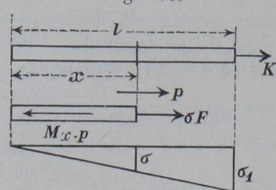
B. Elastisch-feste Körper in Beschleunigungs-Zuständen.

I. Beschleunigte Verschiebung elastisch-fester Körper.

Einem geraden Stabe werde durch eine im Schwerpunkte der vorderen Stirnfläche angreifende Zugkraft K eine Beschleunigung p ertheilt (Fig. 109). Hierdurch entstehen Spannungen und Formänderungen (elastische Verlängerungen). Es wird die Annahme gemacht, die Formänderungen seien bereits derartig eingetreten, dass gegenseitige Bewegungen der einzelnen Punkte des Stabes nicht mehr erfolgen, dass vielmehr alle Theile übereinstimmende Geschwindigkeit und Beschleunigung haben. Dann müssen an dem ganzen Stabe, sowie an jedem abgeschnittenen Theile desselben nach S. 3 die Ergänzungskräfte $[-mp]$ den wirklichen Kräften das Gleichgewicht halten, und es muss der Stab sich bei der Bewegung wie ein starrer Körper verhalten.

Fig. 109.



Nach dem Satze von der Beschleunigung des Schwerpunktes (Theil 1, S. 141) ist

$$p = \frac{K}{M},$$

wenn $M = \gamma F l : g$ die Masse des ganzen Stabes bedeutet (s. Theil 1, S. 126).

Macht man auch hier die Voraussetzung, dass die an einem Querschnitte auftretende Spannkraft sich gleichmässig über dessen Fläche F vertheile, so ist die Spannung an der Angriffsstelle der Kraft K

$$1) \qquad \sigma_1 = \frac{K}{F} = \frac{M}{F} p = \frac{\gamma}{g} l p = \gamma l \frac{p}{g},$$

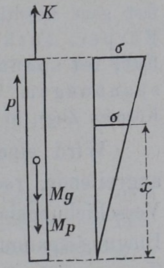
wenn l die Länge des Stabes, γ das Gewicht der Körpereinheit desselben ist. Will man σ_1 in Atmosphären ($^{kg}/_{qcm}$) erhalten, so drücke man l in ^{cm} aus, und es ist dann γ das Gewicht eines Kubikcentimeters in ^{kg}.

Ist σ die Spannung eines Querschnittes im Abstand x vom freien Ende, M_x die Masse des Abschnittes von der Länge x, so muss $\sigma F = M_x p = {}^{\gamma}/_{g} F x p$ sein, mithin

$$\sigma = \gamma \frac{p}{g} \cdot x. \tag{2}$$

Diese mit x verhältnisgleich sich ändernde Spannung ist in Fig. 109 dargestellt. Hierbei ist die Einwirkung der Schwere nicht berücksichtigt, vielmehr angenommen, dass die Verschiebung etwa auf einer wagerechten, glatten Unterlage erfolge.

Fig. 110.



Es möge nun die in lothrechter Richtung befindliche Stange der Schwere unterliegen und durch eine oben angreifende Zugkraft K eine Beschleunigung p lothrecht aufwärts erfahren (Fig. 110). Dann ist die gesammte wirkliche Kraft in der Richtung aufwärts $K - Mg = K - \gamma F l$, die gesammte Ergänzungskraft mit dem Sinne abwärts $Mp = {}^{\gamma}/_{g} F l p$, mithin

$$K = M(g + p) = \gamma F l \left(1 + \frac{p}{g}\right)$$

und die Spannung am oberen Ende

$$\sigma_1 = \gamma l \left(1 + \frac{p}{g}\right). \tag{3}$$

Nach dem unteren Ende des Stabes vermindert sich die Spannung σ wiederum nach geradlinigem Gesetze bis auf Null.

Ist die Beschleunigung p des Stabes abwärts, K aber wie vorher aufwärts gerichtet, mithin $p \leqq g$, so kehrt in den vorstehenden Formeln p sein Vorzeichen um, es wird

$$K = \gamma F l \left(1 - \frac{p}{g}\right),$$

$$\sigma_1 = \gamma l \left(1 - \frac{p}{g}\right)$$

und im Abstande x vom unteren Ende

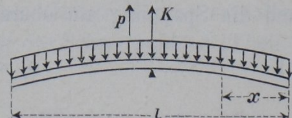
$$\sigma = \gamma x \left(1 - \frac{p}{g}\right). \tag{4}$$

Für $p = g$ mit $K = 0$, d. h. für einen frei fallenden Stab, wird $\sigma = 0$, also ist ein frei fallender Stab spannungslos.

Dies gilt freilich nur unter der Voraussetzung, dass sich in der Stange keine von der Herstellung durch Giessen, Schmieden, Walzen, Ziehen (Drahtziehen), Drücken u. dergl. herrührende Spannungen vorfinden, die man auch wohl falsche Spannungen nennt, und die auch vorhanden sind, wenn der Stab äusseren Kräften völlig entzogen ist. In einem mit derartigen Spannungen behafteten Stabe tritt beim freien Falle derselbe Spannungszustand ein, als ob er von äusseren Kräften frei wäre; an jedem Querschnitt ist die gesammte Spannkraft Null, doch können an der Schnittfläche dann gleichwohl innere Zugkräfte und in ihrer Summe ebenso grosse Druckkräfte vorkommen. Solche Herstellungsspannungen lassen sich durch Ausglühen und langsames Abkühlen fast ganz beseitigen. Jeder frei (ohne Luftwiderstand) fallende Körper, auch wenn er nicht die Form eines geraden Stabes hat, ist spannungslos, abgesehen von etwaigen Herstellungsspannungen. Die Herstellungsspannungen sind in der Regel im Innern des Körpers Zug-, in der Nähe der Oberfläche aber Druckspannungen.

Wird einem prismatischen Stabe durch eine in seiner Mitte angreifende, rechtwinklig zur Stabrichtung wirkende Kraft K eine Verschiebungsbeschleunigung p ertheilt (Fig. 111), so entstehen Biegungsspannungen. Unter der Voraussetzung, dass die diesen Spannungen entsprechenden Durchbiegungen bereits eingetreten seien, dass also Formänderungen nicht mehr vorkommen, haben sämmtliche Massentheilchen des Stabes die gleiche Beschleunigung p. Die Ergänzungskräfte $[-mp]$, welche mit K im Gleichgewichte sein müssen, bilden eine gleichmässig über die Länge vertheilte Belastung. Ist F der Querschnitt des Stabes, γ wiederum das Gewicht der Körpereinheit, so kommt auf die Längeneinheit das Gewicht γF, die Masse $\gamma/_g F$, die Ergänzungskraft $\gamma F p : g$ (dem Sinne der Beschleunigung p entgegengesetzt). An einer Schnittstelle im Abstande x vom freien Ende entsteht dann ein Biegungsmoment

Fig. 111.



$$\mathfrak{M} = \gamma F \frac{p}{g} \frac{x^2}{2}.$$

Das grösste Moment findet sich an der Angriffsstelle der Kraft K mit $x = {}^1\!/_2\, l$ zu

$$\mathfrak{M}_{max} = \gamma F \frac{p}{g} \frac{l^2}{8}. \tag{5}$$

Ist die Beschleunigung lothrecht aufwärts gerichtet und wirkt auch die Schwere auf den Stab, so ist, wie auf S. 91 statt $p : g$ nunmehr $1 + \frac{p}{g}$ einzuführen. Ist $\mathfrak{W} = J : e$ das Widerstandsmoment des Stab-Querschnitts, so wird die stärkste Spannung

$$\sigma = \frac{\mathfrak{M}_{max}}{\mathfrak{W}} = \frac{\gamma F l^2}{8\,\mathfrak{W}}\left(1 + \frac{p}{g}\right).$$

Mit $\gamma F l = P$ (Gewicht des Stabes) wird

$$\sigma = \frac{P l}{8\,\mathfrak{W}}\left(1 + \frac{p}{g}\right);$$

ist noch der Querschnitt ein Kreis vom Halbmesser r, so wird $\mathfrak{W} = {}^1\!/_4\, r^3 \pi$ und

$$\sigma = \frac{P l}{2\, r^3 \pi} = \frac{\gamma l^2}{2\, r}\left(1 + \frac{p}{g}\right). \tag{6}$$

Beispiel: Ein nahezu cylindrischer Baum von 12^{m} Länge und $0{,}1^{\mathrm{m}}$ Halbmesser soll mittels eines in seiner Mitte befestigten Seiles auf ein Baugerüst gezogen werden. Das Hinaufziehen erfolge aber nicht gleichmässig, sondern mit einer Beschleunigung $p = {}^1\!/_2\, g$. Ein Kubikmeter des Holzes wiege 600^{kg}, dann ergiebt sich, wenn man diese Zahlen in Gl. 6 einführt, die Spannung natürlich in ${}^{\mathrm{kg}}/_{\mathrm{qm}}$, nämlich

$$\sigma = \frac{600 \cdot 12^2}{2 \cdot 0{,}1} \cdot 1{,}5 = 648\,000\,,$$

oder, durch 10 000 getheilt,

$$\sigma = 64{,}8^{\mathrm{at}}.$$

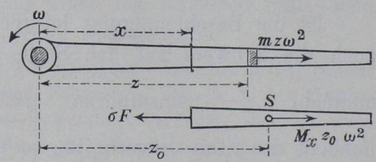
Will man σ unmittelbar in ${}^{\mathrm{at}}$ erhalten, so muss man γ als Gewicht eines Kubikcentimeters $= 600 : 100^3$, $l = 1200^{\mathrm{cm}}$, $r = 10^{\mathrm{cm}}$ einführen. Die Formel gilt auch, wenn bei etwaigem Hinablassen eine Verzögerung p, vielleicht durch Bremsung der Windevorrichtung, eintritt. Für gleichmässige Bewegung ($p = 0$) wird die Spannung nur ${}^2\!/_3 \cdot 64{,}8 = 43{,}2^{\mathrm{at}}$.

2. Gleichmässige Drehung um eine feste Achse.

Bei gleichmässiger Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit ω (Fig. 112) erfährt ein Massentheilchen m im Abstande z von der

Drehachse die Centripetalbeschleunigung $z\omega^2$ (Theil 1, S 88); dem entspricht als Ergänzungskraft die Centrifugalkraft $mz\omega^2$. Führt man im Abstand x von der Drehachse einen Schnitt, bezeichnet die entsprechende Querschnittsfläche mit F, die daran auftretende Spannung mit σ, so muss die innere Spannkraft σF den Centrifugalkräften des Stabtheiles zwischen der Schnittstelle und dem freien Ende das Gleichgewicht halten, oder es muss sein

Fig. 112.



$$1)\qquad \sigma F = \omega^2 \Sigma m z = \omega^2 M_x z_0 ,$$

wenn M_x die Masse des abgeschnittenen Stabtheiles, z_0 der Abstand seines Schwerpunkts von der Drehachse bedeuten. Sind Form und Massenvertheilung des Stabes bekannt, so kann man für jede Schnittstelle σ berechnen.

Ein **prismatischer** Stab von der Länge l und dem Querschnitt F, ergiebt hiernach

$$M_x = \gamma F (l - x) : g , \quad z_0 = {}^1/_2 (l + x) \quad \text{und}$$

$$\sigma = \frac{\omega^2 \gamma}{g} (l - x) \frac{(l + x)}{2} = \frac{\omega^2 \gamma}{g} \frac{l^2 - x^2}{2} .$$

Führt man dann die Umfangsgeschwindigkeit $c = l\omega$ des Stabes ein, so wird

$$2)\qquad \sigma = \gamma \frac{c^2}{2g} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right),$$

worin $\frac{c^2}{2g}$ die der Umfangsgeschwindigkeit entsprechende Geschwindigkeitshöhe bedeutet. Diese Spannung wird am grössten für $x = 0$, d. h. dicht an der Achse, nämlich

$$3)\qquad \sigma_{max} = \gamma \frac{c^2}{2g} .$$

Dieselbe Spannung erfährt an der Aufhängestelle ein lothrecht herabhängender prismatischer Stab oder Draht von der Dichte γ, wenn seine Länge $= \frac{c^2}{2g}$ ist.

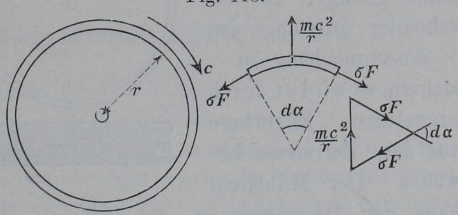
Beispiel: Bei welcher sekundlichen Umfsngsgeschwindigkeit erhält ein um seinen Endpunkt sich drehender prismatischer Schmiedeisenstab eine Spannung von 700 at? 1 cbm Schmiedeeisen wiegt 7800 kg $= \gamma$. Da hier c in m/sek. verlangt wird, so müssen auch σ, γ und g auf Meter bezogen werden. Dann ist $\sigma = 7\,000\,000$ kg/qm, $\frac{c^2}{2\,g} = \frac{7\,000\,000}{7800}$ = rund 900 m und $c = 133$ m/sek.

Will man mit $\sigma = 700$ kg/qcm rechnen, so muss man $\gamma = 0{,}0078$, dem Gewichte eines Kubikcentimeters und $g = 981$ cm/sek.² setzen, dann wird $\frac{c^2}{2\,g} = \frac{700}{0{,}0078} = 90\,000$ cm, $c = 13\,300$ cm/sek..

Ein Bleistab von der Dichte $\gamma = 11\,400$ kg/cbm und einer Zugfestigkeit $= 130$ at erreicht diese Grenze der Festigkeit bei $\frac{c^2}{2\,g} = \frac{1\,300\,000}{11\,400} = 114$ m und $c = 47$ m/sek..

Ein **Ring** vom Halbmesser r, der mit der Geschwindigkeit c gleichmässig umläuft (Fig. 113), erfährt ebenfalls Spannungen. Schneidet man aus dem Ringe ein Theilchen vom Mittelpunktswinkel $d\alpha$ heraus und nimmt an, dass sich die Spannkraft gleichmässig über den Querschnitt F des Ringes vertheile (was bei geringer Wandstärke zulässig ist), so entstehen an den Schnittstellen die Spannkräfte σF, welche mit der Centrifugalkraft $\frac{m\,c^2}{r}$ im Gleichgewicht sein müssen. Dann folgt aus dem Krafteck

Fig. 113.



$$2\,\sigma F \sin\frac{d\alpha}{2} = \sigma F\,d\alpha = \frac{m\,c^2}{r} \quad \text{und, weil}$$

$$m = \frac{\gamma}{g}\,r\,d\alpha\,F,$$

4) $$\sigma = \gamma\,\frac{\boldsymbol{c}^2}{\boldsymbol{g}} = 2\,\gamma\,\frac{\boldsymbol{c}^2}{2\,\boldsymbol{g}},$$

d. i. das Doppelte von σ_{max} in Gl. 3 für den geraden Stab.

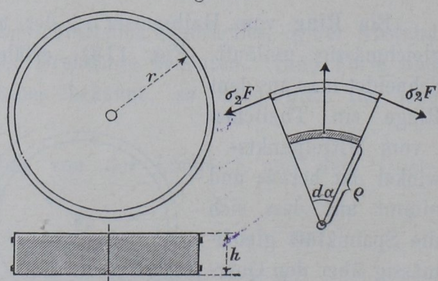
Beispiel: Soll ein dünner Schmiedeeisenring auf die Spannung $\sigma = 700$ at gebracht werden, so ist dazu eine Geschwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{2\,g} = \frac{7\,000\,000}{2 \cdot 7800}$ $= 450$ m, eine Umfangsgeschwindigkeit

$$c = 94 \text{ m/sek.}$$

erforderlich. Diese darf von einem schmiedeeisernen Schwungrade nicht überschritten werden. Ein Bleiring gelangt schon bei $c = 47\sqrt{0,5} = 47 \cdot 0{,}707$ $= 33$ m/sek. (vgl. das vorige Beispiel) an die Grenze der Festigkeit.

Spannungen der Ringe eines Mühlsteins. Einen Mühlstein pflegt man, um die wünschenswerthe Gleichmässigkeit seines Gefüges zu erzielen, wie sie bei einem natürlichen Steine solcher Grösse nicht leicht vorkommt, aus einzelnen Stücken zusammenzukitten. Da die Zugfestigkeit des zusammengesetzten Steines nicht genügt, um bei schneller Drehung den Zusammenhang zu sichern, so wird er durch umgelegte Eisenringe vor dem Zerreissen bewahrt. Der Mühlstein

Fig. 114.



habe den Halbmesser r, die Höhe h, die Dichte γ_1; es sei F der Gesammtquerschnitt der Ringe, γ die Dichte derselben. Bei der Berechnung der Ringspannungen setzen wir voraus, dass die Festigkeit des Steines unerheblich sei, dass allein die Ringe den Zusammenhalt sichern. Die Spannung σ der Ringe rührt mit dem Betrage $\sigma_1 = \gamma \frac{c^2}{g}$ (Gl. 4) von der eigenen Masse her; es soll jetzt nur der Betrag σ_2, der durch die Masse des Steines bedingt ist, berechnet werden. Trennt man aus dem Stein einen Ausschnitt vom Mittelpunktswinkel $d\alpha$ ab, so entspricht einem unendlich kleinen Ringtheilchen vom Halbmesser ϱ eine Centrifugalkraft $dm\varrho\omega^2$, mithin dem ganzen Ausschnitte eine solche von der Grösse $\omega^2\varrho_0\Sigma dm$, worin $\varrho_0 = {}^2/_3 r$, $\Sigma dm = \frac{\gamma_1}{g}\frac{r^2 d\alpha}{2} h = m$ (Masse des Ausschnittes).

Mithin muss die Centrifugalkraft

$$m \varrho_0 \omega^2 = \frac{\gamma_1}{g} \frac{r^2 d\alpha}{2} h \frac{2}{3} r \omega^2$$

$$= \frac{\gamma_1}{g} \frac{h d\alpha}{3} r c^2$$

von den Spannkräften $\sigma_2 F$ im Gleichgewichte gehalten werden. Dies führt mittels eines ähnlichen Kraftecks wie in Fig. 113 zu der Gleichung

$$\sigma_2 F d\alpha = m \varrho_0 \omega^2 = \frac{\gamma_1}{g} \frac{h d\alpha}{3} r c^2 \quad \text{mit}$$

$$\sigma_2 = \frac{\gamma_1}{g} \frac{h r}{3 F} c^2,$$

so dass die Gesammtspannung der Ringe wird

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{c^2}{g}\left(\gamma + \gamma_1 \frac{h r}{3 F}\right).$$

Für den erforderlichen Ringquerschnitt ergiebt sich dann

$$F = \frac{1}{3} \frac{\gamma_1 h r c^2}{g \sigma - \gamma c^2}.$$

Beispiel: Soll für einen Mühlstein von 0,7 m Halbmesser und 0,3 m Höhe der Querschnitt der Ringe in qcm berechnet werden, so beziehen wir sämmtliche Zahlen auf cm, setzen $r = 70$, $h = 30$, $\gamma_1 = 0{,}002$, $\gamma = 0{,}008$ (rund), $g = 981$, die sekundliche Umfangsgeschwindigkeit $c = 9$ m $= 900$ cm, die zulässige Spannung $\sigma = 200$ at (so gering, weil ein Maschinentheil vorliegt, der nicht in fortwährender gleichmässiger Bewegung ist, sondern bald ruht, bald umläuft, so dass auch die Spannung und somit die elastische Dehnung häufigem Wechsel unterworfen ist). Dann wird

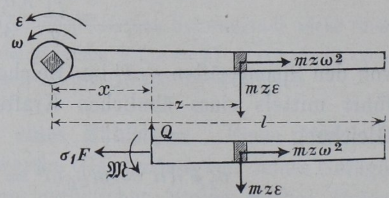
$$F = \frac{1}{3} \frac{0{,}002 \cdot 30 \cdot 70 \cdot 900^2}{981 \cdot 200 - 0{,}008 \cdot 900^2} = 6 \text{ qcm}$$

Dieser Gesammtquerschnitt ist auf mehrere, zweckmässig angeordnete Ringe zu vertheilen.

3. Ungleichförmige Drehung um eine feste Achse.

Die Drehachse möge mittels eines Vierkants dem Stabe eine Winkelbeschleunigung ε (Fig. 115) etwa links herum ertheilen; dann hat ein Massentheilchen m im Abstande z von der Achse ausser der von der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit ω herrührenden Centripetalbeschleunigung $z\omega^2$ noch eine Umfangsbeschleunigung $z\varepsilon$; als Ergänzungskraft tritt daher ausser der Centrifugalkraft noch eine Kraft $mz\varepsilon$ auf, welche rechtwinklig zur Stabrichtung, in Fig. 115 abwärts gerichtet ist. Die Spannkräfte einer Schnittstelle haben daher nicht nur einer Längskraft, sondern auch quer gerichteten Kräften das Gleichgewicht zu halten; letztere bilden ein Biegungsmoment und rufen an der Schnittfläche ein Spannungsmoment hervor.

Fig. 115.



Die Centrifugalkräfte bedingen eine über die Schnittfläche gleichmässig ausgedehnte Spannung σ_1, welche nach Gl. 1, S. 94 zu berechnen ist. Ist σ_2 die stärkste Biegungsspannung an der Schnittstelle und ist $\mathfrak{W}$ das Widerstandsmoment der Querschnittsfigur, so ist $\sigma_2 \mathfrak{W}$ das Spannungsmoment. Zum Biegungsmomente liefert das eine Massentheilchen m den Beitrag $mz\varepsilon(z - x)$. Dies ist von $z = x$ bis $z = l$ zu integrieren. Daher wird

$$\sigma_2 \mathfrak{W} = \mathfrak{M} = \varepsilon \int_{z=x}^{z=l} mz(z - x).$$

Darin ist $m = \frac{\gamma}{g} F_z dz$, wenn F_z der Querschnitt im Abstande z von der Drehachse.

Gehen wir nun wieder zu einem **prismatischen** Stabe mit $F_z = F$ und mit $m = \frac{\gamma}{g} F dz$ über, so wird

$$\sigma_2 \mathfrak{W} = \frac{\gamma}{g} \varepsilon F \int_x^l (z^2 - xz)\, dz = \frac{\gamma}{g} \varepsilon F \left(\frac{l^3 - x^3}{3} - x \frac{l^2 - x^2}{2} \right).$$

Führt man die Umfangsgeschwindigkeit $c = l\omega$ und die Umfangsbeschleunigung $p = l\varepsilon$ ein, so wird

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \gamma \left\{ \frac{c^2}{2g} \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right) + \frac{p}{g} \frac{F}{\mathfrak{W} l} \left(\frac{l^3 - x^3}{3} - x \frac{l^2 - x^2}{2} \right) \right\}.$$

Der gefährliche Querschnitt liegt (wie bei gleichförmiger Drehung) dicht an der Achse mit $x = 0$, und es wird

$$\sigma_{max} = \gamma \left\{ \frac{c^2}{2g} + \frac{p}{g} \frac{Fl^2}{3\mathfrak{W}} \right\}.$$

Beispiel: Solchen Spannungen sind besonders Degenklingen ausgesetzt, wenn ihnen durch die Hand des Fechters eine heftige Drehbeschleunigung in der Richtung quer zur Schärfe ertheilt wird. Nimmt man den Querschnitt annähernd als Rechteck, die Breite $b = 1{,}5$ cm die Dicke $d = 0{,}2$ cm, die Länge $l = 80$ cm an, so wird $\mathfrak{W} = {}^1/_6\, Fd$. Die Spannung σ_1 ist in solchen Fällen unbedeutend, da die einzelnen Bewegungen viel zu kurze Dauer haben, als dass bedeutende Umfangs*geschwindigkeiten* c entstehen könnten. Es sind hier nur die Umfangs*beschleunigungen* wichtig. Wir setzen daher

$$\sigma = \sigma_2 = \gamma \frac{p}{g} \frac{Fl^2}{3\mathfrak{W}} = \gamma \frac{p}{g} \frac{2\,l^2}{d} = 0{,}003 \cdot \frac{p}{g} \frac{2 \cdot 80^2}{0{,}2} = 512 \frac{p}{g}.$$

Es erfordert dies ein Kraftmoment der Hand

$$\mathfrak{M} = \varepsilon J = \frac{1}{3} M l^2 \varepsilon = \frac{1}{3} p M l = \frac{1}{3} \frac{p}{g} \gamma F l^2 = \frac{1}{3} \frac{p}{g} \cdot 15{,}36 \text{ cmkg}.$$

Ist in einem besonderen Falle $p = 3g$, so wird die stärkste Spannung $\sigma = 1536$ at, das Kraftmoment der Hand $\mathfrak{M} = 15{,}4$ cmkg. Die Faust eines geübten Fechters kann wohl das 10fache leisten, daher die Klinge durch einen Lutthieb zerbrechen.

C. Formänderungs-Arbeit elastisch-fester Körper.

Während bisher das Vorhandensein eines bestimmten Spannungszustandes angenommen wurde, sollen nun die Vorgänge beim Entstehen der Spannungen und Formänderungen untersucht werden. Es kommt hierbei vor Allem auf die Bestimmung der bei der Formänderung von den äusseren und inneren Kräften verrichteten Arbeit, der sog. Formänderungs-Arbeit, an.

I. Arbeit bei der Verlängerung und Verkürzung gerader Stäbe.

Ein prismatischer Stab von der Länge l und dem Querschnitt F sei an dem einen Ende (links in Fig. 116) befestigt; am anderen freien Ende wirke eine im Schwerpunkte der Endfläche angreifende Zugkraft K. Diese Kraft soll aber der Grösse nach nicht gleichbleibend sein, sondern sie soll langsam und stetig von Null bis zu

7*