastung benutzt werden. Aus diesem Grunde finden Biegungs- und Verdrehungsfedern ausgedehnte Anwendung bei Kraft- und Gewichtsmessern (Federwaagen, Federmanometer, Dynamometer u. dgl.)