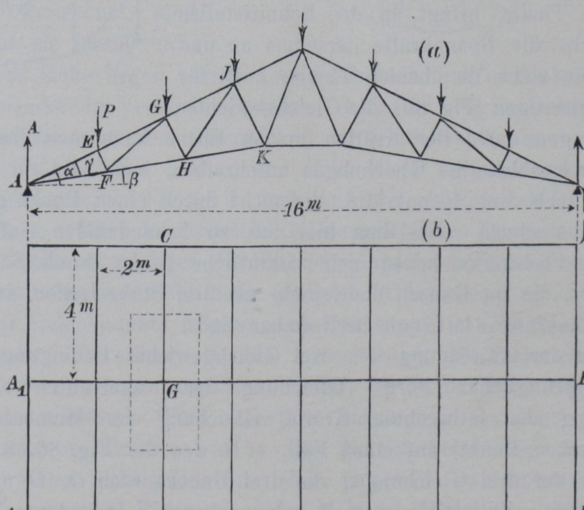
D und U in dieser Gleichung nicht vor, weil sie beide das Moment Null haben, und man hat für O eine einzige Gleichung ersten Grades.

b) Dachträger.

Beispiel 1: Berechnung der Spannkräfte eines belgischen Dachträgers von 16 m Spannweite. Die Anordnung des Trägers zeigt Fig. 87a. Im Grundrisse (Fig. 87b) mögen die Träger $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ um $A_1 A_2 = 4$ m von einander abstehen. Die Spannweite werde durch sog. Pfetten,

Fig. 87.



die über den Knotenpunkten des Obergurts liegen, in acht gleiche Theile von 2 m getheilt. Da die gleichmässige Belastung des Grundrisses der Dachfläche sich gleichmässig über die Pfetten vertheilt, und da die Pfetten für die Berechnung als Einzelträger (nur von Dachträger zu Dachträger reichend) angesehen werden, so erkennt man leicht, dass ein beliebiger Knoten G des Obergurts die Last zu tragen hat, welche auf das im Grundrisse punktirte Rechteck von 2 m × 4 m = 8 qm entfällt. Rechnet man als Gesammtlast (einschl. Schnee- und Winddruck) 180 kg für 1 qm Grundfläche, so ergiebt sich $P = 180 \cdot 8 = 1440$ kg als Last jedes Knotens des Obergurts. Die halb so grosse Belastung, welche auf die Endpunkte A und B kommt, beeinflusst wohl den Druck auf die stützenden Wände, bringt aber, weil sie unmittelbar auf die Stützpunkte übertragen wird, in den Fachwerkstäben keine Spannkraft hervor und bleibt deshalb bei der Berechnung der Stabkräfte am besten ganz ausser Betracht. Hiernach befinden sich auf dem Träger sieben gleiche Lasten P in gleichen Abständen, so dass jeder Auflagerdruck $A = B = {}^7/_2\, P$ wird. Es ist zweckmässig, die Knotenlast im Laufe der Rechnung noch allgemein mit P zu bezeichnen. Am Schlusse kann dann dafür der Zahlenwerth $1440^{\,\mathrm{kg}}$ eingeführt werden.

Die beiden Gurte sind durch Stäbe, rechtwinklig zum Obergurt, mit einander verbunden, deren Spannkräfte wir, wenn sie auch nicht lothrecht stehen, doch mit V bezeichnen wollen. Die Spannkräfte der dazwischen eingelegten Streben mögen D heissen.

Der Obergurt habe eine Neigung $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5$ gegen die Wagerechte; das giebt $\alpha = 26^0\,34'$, $\cos\alpha = 0{,}894$, $\sec\alpha = 1{,}119$; dann ist der Abstand zweier Lastpunkte, welcher wagerecht gemessen $2^{\,\mathrm{m}}$ beträgt, in der Richtung des Obergurts $AE = 2 \cdot 1{,}119 = 2{,}238^{\,\mathrm{m}}$.

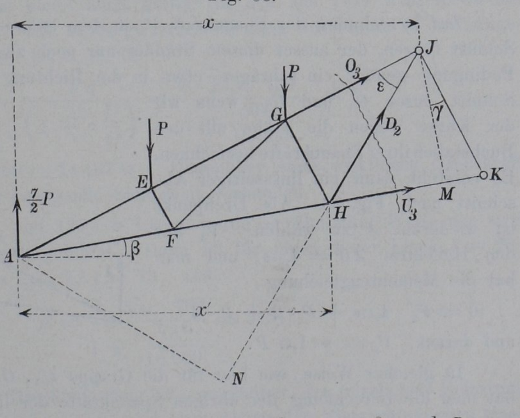
Der Untergurt habe eine Neigung $\operatorname{tg}\beta = {}^1/_6$ gegen die Wagerechte; dies giebt $\beta = 9^0\,28'$, $\sin\beta = 0{,}1645$, $\cos\beta = 0{,}9864$, $\sec\beta = 1{,}011$. Der Winkel $\gamma = EAF$ zwischen beiden Gurten beträgt hiernach $17^0\,6'$ mit $\cos\gamma = 0{,}9558$, $\sec\gamma = 1{,}046$, $\operatorname{tg}\gamma = 0{,}3076$.

Hieraus bestimmt sich $EF = AE \cdot \operatorname{tg}\gamma = 2{,}238 \cdot 0{,}3076 = 0{,}688^{\,\mathrm{m}}$, mithin $GH = 2 \cdot 0{,}688 = 1{,}376$ und $JK = 3 \cdot 0{,}688 = 2{,}064$.

Für die Theile des Untergurts gilt dann: $AF = AE \sec\gamma = 2{,}238 \cdot 1{,}046 = 2{,}341$.

Die Ermittelung der Spannkräfte soll an dem dritten Fache von links, $GJKH$, gezeigt werden. Führt man einen Schnitt durch dasselbe, welcher das Obergurtstück GJ, die Strebe HJ und das Untergurtstück HK trifft, so betrachtet man das links vom Schnitte verbleibende Stück (Fig. 88), bringt an den Schnittstellen die als Zugkräfte gedachten Spannkräfte O_3, D_2 und U_3 an und stellt für das Gleichgewicht des linksseitigen Abschnittes drei Momenten-Gleichungen auf.

Fig. 88.



Zur Berechnung von U_3 dient der Schnittpunkt J von O_3 und D_2 zum Drehpunkte. Dann ist $JM \perp AK$ der Hebelarm von U_3, und zwar ist

$JM = JK \cos\gamma = 2{,}061 \cdot 0{,}9558 = 1{,}973$ m. Der wagerechte Abstand der Knotenpunkte des Obergurts beträgt 2 m, daher ist $x = 6$ m, während die Lasten bei E und G die Hebelarme 4 bezw. 2 m haben. Es ist empfehlenswerth, beim Aufschreiben der Momenten-Gleichungen eine bestimmte Reihenfolge festzusetzen, um sich vor Auslassungen zu bewahren. Wir schreiben stets zuerst das Moment der gesuchten Spannkraft, dann dasjenige des Auflagerdrucks und schliesslich diejenigen der am betrachteten Trägerstücke vorhandenen Lasten Also

$$0 = -U_3 \cdot 1{,}973 + 3{,}5\,P \cdot 6 - P \cdot 4 - P \cdot 2,$$

woraus man leicht

$$U_3 = +7{,}60\,P$$

findet; das positive Zeichen bedeutet eine Zugkraft.

Zur Berechnung von O_3 dient der Schnittpunkt H von U_3 und D_2 als Drehpunkt. Es ist $AH = 2\,AF = 4{,}682$. Der wagerechte Abstand x' des Drehpunktes vom linksseitigen Auflager ist dann

$$x' = 4{,}682 \cdot \cos\beta = 4{,}682 \cdot 0{,}9864 = 4{,}62,$$

der Hebelarm von O_3 aber $GH = 1{,}376$; mithin

$$0 = O_3 \cdot 1{,}376 + 3{,}5\,P \cdot 4{,}62 - P \cdot 0{,}62 - P \cdot 2{,}62 \quad \text{und daraus}$$

$$O_3 = -9{,}40\,P.$$

Zur Berechnung von D_2 dient der Punkt A als Drehpunkt. Fällt man von A eine Winkelrechte AN auf die Richtung von D_2, so ist $AN = AJ \sin\varepsilon$. Nun ist $AJ = 3\,AE = 6{,}714$; $\operatorname{tg}\varepsilon = GH : GJ = GH : AE = 1{,}376 : 2{,}238 = 0{,}615$, dem ein Werth $\sin\varepsilon = 0{,}524$ entspricht, mithin

$$AN = 6{,}714 \cdot 0{,}524 = 3{,}517.$$

Dann wird, weil der Auflagerdruck den Hebelarm Null hat:

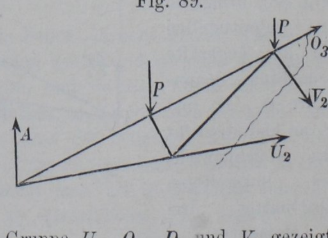
$$0 = -D_2 \cdot 3{,}517 + P \cdot 2 + P \cdot 4,$$

mithin

$$D_2 = 1{,}7058\,P.$$

Zur Berechnung der Spannkraft V_2 in dem Ständer GH muss man einen Schnitt führen, der ausser diesem Ständer nur noch zwei Stäbe trifft. Dieser Bedingung genügt ein schräger, etwa in der Richtung der Streben geführter Schnitt durch O_3 und U_2, wenn wir der Kürze wegen die Stäbe mit den Buchstaben ihrer Spannkräfte bezeichnen. Es entsteht dann ein linksseitiger Abschnitt nach Fig. 89. Als Drehpunkt ist wiederum A zu wählen. V_2 hat den Hebelarm $AG = 4{,}476$, und man hat die Momentengleichung

Fig. 89.



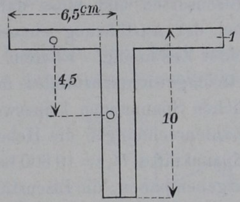
$$0 = V_2 \cdot 4{,}476 + P \cdot 2 + P \cdot 4$$

und daraus $V_2 = -1{,}37\,P$.

In gleicher Weise, wie hier für die Gruppe U_3, O_3, D_2 und V_2 gezeigt, hat man die Berechnung der übrigen Spannkräfte der linksseitigen Hälfte des Trägers durchzuführen; die Spannkräfte der rechten sind dann der linken symmetrisch.

Führt man schliesslich $P = 1440^{\text{kg}}$ ein, so wird $U_3 = 10\,944^{\text{kg}}$; $O_3 = -13\,536^{\text{kg}}$; $D_2 = +2458^{\text{kg}}$; $V_2 = -1973^{\text{kg}}$. Will man die Stäbe aus Schmiedeisen herstellen, so erfordert, bei 700^{at} zulässiger Spannung, U_3 einen Querschnitt von $10\,944 : 700 = 15{,}63^{\text{qcm}}$, D_2 einen solchen von $2458 : 700 = 3{,}51^{\text{qcm}}$, wofür man rund 16^{qcm} bezw. 4^{qcm} wählen wird; dabei ist die Querschnittsform gleichgültig. Bei den gedrückten Theilen aber, die auf Knickfestigkeit zu berechnen sind, sind auch die Länge und die Querschnittsform von Bedeutung.

Fig. 90.



Der Stab O_3 hat eine Länge $l = 223{,}8^{\text{cm}}$. Er werde gebildet aus zwei ungleichschenkligen Winkeleisen $10 \cdot 6{,}5 \cdot 1^{\text{cm}}$ (Fig. 90). Theilt man den Querschnitt des einen Winkeleisens durch eine lothrechte Gerade in die beiden Flächentheile 5,5 und 10^{qcm}, deren Schwerpunkte um $4{,}5^{\text{cm}}$ in lothrechtem Sinne von einander abstehen, so ist nach Gl. 14, S. 25, das Trägheitsmoment des einen Winkeleisens in Bezug auf eine wagerechte Schwerpunktsachse

$$J = \frac{1}{12}\, 5{,}5 \cdot 1^3 + \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 10^3 + \frac{5{,}5 \cdot 10}{5{,}5 + 10} \cdot 4{,}5^2 = 156,$$

mithin ist das Quadrat des Trägheitshalbmessers

$$i^2 = J : F = 156 : 15{,}5 = 10,$$

$$i = 3{,}16; \quad \frac{l}{i} = \frac{223{,}8}{3{,}16} = 71,$$

$$\left(\frac{l}{i}\right)^2 = 5041.$$

Dieses Verhältnis bleibt auch gültig für den aus zwei Winkeleisen bestehenden Querschnitt. Die zulässige Druckbelastung des Stabes in der Längsrichtung ist daher nach Gl. 2, S. 62

$$K = \frac{F\sigma}{\left(1 + \alpha \frac{l^2}{i^2}\right)} = \frac{2 \cdot 15{,}5 \cdot 700}{1 + \frac{5041}{10\,000}}, \quad \text{d. h.}$$

rund $K = {}^2/_3 \cdot 31 \cdot 700 = 14\,467^{\text{kg}}$. Gegenüber einer wirklichen Druckkraft von $13\,522^{\text{kg}}$ ist also genügende Sicherheit vorhanden.

Der Ständer V_2 von $137{,}6^{\text{cm}}$ Länge werde in ähnlicher Weise aus zwei Winkeleisen $6 \cdot 4 \cdot 0{,}6^{\text{cm}}$ gebildet. Dann ist für eines dieser Eisen $J = 20$; $F = 5{,}64$, daher $i = 1{,}88$, $l : i = 73$, und

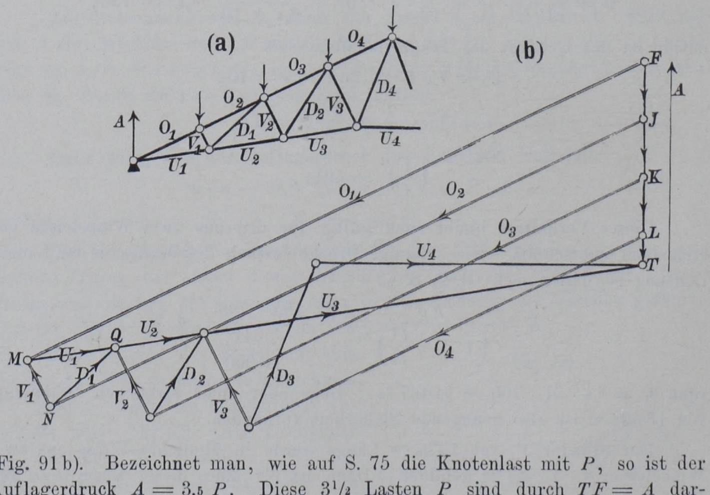
$$K = \frac{2 \cdot 5{,}64 \cdot 700}{1 + \frac{73^2}{10\,000}} = 5151.$$

Diese zulässige Druckbelastung ist, gegenüber der wirklichen Belastung mit 1930^{kg} reichlich gross; man wird aber wegen der Nietverbindungen einen kleineren Querschnitt nicht wählen.

Bei der obigen Berechnung der Spannkräfte war die Ermittelung der Stablängen und Hebelarme die zeitraubendste Arbeit. In den meisten Fällen wird man diese Längen aus einer genauen Zeichnung des Trägernetzes abgreifen und dadurch viel Zeit ersparen können Es ist nicht zu empfehlen, bei derartigen Rechnungen eine weitgehende ziffermässige Genauigkeit anzustreben. Denn bei der schliesslichen Bestimmung der Stabquerschnitte richtet man sich nach den vorhandenen Eisensorten und muss daher häufig nach oben hin abrunden. Auch kommen bei der Ausführung ebenso leicht kleine Fehler vor wie beim Abgreifen von einer Zeichnung. Endlich aber ist die ganze Berechnung unter Annahme eines Gleichgewichtszustandes doch nur eine Annäherung, mit der man die wirklichen Spannungen keineswegs genau ermitteln kann. Hätte man in den obigen Zahlenrechnungen die Hebelarme auf Decimeter abgerundet, so würden sich die Spannkräfte $U_3 = 10\,800$ kg; $O_3 = -13\,168$ kg; $D_2 = 2469$ kg; $V_2 = -1920$ kg ergeben haben; die Eisenstärken würden eine Änderung nicht zu erfahren brauchen.

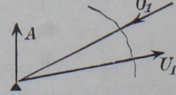
Am schnellsten ergeben sich die Spannkräfte solcher einfach geformten Dachträger mittels eines rein zeichnerisch hergestellten Kräfteplanes

Fig. 91.



(Fig. 91b). Bezeichnet man, wie auf S. 75 die Knotenlast mit P, so ist der Auflagerdruck $A = 3{,}5\,P$. Diese $3^1/_2$ Lasten P sind durch $TF = A$ dargestellt, mit den Theilen $FJ = JK = KL = P$ und $LT = {}^1/_2\,P$. Man muss nun mit den Schnitten im ersten Fache am Auflager A beginnen, indem man (Fig. 92) O_1 und U_1 durchschneidet, dann müssen A, O_1 und U_1 im Gleichgewichte sein, also ein geschlossenes Krafteck bilden. Zieht man durch T (Fig. 91b) eine Parallele zum Untergurtstab U_1, durch F eine Parallele

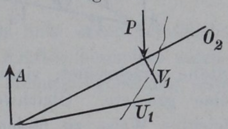
Fig. 92.



zum Obergurtstab O_1, so schneiden sich beide in M; TFM ist das geschlossene Krafteck, mithin ist FM die Grösse von O_1, MT die Grösse von U_1, beide nach dem Mafsstabe gemessen, in welchem $P = FJ$ ist. In dem Krafteck TFM müssen die Kräfte übereinstimmenden Umfahrungssinn haben. Da nun die Pfeilspitze des Auflagerdrucks A von T nach F weist, so muss O_1 von F nach M, U_1 von M nach T weisen. Diesem entsprechend sind die Pfeile bei O_1 und U_1 angebracht. Überträgt man diese Pfeilrichtungen nun nach Fig. 92 an die Schnittstellen, so erkennt man, dass O_1 ein Druck, U_1 ein Zug ist.

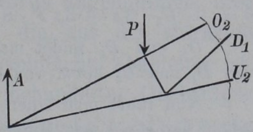
Nachdem so die Spannkräfte des ersten Faches bestimmt sind, führt man einen weiteren Schnitt, doch so, dass nur zwei neue unbekannte Spannkräfte auftreten. Man legt daher den Schnitt durch den soeben behandelten Stab U_1 und ausserdem durch V_1 und O_2 (Fig. 93). Dann müssen die neuen unbekannten Kräfte V_1 und O_2 den bekannten: U_1, A, P, das Gleichgewicht halten, also mit ihnen wieder ein geschlossenes Krafteck bilden. Wir betrachten M (Fig. 91 b) als Anfangspunkt mit $MT = U_1$, $TF = A$, $FJ = P$, ziehen von J aus eine Parallele zu O_2, von M aus eine Parallele zu V_1, welche beiden sich in N schneiden. Dann ist $JN = O_2$, $NM = V_1$.

Fig. 93.



Der Umfahrungssinn ist: $MTFJNM$. Überträgt man die so bestimmten Pfeilrichtungen von O_2 und V_1 an die Schnittstellen in Fig. 93, so erkennt man beide als Druckkräfte.

Fig. 94.



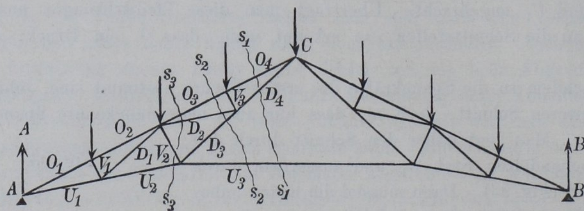
Für den nächsten Schnitt behält man nun O_2 bei und führt ihn ausserdem durch D_1 und U_2 (Fig. 94). Die bekannten Theile des jetzt zu benutzenden Kraftecks sind $A = TF$, $P = FJ$, $O_2 = JN$. Zwischen die Punkte N und T sind nun die neuen Kräfte D_1 und U_2 einzulegen. Eine von T aus gezogene Parallele zu U_2 fällt mit TM zusammen, $NQ \parallel D_1$ bestimmt daher den Punkt Q, und es ist $NQ = D_1$, $QT = U_2$; beide erkennt man als Zugkräfte.

Die der Reihe nach zu führenden Schnitte sind im Zickzack derartig anzuordnen, dass jeder neue Schnitt ein vorher schon untersuchtes Gurtstück nochmals trifft und ausserdem zwei neue Stäbe. Hiernach setzt sich der leicht verständliche Kräfteplan (Fig. 91 b) fort. Zu beachten ist nur, dass U_1, U_2 und U_3 theilweise auf einander fallen, d. h. verschiedene Anfangspunkte, aber gemeinsame Endpunkte T haben. Die Druckkräfte sind im Kräfteplane durch Doppellinien hervorgehoben.

Weiteres über Kräftepläne für Fachwerk findet sich in Keck, Vorträge über Graphische Statik, S. 65 u. ff.

Beispiel 2: Berechnung der Spannkräfte eines Wiegmannschen Dachträgers von 16 m Spannweite (Fig. 95). Die Berechnung der Spannkräfte O_1, U_1, V_1, O_2, D_1 und U_2 erfolgt ganz in derselben Weise wie beim belgischen Dachträger, und wenn, wie wir annehmen, die Neigungen von O_1, O_2, U_1 und U_2 dieselben sind wie bei jenem (Fig. 87), so werden bei gleichen Lasten P auch die Spannkräfte für die genannten Stäbe dieselben sein. Bei den Stäben V_2, O_3, D_2, D_3 und V_3 ist es aber nicht möglich, von oben bis unten Schnitte so zu führen, dass der Schnitt nur drei

Fig. 95.



Stäbe zerschneidet; vielmehr ist die Zahl der vom Schnitte getroffenen Stäbe eine grössere. Gleichwohl sind die Spannkräfte auch dieses Trägers in leichter Weise zu finden; nur muss der Vorgang etwas abgeändert werden.

Man legt zunächst einen Schnitt $s_1 s_1$ durch O_4, D_4 und U_3 und wählt den Schnittpunkt C der beiden ersteren zum Drehpunkte. Der Hebelarm von U_3 lässt sich leicht abgreifen oder berechnen und beträgt, auf Grund der Bemerkung auf S. 78 nach Decimetern abgerundet, $3{,}2$ m. Dann gilt: $0 = -U_3 \cdot 3{,}2 + 3{,}5\,P \cdot 8 - P \cdot 2 - P \cdot 4 - P \cdot 6$ oder $U_3 = 5\,P$.

O_4 und D_4 findet man in gleicher Weise, indem man den Schnittpunkt von D_4 und U_3 bezw. von O_4 und U_3 zum Drehpunkte wählt.

Nun führt man einen Schnitt $s_2 s_2$ durch O_3, D_2, D_3 und U_3. Weil U_3 schon berechnet ist, treten an diesem Schnitte nun drei unbekannte Spannkräfte auf. Um beispielsweise D_2 zu berechnen, benutzt man den Schnittpunkt C von O_3 und D_3 als Drehpunkt und behandelt die schon bekannte Spannkraft U_3 in der Momentengleichung wie eine gegebene Kraft. Der Hebelarm von D_2 wird $1{,}3$, und es gilt:

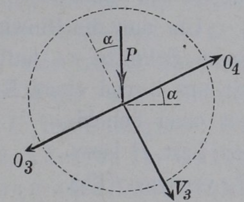
$$0 = -D_2 \cdot 1{,}3 - U_3 \cdot 3{,}2 + 3{,}5\,P \cdot 8 - P \cdot 4 - P \cdot 6, \quad \text{mithin}$$
$$D_2 = 1{,}54\,P.$$

Für die Berechnung von O_3 dient der Schnittpunkt von D_2 und D_3, für die von D_3 der Schnittpunkt von D_2 und O_3 zum Drehpunkte.

An dem Schnitte $s_3 s_3$ kommen die Spannkräfte O_3, D_2, V_2 und U_2 vor, von denen nur noch V_2 unbekannt; wählt man A zum Drehpunkte, so verschwinden O_3 und U_3 aus der Momentengleichung, und die bekannte D_2 wird wie eine gegebene Kraft behandelt.

Ein schräger Schnitt durch O_3, V_3, D_4 und U_3 und die Wahl des Punktes C zum Drehpunkte führt nun auch leicht zu der einzigen noch fehlenden Spannkraft V_3, jedoch erkennt man leicht, dass V_3, ebenso wie V_1, gleich $-P \cos \alpha$ sein muss. Führt man nämlich um den oberen Endpunkt von V_3 einen kreisförmigen Schnitt, so trennt man dadurch das in Fig. 96 besonders gezeichnete Stück aus dem Träger heraus. Dieses muss unter Einwirkung der Kräfte P, O_3, O_4 und V_3 im Gleichgewichte sein. Zerlegt man aber P nach der Richtung von V_3 und rechtwinklig dazu in $P \cos \alpha$ bezw. $P \sin \alpha$, so muss in ersterer Richtung stattfinden:

Fig. 96.



$$P \cos \alpha + V_3 = 0 \quad \text{oder}$$

$$V_3 = - P \cos \alpha .$$

(Für V_1 gilt dieselbe Figur.) Nach diesen Angaben kann es dem Leser keine Schwierigkeiten machen, die sämmtlichen Spannkräfte der linken Hälfte des Wiegmannschen Dachträgers zahlenmässig auszurechnen. Dem Anfänger ist dringend zu rathen, nach Führung eines Schnittes das links davon befindliche Trägerstück jedes Mal mit den daran auftretenden Kräften besonders aufzuzeichnen, weil dadurch die sichere Aufstellung der Momentengleichung sehr erleichtert wird.

c) Ungünstigste Belastungsart.

In den vorstehend berechneten Beispielen wurde nur eine bestimmte Belastungsart vorausgesetzt, es wurde angenommen, dass jeder Belastungspunkt eine Last P trage, die aus der stärksten überhaupt vorkommenden Belastung der Dachfläche abgeleitet ist. Diese Voraussetzung trifft für die zwei eben behandelten Dachträger zu, wie S. 84/85 sich erweisen wird. Für anders gestaltete Fachwerke trifft sie aber nicht allgemein zu, vielmehr wird sich zeigen, dass in manchen Stäben des Fachwerks die Entlastung gewisser Knotenpunkte eine Vergrösserung der Spannkräfte herbeiführen kann.

Es muss deshalb unterschieden werden zwischen der ständigen Belastung, die von dem Eigengewichte des Bauwerks und aller damit fest verbundenen Theile herrührt, und der beweglichen Belastung, die bei Dachträgern aus dem Gewichte einer Schneelage und dem Drucke des Windes, bei Brückenträgern aus dem Gewichte der die Brückenbahn befahrenden Lokomotiven, Wagen u. dergl. oder von dem Gewichte der auf der Brücke Platz findenden Menschen (Menschengedränge) und Thiere besteht. Beide Arten von Belastungen sollen annäherungsweise als gleichförmig vertheilt angesehen werden; die ständige Last werde mit g, die bewegliche Last mit p für die Längeneinheit des Trägers bezeichnet, so dass, wenn der wagerechte Abstand der Lastpunkte $= \lambda$ ist, die ständige