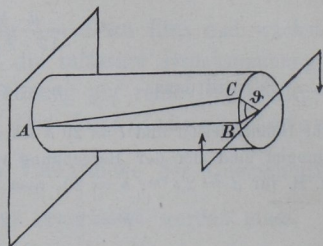


## 7. Drehungsfestigkeit.

### a) Stab von kreisförmigem und kreisringförmigem Querschnitte.

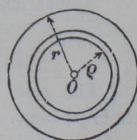
Wird ein Cylinder an beiden Enden durch gleiche Kräftepaare von entgegengesetztem Drehsinn ergriffen, deren Ebenen rechtwinklig zur Cylinderachse sind, so heben sich diese Paare am starren Körper bekanntlich ohne Weiteres auf (Theil 1, S. 108); am elastisch-festen Körper aber nur, wenn seine Widerstandsfähigkeit hinreicht und auch dann erst, nachdem eine entsprechende Formänderung stattgefunden hat. Diese Formänderung besteht in einer Verdrehung; die einzelnen Querschnittsebenen verdrehen sich derartig gegen einander, dass die ursprünglich geraden Cylinderseiten (z. B.  $AB$ ) in sehr steile

Fig. 78.



Schraubenlinien (z. B.  $AC$ ) übergehen. (In Fig. 78 ist das linksseitige Ende des Cylinders festgehalten gedacht.) Die Verdrehungen der Querschnitte gegen einander sind als Gleitungen der einzelnen Querschnittstheile aufzufassen, mit denen das Auftreten entsprechender Schubspannungen verbunden ist. Versuche haben ferner gezeigt, dass Halbmesser eines Querschnitts auch nach der Formänderung noch geradlinig sind. Daraus folgt, dass die Gleitung in der Achse bei  $O$  (Fig. 79) Null ist und verhältnissgleich mit dem Abstände  $\varrho$  von  $O$  nach aussen zunimmt. Da nun nach Gl. 1, S. 15

Fig. 79.



$$1) \quad \gamma = \frac{\tau}{G},$$

d. h. die Gleitung verhältnissgleich mit der Schubspannung ist, so muss auch die Schubspannung mit  $\varrho$  verhältnissgleich sein. Nennt man also die Schubspannung in den Abständen  $\varrho$  und  $r$  von der Mitte  $\tau_\varrho$  bzw.  $\tau$ , so ist (ähnlich wie für die Biegungsspannungen Gl. 1, S. 18)

$$2) \quad \tau_\varrho : \tau = \varrho : r.$$

Nimmt man aus dem kreisförmigen Querschnitt einen dünnen Ring vom Halbmesser  $\varrho$  und von der Fläche  $dF$  heraus, so tritt an diesem durchweg die gleiche Schubspannung  $\tau_\rho$  in tangentialer Richtung, d. h. rechtwinklig zum Halbmesser  $\varrho$  auf; das giebt für die Ringfläche  $dF$  eine gesammte innere Tangentialkraft  $dF\tau_\rho$ , welche in Bezug auf die Cylinderachse ein Moment

$$d\mathfrak{M} = \tau_\rho dF\varrho \text{ liefert.}$$

Dies ist das der weiteren Verdrehung entgegenwirkende Moment des Ringes. Summirt man über den ganzen Querschnitt, so ist das gesammte Spannungsmoment mit Rücksicht auf Gl. 2

$$\mathfrak{M} = \frac{\tau}{r} \int dF \cdot \varrho^2,$$

welches dem verdrehenden Kräftepaare gleich sein muss. Wir können daher  $\mathfrak{M}$  unmittelbar als das Verdrehungsmoment bezeichnen. Der Werth  $\int dF \cdot \varrho^2$  bedeutet (nach Theil 1, S. 270) das polare Trägheitsmoment  $J_0$  des Querschnitts in Bezug auf die Achse  $O$  des Stabes. Sonach wird

$$3) \quad \frac{\tau J_0}{r} = \mathfrak{M}.$$

Diese Formel ist ähnlich gestaltet wie die Gl. 3, S. 21, für die Biegungsspannung. Nur kommt hier das polare Trägheitsmoment in Frage.

Der Winkel  $\vartheta$ , um den sich der eine Querschnitt gegen einen um  $l$  davon entfernten verdreht, heisst der Verdrehungswinkel. Die Berechnung desselben folgt leicht aus Fig. 78. Die Abweichung der Schraubenlinie  $AC$  von der Geraden  $AB$  ist die der Schubspannung  $\tau$  der äusseren Mantelfläche entsprechende Gleitung; daher wird der Verdrehungsbogen  $BC = \gamma l$ . Weil aber auch  $BC = r\vartheta$ , so wird  $r\vartheta = \gamma l$  oder

$$4) \quad \vartheta = \frac{\tau l}{G r} = \frac{\mathfrak{M} l}{G J_0}$$

(entsprechend Gl. 9, S. 43).

Diese Gleichungen gelten für kreis- und kreisringförmige Querschnitte. Für Vollkreise ist (nach Theil 1, S. 273)  $J_0 = 1/2 r^4 \pi$ , für einen Ring von den Halbmessern  $R$  und  $r$

$$J_0 = 1/2 (R^4 - r^4) \pi.$$

Die Formeln 2—4 sind nicht nur für den ruhenden Cylinder, sondern auch für den gleichförmig um seine Achse sich drehenden Cylinder verwendbar, weil die dieser Drehung entsprechenden Ergänzungskräfte (Centrifugalkräfte) in den einzelnen Theilen des Körpers nur (meist unbedeutende) Zugspannungen hervorrufen.

**Beispiel:** Auf einer Maschinenwelle (Fig. 80) befinden sich zwei Zahnräder im Abstände  $l = 250$  cm von einander. Am Umfange des rechtsseitigen vom Halbmesser  $= 40$  cm wirke eine Kraft  $K = 1000$  kg. Dadurch entsteht ein Drehmoment  $\mathfrak{M} = 40\,000$  cmkg, welches durch ein gleiches Widerstandsmoment am anderen Zahnrade aufgehoben werden möge. Die zulässige Schubspannung möge mit Rücksicht auf mögliche Unregelmässigkeiten der Bewegung nur zu  $\tau = 200$  at angenommen werden, dann gilt für den erforderlichen Wellenhalbmesser  $r$

$$200 \cdot \frac{1}{2} r^3 \pi = 40\,000 \quad \text{oder} \quad r = 5 \text{ cm.}$$

Die elastische Verdrehung der beiden Zahnräder gegen einander beträgt (Gl. 4)

$$\vartheta = \frac{200}{800\,000} \frac{250}{5} = \frac{1}{80},$$

oder in Graden  $0^\circ 43'$ .

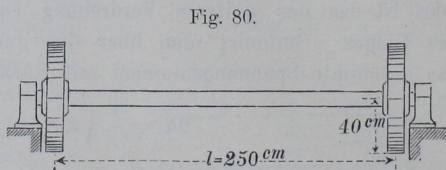


Fig. 80.

### b) Stab von rechteckigem Querschnitte.

So einfach die Drehungsfestigkeit eines cylindrischen Stabes zu berechnen war, so verwickelt werden ihre Verhältnisse bei Stäben anderer Querschnittsform. Ein für diese Untersuchung wichtiges Ergebnis folgt aus einer Eigenschaft der Schubspannungen an einem würfelförmigen Körper. Denkt man sich aus einem Körper, der durch schiebende, parallel der Bildebene wirkende Kräfte angegriffen ist, einen Würfel von der Seite  $= 1$  herausgeschnitten (Fig. 81) und nimmt an, dass an der oberen Fläche  $DC$  eine wagerecht nach rechts gerichtete Schubspannung  $\tau$  auftritt, der an  $AB$  eine gleiche nach links gerichtete entgegen wirkt, so fordert das Gleichgewicht gegen Drehung, dass dieses Kräftepaar durch ein gleiches entgegengesetztes aufgehoben werde. Die ersten beiden

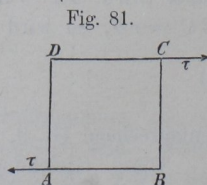


Fig. 81.

Schubspannungen bedingen also das Auftreten gleich grosser an den Flächen  $AD$  und  $BC$  (Fig. 82).

An den vier zu einer Ebene rechtwinkligen Seitenflächen eines rechtwinkligen Parallelepipedes treten in den Richtungen parallel zu jener Ebene stets gleiche Schubspannungen auf.

Gehört nun die Seitenfläche  $AD$  etwa der freien Mantelfläche eines auf Drehung beanspruchten Körpers an, so kann an dieser keine Schubspannung auftreten, und damit wird auch die in  $AB$  rechtwinklig zu der Mantelfläche gerichtete Schubspannung Null. Hiernach müssen an einem solchen Körper die am äusseren Rande eines Querschnitts auftretenden Schubspannungen nothwendig parallel der Begrenzung des Querschnittes sein. Ist aber  $ABCD$  (Fig. 83) der rechteckige Querschnitt des Stabes mit den Seiten  $AB = d$ ,  $BC = h$ , wobei  $h \geq d$ , so kann an einer Kante, z. B. bei  $D$  gar keine Schubspannung auftreten, weil sowohl die zu  $AD$ , wie auch die zu  $CD$  rechtwinklige Schubspannung verschwinden muss. Es folgt also das auf den ersten Blick überraschende Ergebnis, dass die von der Achse des Stabes am weitesten entfernten Querschnittstheile an den vier Ecken spannungslos sind.

Über die Veränderlichkeit der längs des Randes eines Querschnittes auftretenden Schubspannungen giebt die Grösse der Gleitung an den verschiedenen Stellen der Mantelfläche des Stabes Auskunft (s. C. Bach, Elasticität und Festigkeit). Versieht man die Mantelfläche des Stabes mit einem Netze von Quadraten und beobachtet diese, nachdem die Verdrehung stattgefunden hat, so findet man, dass die Quadrate sich im Allgemeinen in Rhomben verwandelt haben. Die Abweichung der Rhomben von den Quadraten kennzeichnet unmittelbar die Gleitung an den verschiedenen Stellen. Dabei bestätigt sich zunächst, dass an den Kanten  $ABCD$  die Figuren quadratisch

Fig. 82.

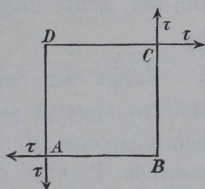
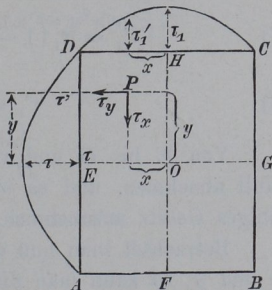


Fig. 83.



geblieben sind. Ferner ergibt sich, dass die Gleitungen in denjenigen Punkten  $E$  und  $G$  des Umfanges, welche der Achse am nächsten liegen, am stärksten, in den Mittelpunkten  $F$  und  $H$  der kurzen Seiten weniger stark sind. Die Spannungen sind mit den Gleitungen verhältnisgleich. Sind  $\tau$  und  $\tau_1$  die Schubspannungen an den Punkten  $E$  und  $H$ , so kann man diese den Entfernungen von der Achse umgekehrt proportional annehmen, d. h.

$$5) \quad \tau_1 : \tau = d : h.$$

Längs der Seitenfläche  $AD$  muss die Spannung nach einem stetigen Gesetze sich ändern; das einfachste der hier wahrscheinlichen Gesetze ist das parabolische, durch die über der Sehne  $AB$  stehende Parabel dargestellt. Nimmt man dies als gültig an, so wird für die Spannung  $\tau'$  im Abstände  $y$  von der Mitte:

$$y^2 : \frac{1}{4} h^2 = (\tau - \tau') : \tau \quad \text{oder}$$

$$6) \quad \tau' = \tau \left( 1 - \frac{4 y^2}{h^2} \right).$$

Ebenso wird in einem Abstände  $x$  von der Mitte  $H$  der kürzeren Seite die Spannung

$$7) \quad \tau'_1 = \tau_1 \left( 1 - \frac{4 x^2}{d^2} \right), \quad \text{oder wegen Gl. 5:}$$

$$8) \quad \tau'_1 = \tau \frac{d}{h} \left( 1 - \frac{4 x^2}{d^2} \right).$$

Von  $E$  bis  $O$  und von  $H$  bis  $O$  muss die Spannung bis auf Null abnehmen, und es steht nichts im Wege, dafür ein geradliniges Gesetz anzunehmen.

Betrachtet man nun einen beliebigen Punkt  $P$  der Koordinaten  $x$  und  $y$ , so kann man die dort herrschende Spannung zerlegen in  $\tau_x$  und  $\tau_y$  rechtwinklig zu  $x$  und  $y$ . Man kann dann mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit annehmen, dass  $\tau_x$  und  $\tau_y$  in geradliniger Beziehung zu  $\tau'$  bzw.  $\tau'_1$  stehen, d. h.

$$9) \quad \tau_x : \tau' = x : \frac{1}{2} d \quad \text{und}$$

$$10) \quad \tau_y : \tau'_1 = y : \frac{1}{2} h, \quad \text{oder}$$

$$11) \quad \tau_x = \frac{2 \tau}{d} x \left( 1 - \frac{4 y^2}{h^2} \right) \quad \text{und}$$

$$12) \quad \tau_y = 2 \tau \frac{d}{h^2} y \left( 1 - \frac{4 x^2}{d^2} \right).$$

An einem Flächentheilchen  $dF = dx \cdot dy$  bei  $P$  wirken dann die inneren Kräfte  $\tau_x dF$  und  $\tau_y dF$  und liefern in Bezug auf die Achse  $O$  des Stabes das innere Moment  $(\tau_x x + \tau_y y) dF$ . Daher gilt für das Verdrehungsmoment

$$\mathfrak{M} = \int (\tau_x x + \tau_y y) dF \quad \text{oder}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= 2\tau \int \frac{1}{d} \left\{ x^2 \left( 1 - \frac{4y^2}{h^2} \right) + \frac{d}{h^2} y^2 \left( 1 - \frac{4x^2}{d^2} \right) \right\} dF \\ &= 2\tau \left\{ \frac{1}{d} \int dF x^2 - \frac{4}{h^2 d} \int dF x^2 y^2 + \frac{d}{h^2} \int dF y^2 - \frac{4}{h^2 d} \int dF x^2 y^2 \right\}. \end{aligned}$$

Nun ist  $\int dF x^2 = J_2$  das Trägheitsmoment in Bezug auf die Achse  $OH$ ;  $\int dF y^2 = J_1$  das Trägheitsmoment auf die Achse  $OE$ ; wird aber  $\int dF y^2 = \frac{1}{12} dh^3$  noch mit  $\frac{d}{h^2}$  multiplicirt, so entsteht daraus  $\frac{1}{12} d^2 h = \frac{1}{d} J_2$ . Endlich ist noch zu lösen

$$\int dF x^2 y^2 = \int dx dy x^2 y^2.$$

Ein wagerechter Flächenstreifen liefert hierzu den Beitrag

$$y^2 dy \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} x^2 dx = 2y^2 dy \int_0^{\frac{d}{2}} x^2 dx = y^2 dy \frac{d^3}{12},$$

die ganze Fläche also

$$\frac{2d^3}{12} \int_0^{\frac{h}{2}} y^2 dy = \frac{d^3 h^3}{12 \cdot 12}.$$

Setzt man diese Werthe oben ein, so entsteht:

$$\mathfrak{M} = \tau \left\{ \frac{4}{d} J_2 - \frac{16}{h^2 d} \frac{d^3 h^3}{144} \right\} = \tau \left\{ \frac{4}{d} J_2 - \frac{4}{3} \frac{J_2}{d} \right\}$$

$$\mathfrak{M} = 4\tau \frac{J_2}{d} \left( 1 - \frac{1}{3} \right)$$

$$13) \quad \mathfrak{M} = \frac{8}{3} \tau \frac{J_2}{d} = \frac{4}{3} \tau \frac{J_2}{1/2 d} \quad \text{und ebenso} \quad \mathfrak{M} = \frac{4}{3} \tau_1 \frac{J_1}{1/2 h}, \quad \text{oder}$$

$$14) \quad \tau = \frac{3}{8} \frac{\mathfrak{M} d}{J_2}; \quad \tau_1 = \frac{3}{8} \frac{\mathfrak{M} h}{J_1}, \quad \text{d. h. :}$$

Bei einem auf seine Drehungsfestigkeit beanspruchten Stabe von rechteckigem Querschnitte tritt die stärkste Schubspannung  $\tau$  an denjenigen Punkten

der Umfangslinie auf, welche der Stabachse am nächsten liegen, nämlich in dem Abstände  $\frac{1}{2}d$ . Für die Drehungsfestigkeit ist das auf die längere Mittellinie bezogene (kleinere) Trägheitsmoment  $J_2 = \frac{1}{12}hd^3$  massgebend.

**Beispiel:** Bei einem Quadrate von der Seite  $d$  als Querschnitt ist

$$\mathfrak{M} = \frac{8}{3} \tau \frac{Fd}{12} = \frac{2}{9} Fd\tau = 0,222 d^3 \tau;$$

beim Kreise vom Durchmesser  $d$ :

$$\mathfrak{M} = \frac{Fr}{2} \tau = \frac{1}{4} Fd\tau = \frac{1}{16} d^3 \pi \tau = 0,2 d^3 \tau.$$

Bei gleichem Querschnitt  $F$  ist also der Kreis, bei gleicher Breite (Durchmesser = Quadratseite) das Quadrat gegen  $\mathfrak{M}$  widerstandsfähiger.

**Der Verdrehungswinkel  $\vartheta$**  eines Stabes von rechteckigem Querschnitt wäre nach der im Querschnittspunkte  $E$  (Fig. 83) herrschenden Spannung  $\tau$  und der daraus folgenden Gleitung  $\gamma = \tau : G$  zu  $\frac{\tau}{G} \frac{l}{\frac{1}{2}d}$ , d. h. mittels Gl. 13, S. 69, zu  $\frac{3}{4} \frac{\mathfrak{M}l}{GJ_2}$  zu erwarten, nach

der im Punkte  $H$  herrschenden Spannung  $\tau_1 = \tau \frac{d}{h}$  aber zu

$$\frac{\tau_1}{G} \frac{l}{\frac{1}{2}h} = \frac{3}{4} \frac{\mathfrak{M}l}{GJ_1}.$$

In Wirklichkeit verdrehen sich die beiden Symmetrieachsen des Querschnitts annähernd um das arithmetische Mittel dieser beiden Werthe, d. h. es ist ungefähr

$$15) \quad \vartheta = \frac{3}{8} \frac{\mathfrak{M}l}{G} \left( \frac{1}{J_2} + \frac{1}{J_1} \right).$$

Die beiden Symmetrieachsen bleiben zu einander rechtwinklig; die übrigen vom Mittelpunkte aus gezogenen Radien verdrehen sich um verschiedene Winkel und treten aus der ursprünglichen Querschnittsebene heraus, so dass diese in eine krumme Fläche übergeht. Bessere Übereinstimmung mit Bauschinger's Versuchen (Civilingenieur 1881, S. 115 u. f.) ergibt sich noch, wenn man  $\frac{3}{8} = 0,375$  mit  $0,3$  vertauscht, also setzt:

$$\vartheta = 0,3 \frac{\mathfrak{M}l}{G} \left( \frac{1}{J_2} + \frac{1}{J_1} \right) l.$$

Nach Einführung von  $\mathfrak{M} = \frac{8}{3} \tau \frac{J_2}{d}$  (Gl. 13) wird hieraus

$$16) \quad \vartheta = 0,8 \frac{\tau}{G} \frac{l}{d} \left( 1 + \frac{J_2}{J_1} \right) = 0,8 \frac{\tau}{G} \frac{l}{d} \left( 1 + \frac{d^2}{h^2} \right).$$

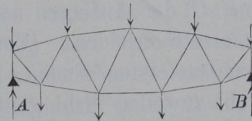
## 8. Einfache Fachwerkbalken auf zwei Stützen.

### a) Art der Berechnung der Spannkkräfte.

An Stelle der S. 23 und 28 behandelten Balken, die entweder aus einem Stücke bestanden, oder, wenn auch aus Theilen zusammengesetzt, doch einen möglichst stetig zusammenhängenden Körper bildeten (S. 34), kann man auch gegliederte Stabanordnungen verwenden, zu deren Grundgedanken schon die Betrachtung der Gelenkstangen-Verbindungen (Theil 1, S. 185) geführt hatte; es sind dies die einfachen Fachwerke.

Ein einfaches Fachwerk besteht meist in einer Aneinanderreihung (Verbindung) von Gelenkstangen-Dreiecken, von denen je zwei benachbarte eine Seite gemeinsam haben. Wird ein solches Fachwerk auf Stützen gelegt, deren eine nur in einer bestimmten (lothrechten) Richtung Widerstände leisten kann, so bildet es einen Fachwerkbalken oder Fachwerkträger (Fig. 84).

Fig. 84.



Eine Stange, welche durch zwei reibungslose Gelenke mit anderen verbunden ist, erfährt, wenn die äusseren Kräfte nur in diesen Gelenkpunkten angreifen, (nach Theil 1, S. 172) eine Spannkraft, deren Richtungslinie in die Verbindungsgerade der beiden Gelenkpunkte fällt. Ist diese Verbindungsgerade dann zugleich die Mittellinie des Stabes, so wird letzterer nur auf reinen Zug oder Druck beansprucht, wobei sich die Spannung in günstigster Weise gleichmässig über den ganzen Stab vertheilt. Die gedrückten Stäbe müssen freilich auf Knickfestigkeit berechnet werden. Bei einem Fachwerke mit reibungslosen Gelenken und mit Kraftangriff in den Gelenkpunkten liegen somit die inneren Spannkkräfte der Stäbe nach Richtung und Lage fest, nur ihre Grösse muss noch ermittelt werden.