Mithin muss die Centrifugalkraft

$$m \varrho_0 \omega^2 = \frac{\gamma_1}{g} \frac{r^2 d a}{2} h \frac{2}{3} r \omega^2$$

$$= \frac{\gamma_1}{g} \frac{h d a}{3} r c^2$$

von den Spannkräften $\sigma_2 F$ im Gleichgewichte gehalten werden. Dies führt mittels eines ähnlichen Kraftecks wie in Fig. 113 zu der Gleichung

$$\sigma_2 F d a = m \varrho_0 \omega^2 = \frac{\gamma_1}{g} \frac{h d a}{3} r c^2 \quad \text{mit}$$

$$\sigma_2 = \frac{\gamma_1}{g} \frac{h r}{3 F} c^2,$$

so dass die Gesammtspannung der Ringe wird

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{c^2}{g}\left(\gamma + \gamma_1 \frac{h r}{3 F}\right).$$

Für den erforderlichen Ringquerschnitt ergiebt sich dann

$$F = \frac{1}{3} \frac{\gamma_1 h r c^2}{g \sigma - \gamma c^2}.$$

Beispiel: Soll für einen Mühlstein von $0{,}7$ m Halbmesser und $0{,}3$ m Höhe der Querschnitt der Ringe in qcm berechnet werden, so beziehen wir sämmtliche Zahlen auf cm, setzen $r = 70$, $h = 30$, $\gamma_1 = 0{,}002$, $\gamma = 0{,}008$ (rund), $g = 981$, die sekundliche Umfangsgeschwindigkeit $c = 9$ m $= 900$ cm, die zulässige Spannung $\sigma = 200$ at (so gering, weil ein Maschinentheil vorliegt, der nicht in fortwährender gleichmässiger Bewegung ist, sondern bald ruht, bald umläuft, so dass auch die Spannung und somit die elastische Dehnung häufigem Wechsel unterworfen ist). Dann wird

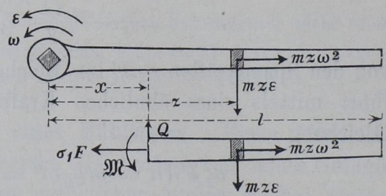
$$F = \frac{1}{3} \frac{0{,}002 \cdot 30 \cdot 70 \cdot 900^2}{981 \cdot 200 - 0{,}008 \cdot 900^2} = 6 \text{ qcm}$$

Dieser Gesammtquerschnitt ist auf mehrere, zweckmässig angeordnete Ringe zu vertheilen.

3. Ungleichförmige Drehung um eine feste Achse.

Die Drehachse möge mittels eines Vierkants dem Stabe eine Winkelbeschleunigung ε (Fig. 115) etwa links herum ertheilen; dann hat ein Massentheilchen m im Abstande z von der Achse ausser der von der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit ω herrührenden Centripetalbeschleunigung $z\omega^2$ noch eine Umfangsbeschleunigung $z\varepsilon$; als Ergänzungskraft tritt daher ausser der Centrifugalkraft noch eine Kraft $mz\varepsilon$ auf, welche rechtwinklig zur Stabrichtung, in Fig. 115 abwärts gerichtet ist. Die Spannkräfte einer Schnittstelle haben daher nicht nur einer Längskraft, sondern auch quer gerichteten Kräften das Gleichgewicht zu halten; letztere bilden ein Biegungsmoment und rufen an der Schnittfläche ein Spannungsmoment hervor. Die Centrifugalkräfte bedingen eine über die Schnittfläche gleichmässig ausgedehnte Spannung σ_1, welche nach Gl. 1, S. 94 zu berechnen ist. Ist σ_2 die stärkste Biegungsspannung an der Schnittstelle und ist $\mathfrak{W}$ das Widerstandsmoment der Querschnittsfigur, so ist $\sigma_2 \mathfrak{W}$ das Spannungsmoment. Zum Biegungsmomente liefert das eine Massentheilchen m den Beitrag $mz\varepsilon(z-x)$. Dies ist von $z=x$ bis $z=l$ zu integrieren. Daher wird

Fig. 115.



$$\sigma_2 \mathfrak{W} = \mathfrak{M} = \varepsilon \int_{z=x}^{z=l} mz(z-x).$$

Darin ist $m = \frac{\gamma}{g} F_z dz$, wenn F_z der Querschnitt im Abstande z von der Drehachse.

Gehen wir nun wieder zu einem **prismatischen** Stabe mit $F_z = F$ und mit $m = \frac{\gamma}{g} F dz$ über, so wird

$$\sigma_2 \mathfrak{W} = \frac{\gamma}{g} \varepsilon F \int_x^l (z^2 - xz)\, dz = \frac{\gamma}{g} \varepsilon F \left(\frac{l^3 - x^3}{3} - x\frac{l^2 - x^2}{2}\right).$$

Führt man die Umfangsgeschwindigkeit $c = l\omega$ und die Umfangsbeschleunigung $p = l\varepsilon$ ein, so wird

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \gamma \left\{\frac{c^2}{2g}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) + \frac{p}{g}\frac{F}{\mathfrak{W}l}\left(\frac{l^3 - x^3}{3} - x\frac{l^2 - x^2}{2}\right)\right\}.$$

Der gefährliche Querschnitt liegt (wie bei gleichförmiger Drehung) dicht an der Achse mit $x = 0$, und es wird

$$\sigma_{max} = \gamma \left\{ \frac{c^2}{2g} + \frac{p}{g} \frac{Fl^2}{3\mathfrak{W}} \right\}.$$

Beispiel: Solchen Spannungen sind besonders Degenklingen ausgesetzt, wenn ihnen durch die Hand des Fechters eine heftige Drehbeschleunigung in der Richtung quer zur Schärfe ertheilt wird. Nimmt man den Querschnitt annähernd als Rechteck, die Breite $b = 1{,}5$ cm die Dicke $d = 0{,}2$ cm, die Länge $l = 80$ cm an, so wird $\mathfrak{W} = {}^1/_6\, Fd$. Die Spannung σ_1 ist in solchen Fällen unbedeutend, da die einzelnen Bewegungen viel zu kurze Dauer haben, als dass bedeutende Umfangs*geschwindigkeiten* c entstehen könnten. Es sind hier nur die Umfangs*beschleunigungen* wichtig. Wir setzen daher

$$\sigma = \sigma_2 = \gamma \frac{p}{g} \frac{Fl^2}{3\mathfrak{W}} = \gamma \frac{p}{g} \frac{2\,l^2}{d} = 0{,}003 \cdot \frac{p}{g} \frac{2 \cdot 80^2}{0{,}2} = 512 \frac{p}{g}.$$

Es erfordert dies ein Kraftmoment der Hand

$$\mathfrak{M} = \varepsilon J = \frac{1}{3} M l^2 \varepsilon = \frac{1}{3} p M l = \frac{1}{3} \frac{p}{g} \gamma F l^2 = \frac{1}{3} \frac{p}{g} \cdot 15{,}36 \text{ cmkg}.$$

Ist in einem besonderen Falle $p = 3g$, so wird die stärkste Spannung $\sigma = 1536$ at, das Kraftmoment der Hand $\mathfrak{M} = 15{,}4$ cmkg. Die Faust eines geübten Fechters kann wohl das 10fache leisten, daher die Klinge durch einen Lutthieb zerbrechen.

C. Formänderungs-Arbeit elastisch-fester Körper.

Während bisher das Vorhandensein eines bestimmten Spannungszustandes angenommen wurde, sollen nun die Vorgänge beim Entstehen der Spannungen und Formänderungen untersucht werden. Es kommt hierbei vor Allem auf die Bestimmung der bei der Formänderung von den äusseren und inneren Kräften verrichteten Arbeit, der sog. Formänderungs-Arbeit, an.

I. Arbeit bei der Verlängerung und Verkürzung gerader Stäbe.

Ein prismatischer Stab von der Länge l und dem Querschnitt F sei an dem einen Ende (links in Fig. 116) befestigt; am anderen freien Ende wirke eine im Schwerpunkte der Endfläche angreifende Zugkraft K. Diese Kraft soll aber der Grösse nach nicht gleichbleibend sein, sondern sie soll langsam und stetig von Null bis zu