Das grösste Moment findet sich an der Angriffsstelle der Kraft K mit $x = \frac{1}{2} l$ zu

5) $$\mathfrak{M}_{max} = \gamma F \frac{p}{g} \frac{l^2}{8}.$$

Ist die Beschleunigung lothrecht aufwärts gerichtet und wirkt auch die Schwere auf den Stab, so ist, wie auf S. 91 statt $p : g$ nunmehr $1 + \frac{p}{g}$ einzuführen. Ist $\mathfrak{W} = J : e$ das Widerstandsmoment des Stab-Querschnitts, so wird die stärkste Spannung

$$\sigma = \frac{\mathfrak{M}_{max}}{\mathfrak{W}} = \frac{\gamma F l^2}{8\,\mathfrak{W}}\left(1 + \frac{p}{g}\right).$$

Mit $\gamma F l = P$ (Gewicht des Stabes) wird

$$\sigma = \frac{Pl}{8\,\mathfrak{W}}\left(1 + \frac{p}{g}\right);$$

ist noch der Querschnitt ein Kreis vom Halbmesser r, so wird $\mathfrak{W} = \frac{1}{4} r^3 \pi$ und

6) $$\sigma = \frac{Pl}{2 r^3 \pi} = \frac{\gamma l^2}{2 r}\left(1 + \frac{p}{g}\right).$$

Beispiel: Ein nahezu cylindrischer Baum von 12^{m} Länge und $0{,}1^{\text{m}}$ Halbmesser soll mittels eines in seiner Mitte befestigten Seiles auf ein Baugerüst gezogen werden. Das Hinaufziehen erfolge aber nicht gleichmässig, sondern mit einer Beschleunigung $p = \frac{1}{2} g$. Ein Kubikmeter des Holzes wiege 600^{kg}, dann ergiebt sich, wenn man diese Zahlen in Gl. 6 einführt, die Spannung natürlich in $^{\text{kg}}/_{\text{qm}}$, nämlich

$$\sigma = \frac{600 \cdot 12^2}{2 \cdot 0{,}1} \cdot 1{,}5 = 648\,000,$$

oder, durch 10 000 getheilt,

$$\sigma = 64{,}8^{\text{at}}.$$

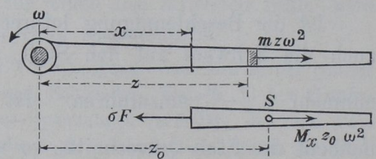
Will man σ unmittelbar in $^{\text{at}}$ erhalten, so muss man γ als Gewicht eines Kubikcentimeters $= 600 : 100^3$, $l = 1200^{\text{cm}}$, $r = 10^{\text{cm}}$ einführen. Die Formel gilt auch, wenn bei etwaigem Hinablassen eine Verzögerung p, vielleicht durch Bremsung der Windevorrichtung, eintritt. Für gleichmässige Bewegung ($p = 0$) wird die Spannung nur $\frac{2}{3} \cdot 64{,}8 = 43{,}2^{\text{at}}$.

2. Gleichmässige Drehung um eine feste Achse.

Bei gleichmässiger Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit ω (Fig. 112) erfährt ein Massentheilchen m im Abstande z von der

Drehachse die Centripetalbeschleunigung $z\omega^2$ (Theil 1, S 88); dem entspricht als Ergänzungskraft die Centrifugalkraft $mz\omega^2$. Führt man im Abstand x von der Drehachse einen Schnitt, bezeichnet die entsprechende Querschnittsfläche mit F, die daran auftretende Spannung mit σ, so muss die innere Spannkraft σF den Centrifugalkräften des Stabtheiles zwischen der Schnittstelle und dem freien Ende das Gleichgewicht halten, oder es muss sein

Fig. 112.



1) $$\sigma F = \omega^2 \Sigma m z = \omega^2 M_x z_0\,,$$

wenn M_x die Masse des abgeschnittenen Stabtheiles, z_0 der Abstand seines Schwerpunkts von der Drehachse bedeuten. Sind Form und Massenvertheilung des Stabes bekannt, so kann man für jede Schnittstelle σ berechnen.

Ein **prismatischer** Stab von der Länge l und dem Querschnitt F, ergiebt hiernach

$$M_x = \gamma F(l - x) : g\,, \quad z_0 = {}^1\!/_2\,(l + x) \quad \text{und}$$

$$\sigma = \frac{\omega^2\gamma}{g}(l - x)\frac{(l + x)}{2} = \frac{\omega^2\gamma}{g}\,\frac{l^2 - x^2}{2}.$$

Führt man dann die Umfangsgeschwindigkeit $c = l\omega$ des Stabes ein, so wird

2) $$\sigma = \gamma\frac{c^2}{2g}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right),$$

worin $\frac{c^2}{2g}$ die der Umfangsgeschwindigkeit entsprechende Geschwindigkeitshöhe bedeutet. Diese Spannung wird am grössten für $x = 0$, d. h. dicht an der Achse, nämlich

3) $$\sigma_{max} = \gamma\frac{c^2}{2g}.$$

Dieselbe Spannung erfährt an der Aufhängestelle ein lothrecht herabhängender prismatischer Stab oder Draht von der Dichte γ, wenn seine Länge $= \frac{c^2}{2g}$ ist.

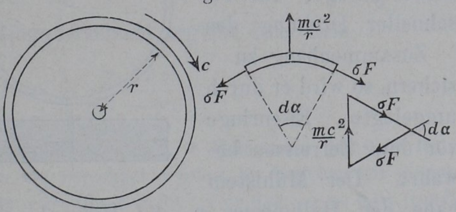
Beispiel: Bei welcher sekundlichen Umfsngsgeschwindigkeit erhält ein um seinen Endpunkt sich drehender prismatischer Schmiedeisenstab eine Spannung von 700 at? 1 cbm Schmiedeeisen wiegt 7800 kg $= \gamma$. Da hier c in m/sek. verlangt wird, so müssen auch σ, γ und g auf Meter bezogen werden. Dann ist $\sigma = 7\,000\,000$ kg/qm, $\frac{c^2}{2\,g} = \frac{7\,000\,000}{7800} =$ rund 900 m und $c = 133$ m/sek.

Will man mit $\sigma = 700$ kg/qcm rechnen, so muss man $\gamma = 0{,}0078$, dem Gewichte eines Kubikcentimeters und $g = 981$ cm/sek.² setzen, dann wird $\frac{c^2}{2\,g} = \frac{700}{0{,}0078} = 90\,000$ cm, $c = 13\,300$ cm/sek..

Ein Bleistab von der Dichte $\gamma = 11\,400$ kg/cbm und einer Zugfestigkeit $= 130$ at erreicht diese Grenze der Festigkeit bei $\frac{c^2}{2\,g} = \frac{1\,300\,000}{11\,400} = 114$ m und $c = 47$ m/sek..

Ein **Ring** vom Halbmesser r, der mit der Geschwindigkeit c gleichmässig umläuft (Fig. 113), erfährt ebenfalls Spannungen. Schneidet man aus dem Ringe ein Theilchen vom Mittelpunktswinkel $d\alpha$ heraus und nimmt an, dass sich die Spannkraft gleichmässig über den Querschnitt F des Ringes vertheile (was bei geringer Wandstärke zulässig ist), so entstehen an den Schnittstellen die Spannkräfte σF, welche mit der Centrifugalkraft $\frac{m\,c^2}{r}$ im Gleichgewicht sein müssen. Dann folgt aus dem Krafteck

Fig. 113.



$$2\,\sigma F \sin\frac{d\alpha}{2} = \sigma F d\alpha = \frac{m\,c^2}{r} \quad \text{und, weil}$$

$$m = \frac{\gamma}{g}\, r\, d\alpha\, F,$$

4) $$\sigma = \gamma\,\frac{c^2}{g} = 2\,\gamma\,\frac{c^2}{2\,g},$$

d. i. das Doppelte von σ_{max} in Gl. 3 für den geraden Stab.

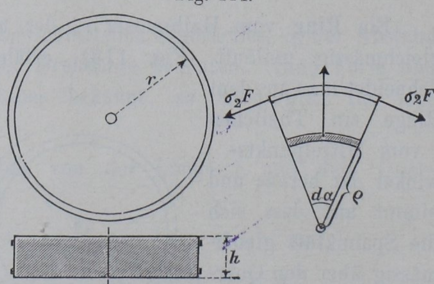
Beispiel: Soll ein dünner Schmiedeeisenring auf die Spannung $\sigma = 700$ at gebracht werden, so ist dazu eine Geschwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{2g} = \frac{7\,000\,000}{2 \cdot 7800} = 450$ m, eine Umfangsgeschwindigkeit

$$c = 94 \text{ m/sek.}$$

erforderlich. Diese darf von einem schmiedeeisernen Schwungrade nicht überschritten werden. Ein Bleiring gelangt schon bei $c = 47\sqrt{0,5} = 47 \cdot 0,707 = 33$ m/sek. (vgl. das vorige Beispiel) an die Grenze der Festigkeit.

Spannungen der Ringe eines Mühlsteins. Einen Mühlstein pflegt man, um die wünschenswerthe Gleichmässigkeit seines Gefüges zu erzielen, wie sie bei einem natürlichen Steine solcher Grösse nicht leicht vorkommt, aus einzelnen Stücken zusammenzukitten. Da die Zugfestigkeit des zusammengesetzten Steines nicht genügt, um bei schneller Drehung den Zusammenhang zu sichern, so wird er durch umgelegte Eisenringe vor dem Zerreissen bewahrt. Der Mühlstein habe den Halbmesser r, die Höhe h, die Dichte γ_1; es sei F der Gesammtquerschnitt der Ringe, γ die Dichte derselben. Bei der Berechnung der Ringspannungen setzen wir voraus, dass die Festigkeit des Steines unerheblich sei, dass allein die Ringe den Zusammenhalt sichern. Die Spannung σ der Ringe rührt mit dem Betrage $\sigma_1 = \gamma \frac{c^2}{g}$ (Gl. 4) von der eigenen Masse her; es soll jetzt nur der Betrag σ_2, der durch die Masse des Steines bedingt ist, berechnet werden. Trennt man aus dem Stein einen Ausschnitt vom Mittelpunktswinkel $d\alpha$ ab, so entspricht einem unendlich kleinen Ringtheilchen vom Halbmesser ϱ eine Centrifugalkraft $dm\,\varrho\,\omega^2$, mithin dem ganzen Ausschnitte eine solche von der Grösse $\omega^2 \varrho_0 \Sigma dm$, worin $\varrho_0 = \frac{2}{3} r$, $\Sigma dm = \frac{\gamma_1}{g} \frac{r^2 d\alpha}{2} h = m$ (Masse des Ausschnittes).

Fig. 114.



Mithin muss die Centrifugalkraft

$$m \varrho_0 \omega^2 = \frac{\gamma_1}{g} \frac{r^2 d\alpha}{2} h \frac{2}{3} r \omega^2$$

$$= \frac{\gamma_1}{g} \frac{h\, d\alpha}{3} r c^2$$

von den Spannkräften $\sigma_2 F$ im Gleichgewichte gehalten werden. Dies führt mittels eines ähnlichen Kraftecks wie in Fig. 113 zu der Gleichung

$$\sigma_2 F d\alpha = m \varrho_0 \omega^2 = \frac{\gamma_1}{g} \frac{h\, d\alpha}{3} r c^2 \quad \text{mit}$$

$$\sigma_2 = \frac{\gamma_1}{g} \frac{h r}{3F} c^2,$$

so dass die Gesammtspannung der Ringe wird

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{c^2}{g}\left(\gamma + \gamma_1 \frac{h r}{3F}\right).$$

Für den erforderlichen Ringquerschnitt ergiebt sich dann

$$F = \frac{1}{3} \frac{\gamma_1 h r c^2}{g \sigma - \gamma c^2}.$$

Beispiel: Soll für einen Mühlstein von 0,7 m Halbmesser und 0,3 m Höhe der Querschnitt der Ringe in qcm berechnet werden, so beziehen wir sämmtliche Zahlen auf cm, setzen $r = 70$, $h = 30$, $\gamma_1 = 0{,}002$, $\gamma = 0{,}008$ (rund), $g = 981$, die sekundliche Umfangsgeschwindigkeit $c = 9$ m $= 900$ cm, die zulässige Spannung $\sigma = 200$ at (so gering, weil ein Maschinentheil vorliegt, der nicht in fortwährender gleichmässiger Bewegung ist, sondern bald ruht, bald umläuft, so dass auch die Spannung und somit die elastische Dehnung häufigem Wechsel unterworfen ist). Dann wird

$$F = \frac{1}{3} \frac{0{,}002 \cdot 30 \cdot 70 \cdot 900^2}{981 \cdot 200 - 0{,}008 \cdot 900^2} = 6 \text{ qcm}$$

Dieser Gesammtquerschnitt ist auf mehrere, zweckmässig angeordnete Ringe zu vertheilen.

3. Ungleichförmige Drehung um eine feste Achse.

Die Drehachse möge mittels eines Vierkants dem Stabe eine Winkelbeschleunigung ε (Fig. 115) etwa links herum ertheilen; dann hat ein Massentheilchen m im Abstande z von der Achse