# 7. Drehungsfestigkeit.

## a) Stab von kreisförmigem und kreisringförmigem Querschnitte.

Wird ein Cylinder an beiden Enden durch gleiche Kräftepaare von entgegengesetztem Drehsinn ergriffen, deren Ebenen rechtwinklig zur Cylinderachse sind, so heben sich diese Paare am starren Körper bekanntlich ohne Weiteres auf (Theil 1, S. 108); am elastisch-festen Körper aber nur, wenn seine Widerstandsfähigkeit hinreicht und auch dann erst, nachdem eine entsprechende Formänderung stattgefunden hat. Diese Formänderung besteht in einer Verdrehung; die einzelnen Querschnittsebenen verdrehen sich derartig gegen einander, dass die ursprünglich geraden Cylinderseiten (z. B. $AB$) in sehr steile Schraubenlinien (z. B. $AC$) übergehen. (In Fig. 78 ist das linksseitige Ende des Cylinders festgehalten gedacht.) Die Verdrehungen der Querschnitte gegen einander sind als Gleitungen der einzelnen Querschnittstheile aufzufassen, mit denen das Auftreten entsprechender Schubspannungen verbunden ist. Versuche haben ferner gezeigt, dass Halbmesser eines Querschnitts auch nach der Formänderung noch geradlinig sind. Daraus folgt, dass die Gleitung in der Achse bei $O$ (Fig. 79) Null ist und verhältnisgleich mit dem Abstande $\varrho$ von $O$ nach aussen zunimmt. Da nun nach Gl. 1, S. 15

Fig. 78.

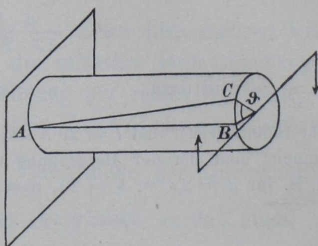
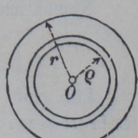



Fig. 79.




1) $$\gamma = \frac{\tau}{G},$$

d. h. die Gleitung verhältnisgleich mit der Schubspannung ist, so muss auch die Schubspannung mit $\varrho$ verhältnisgleich sein. Nennt man also die Schubspannung in den Abständen $\varrho$ und $r$ von der Mitte $\tau_\rho$ bezw. $\tau$, so ist (ähnlich wie für die Biegungsspannungen Gl. 1, S. 18)

2) $$\tau_\rho : \tau = \varrho : r.$$

Nimmt man aus dem kreisförmigen Querschnitt einen dünnen Ring vom Halbmesser $\varrho$ und von der Fläche $dF$ heraus, so tritt an diesem durchweg die gleiche Schubspannung $\tau_\rho$ in tangentialer Richtung, d. h. rechtwinklig zum Halbmesser $\varrho$ auf; das giebt für die Ringfläche $dF$ eine gesammte innere Tangentialkraft $dF\tau_\rho$, welche in Bezug auf die Cylinderachse ein Moment

$$d\mathfrak{M} = \tau_\rho \, dF \varrho \quad \text{liefert.}$$

Dies ist das der weiteren Verdrehung entgegenwirkende Moment des Ringes. Summirt man über den ganzen Querschnitt, so ist das gesammte Spannungsmoment mit Rücksicht auf Gl. 2

$$\mathfrak{M} = \frac{\tau}{r}\int dF \cdot \varrho^2,$$

welches dem verdrehenden Kräftepaare gleich sein muss. Wir können daher $\mathfrak{M}$ unmittelbar als das Verdrehungsmoment bezeichnen. Der Werth $\int dF \cdot \varrho^2$ bedeutet (nach Theil 1, S. 270) das polare Trägheitsmoment $J_0$ des Querschnitts in Bezug auf die Achse $O$ des Stabes. Sonach wird

3) $$\frac{\tau J_0}{r} = \mathfrak{M}.$$

Diese Formel ist ähnlich gestaltet wie die Gl. 3, S. 21, für die Biegungsspannung. Nur kommt hier das polare Trägheitsmoment in Frage.

Der Winkel $\vartheta$, um den sich der eine Querschnitt gegen einen um $l$ davon entfernten verdreht, heisst der Verdrehungswinkel. Die Berechnung desselben folgt leicht aus Fig. 78. Die Abweichung der Schraubenlinie $AC$ von der Geraden $AB$ ist die der Schubspannung $\tau$ der äusseren Mantelfläche entsprechende Gleitung; daher wird der Verdrehungsbogen $BC = \gamma l$. Weil aber auch $BC = r\vartheta$, so wird $r\vartheta = \gamma l$ oder

4) $$\vartheta = \frac{\tau}{G}\frac{l}{r} = \frac{\mathfrak{M} l}{G J_0}$$

(entsprechend Gl. 9, S. 43).

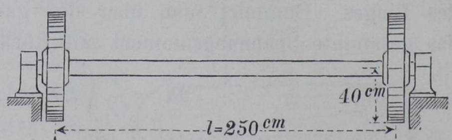
Diese Gleichungen gelten für kreis- und kreisringförmige Querschnitte. Für Vollkreise ist (nach Theil 1, S. 273) $J_0 = \frac{1}{2} r^4 \pi$, für einen Ring von den Halbmessern $R$ und $r$

$$J_0 = \tfrac{1}{2}(R^4 - r^4)\,\pi.$$

Die Formeln 2—4 sind nicht nur für den ruhenden Cylinder, sondern auch für den gleichförmig um seine Achse sich drehenden Cylinder verwendbar, weil die dieser Drehung entsprechenden Ergänzungskräfte (Centrifugalkräfte) in den einzelnen Theilen des Körpers nur (meist unbedeutende) Zugspannungen hervorrufen.

**Beispiel:** Auf einer Maschinenwelle (Fig. 80) befinden sich zwei Zahnräder im Abstande $l = 250$ cm von einander. Am Umfange des rechtsseitigen vom Halbmesser $= 40$ cm wirke eine Kraft $K = 1000$ kg. Dadurch entsteht ein Drehmoment $\mathfrak{M} = 40\,000$ cmkg, welches durch ein gleiches Widerstandsmoment am anderen Zahnrade aufgehoben werden möge. Die zulässige Schubspannung möge mit Rücksicht auf mögliche Unregelmässigkeiten der Bewegung nur zu $\tau = 200$ at angenommen werden, dann gilt für den erforderlichen Wellenhalbmesser $r$

Fig. 80.




$$200 \cdot \tfrac{1}{2} r^3 \pi = 40\,000 \quad \text{oder} \quad r = 5 \text{ cm}.$$

Die elastische Verdrehung der beiden Zahnräder gegen einander beträgt (Gl. 4)

$$\vartheta = \frac{200}{800\,000} \, \frac{250}{5} = \frac{1}{80},$$

oder in Graden $0^0 43'$.

## b) Stab von rechteckigem Querschnitte.

So einfach die Drehungsfestigkeit eines cylindrischen Stabes zu berechnen war, so verwickelt werden ihre Verhältnisse bei Stäben anderer Querschnittsform. Ein für diese Untersuchung wichtiges Ergebnis folgt aus einer Eigenschaft der Schubspannungen an einem würfelförmigen Körper. Denkt man sich aus einem Körper, der durch schiebende, parallel der Bildebene wirkende Kräfte angegriffen ist, einen Würfel von der Seite $= 1$ herausgeschnitten (Fig. 81) und nimmt an, dass an der oberen Fläche $DC$ eine wagerecht nach rechts gerichtete Schubspannung $\tau$ auftritt, der an $AB$ eine gleiche nach links gerichtete entgegen wirkt, so fordert das Gleichgewicht gegen Drehung, dass dieses Kräftepaar durch ein gleiches entgegengesetztes aufgehoben werde. Die ersten beiden

Fig. 81.