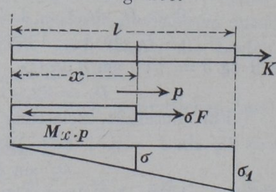
B. Elastisch-feste Körper in Beschleunigungs-Zuständen.

I. Beschleunigte Verschiebung elastisch-fester Körper.

Einem geraden Stabe werde durch eine im Schwerpunkte der vorderen Stirnfläche angreifende Zugkraft K eine Beschleunigung p ertheilt (Fig. 109). Hierdurch entstehen Spannungen und Formänderungen (elastische Verlängerungen). Es wird die Annahme gemacht, die Formänderungen seien bereits derartig eingetreten, dass gegenseitige Bewegungen der einzelnen Punkte des Stabes nicht mehr erfolgen, dass vielmehr alle Theile übereinstimmende Geschwindigkeit und Beschleunigung haben. Dann müssen an dem ganzen Stabe, sowie an jedem abgeschnittenen Theile desselben nach S. 3 die Ergänzungskräfte $[-mp]$ den wirklichen Kräften das Gleichgewicht halten, und es muss der Stab sich bei der Bewegung wie ein starrer Körper verhalten.

Fig. 109.



Nach dem Satze von der Beschleunigung des Schwerpunktes (Theil 1, S. 141) ist

$$p = \frac{K}{M},$$

wenn $M = \gamma F l : g$ die Masse des ganzen Stabes bedeutet (s. Theil 1, S. 126).

Macht man auch hier die Voraussetzung, dass die an einem Querschnitte auftretende Spannkraft sich gleichmässig über dessen Fläche F vertheile, so ist die Spannung an der Angriffsstelle der Kraft K

$$1) \qquad \sigma_1 = \frac{K}{F} = \frac{M}{F} p = \frac{\gamma}{g} l p = \gamma l \frac{p}{g},$$

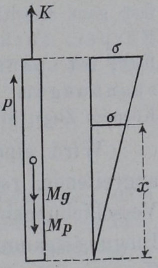
wenn l die Länge des Stabes, γ das Gewicht der Körpereinheit desselben ist. Will man σ_1 in Atmosphären ($^{kg}/_{qcm}$) erhalten, so drücke man l in ^{cm} aus, und es ist dann γ das Gewicht eines Kubikcentimeters in ^{kg}.

Ist σ die Spannung eines Querschnittes im Abstand x vom freien Ende, M_x die Masse des Abschnittes von der Länge x, so muss $\sigma F = M_x p = {}^{\gamma}/_{g} F x p$ sein, mithin

2) $$\sigma = \gamma \frac{p}{g} \cdot x.$$

Diese mit x verhältnisgleich sich ändernde Spannung ist in Fig. 109 dargestellt. Hierbei ist die Einwirkung der Schwere nicht berücksichtigt, vielmehr angenommen, dass die Verschiebung etwa auf einer wagerechten, glatten Unterlage erfolge.

Fig. 110.



Es möge nun die in lothrechter Richtung befindliche Stange der Schwere unterliegen und durch eine oben angreifende Zugkraft K eine Beschleunigung p lothrecht aufwärts erfahren (Fig. 110). Dann ist die gesammte wirkliche Kraft in der Richtung aufwärts $K - Mg = K - \gamma F l$, die gesammte Ergänzungskraft mit dem Sinne abwärts $Mp = {}^{\gamma}/_{g} F l p$, mithin

$$K = M(g + p) = \gamma F l \left(1 + \frac{p}{g}\right)$$

und die Spannung am oberen Ende

3) $$\sigma_1 = \gamma l \left(1 + \frac{p}{g}\right).$$

Nach dem unteren Ende des Stabes vermindert sich die Spannung σ wiederum nach geradlinigem Gesetze bis auf Null.

Ist die Beschleunigung p des Stabes abwärts, K aber wie vorher aufwärts gerichtet, mithin $p \leqq g$, so kehrt in den vorstehenden Formeln p sein Vorzeichen um, es wird

$$K = \gamma F l \left(1 - \frac{p}{g}\right),$$

$$\sigma_1 = \gamma l \left(1 - \frac{p}{g}\right)$$

und im Abstande x vom unteren Ende

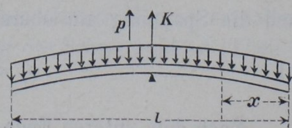
4) $$\sigma = \gamma x\left(1 - \frac{p}{g}\right).$$

Für $p = g$ mit $K = 0$, d. h. für einen frei fallenden Stab, wird $\sigma = 0$, also ist ein frei fallender Stab spannungslos.

Dies gilt freilich nur unter der Voraussetzung, dass sich in der Stange keine von der Herstellung durch Giessen, Schmieden, Walzen, Ziehen (Drahtziehen), Drücken u. dergl. herrührende Spannungen vorfinden, die man auch wohl falsche Spannungen nennt, und die auch vorhanden sind, wenn der Stab äusseren Kräften völlig entzogen ist. In einem mit derartigen Spannungen behafteten Stabe tritt beim freien Falle derselbe Spannungszustand ein, als ob er von äusseren Kräften frei wäre; an jedem Querschnitt ist die gesammte Spannkraft Null, doch können an der Schnittfläche dann gleichwohl innere Zugkräfte und in ihrer Summe ebenso grosse Druckkräfte vorkommen. Solche Herstellungsspannungen lassen sich durch Ausglühen und langsames Abkühlen fast ganz beseitigen. *Jeder frei (ohne Luftwiderstand) fallende Körper, auch wenn er nicht die Form eines geraden Stabes hat, ist spannungslos, abgesehen von etwaigen Herstellungsspannungen.* Die Herstellungsspannungen sind in der Regel im Innern des Körpers Zug-, in der Nähe der Oberfläche aber Druckspannungen.

Wird einem prismatischen Stabe durch eine in seiner Mitte angreifende, rechtwinklig zur Stabrichtung wirkende Kraft K eine Verschiebungsbeschleunigung p ertheilt (Fig. 111), so entstehen Biegungsspannungen. Unter der Voraussetzung, dass die diesen Spannungen entsprechenden Durchbiegungen bereits eingetreten seien, dass also Formänderungen nicht mehr vorkommen, haben sämmtliche Massentheilchen des Stabes die gleiche Beschleunigung p. Die Ergänzungskräfte $[-mp]$, welche mit K im Gleichgewichte sein müssen, bilden eine gleichmässig über die Länge vertheilte Belastung. Ist F der Querschnitt des Stabes, γ wiederum das Gewicht der Körpereinheit, so kommt auf die Längeneinheit das Gewicht γF, die Masse $\gamma/_g F$, die Ergänzungskraft $\gamma F p : g$ (dem Sinne der Beschleunigung p entgegengesetzt). An einer Schnittstelle im Abstande x vom freien Ende entsteht dann ein Biegungsmoment

Fig. 111.



$$\mathfrak{M} = \gamma F \frac{p}{g} \frac{x^2}{2}.$$

Das grösste Moment findet sich an der Angriffsstelle der Kraft K mit $x = {}^1/_2\, l$ zu

$$5)\qquad \mathfrak{M}_{max} = \gamma F \frac{p}{g} \frac{l^2}{8}.$$

Ist die Beschleunigung lothrecht aufwärts gerichtet und wirkt auch die Schwere auf den Stab, so ist, wie auf S. 91 statt $p : g$ nunmehr $1 + \frac{p}{g}$ einzuführen. Ist $\mathfrak{W} = J : e$ das Widerstandsmoment des Stab-Querschnitts, so wird die stärkste Spannung

$$\sigma = \frac{\mathfrak{M}_{max}}{\mathfrak{W}} = \frac{\gamma F l^2}{8\,\mathfrak{W}}\left(1 + \frac{p}{g}\right).$$

Mit $\gamma F l = P$ (Gewicht des Stabes) wird

$$\sigma = \frac{Pl}{8\,\mathfrak{W}}\left(1 + \frac{p}{g}\right);$$

ist noch der Querschnitt ein Kreis vom Halbmesser r, so wird $\mathfrak{W} = {}^1/_4\, r^3 \pi$ und

$$6)\qquad \sigma = \frac{Pl}{2\,r^3\pi} = \frac{\gamma l^2}{2\,r}\left(1 + \frac{p}{g}\right).$$

Beispiel: Ein nahezu cylindrischer Baum von 12 m Länge und 0,1 m Halbmesser soll mittels eines in seiner Mitte befestigten Seiles auf ein Baugerüst gezogen werden. Das Hinaufziehen erfolge aber nicht gleichmässig, sondern mit einer Beschleunigung $p = {}^1/_2\, g$. Ein Kubikmeter des Holzes wiege 600 kg, dann ergiebt sich, wenn man diese Zahlen in Gl. 6 einführt, die Spannung natürlich in kg/qm, nämlich

$$\sigma = \frac{600 \cdot 12^2}{2 \cdot 0{,}1} \cdot 1{,}5 = 648\,000,$$

oder, durch 10 000 getheilt,

$$\sigma = 64{,}8 \text{ at}.$$

Will man σ unmittelbar in at erhalten, so muss man γ als Gewicht eines Kubikcentimeters $= 600 : 100^3$, $l = 1200$ cm, $r = 10$ cm einführen. Die Formel gilt auch, wenn bei etwaigem Hinablassen eine Verzögerung p, vielleicht durch Bremsung der Windevorrichtung, eintritt. Für gleichmässige Bewegung ($p = 0$) wird die Spannung nur ${}^2/_3 \cdot 64{,}8 = 43{,}2$ at.

2. Gleichmässige Drehung um eine feste Achse.

Bei gleichmässiger Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit ω (Fig. 112) erfährt ein Massentheilchen m im Abstande z von der